Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

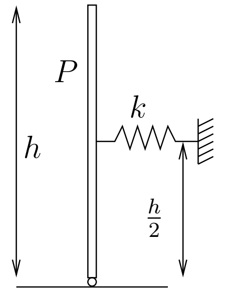
Mecánica

4.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL (13 de junio de 2000)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

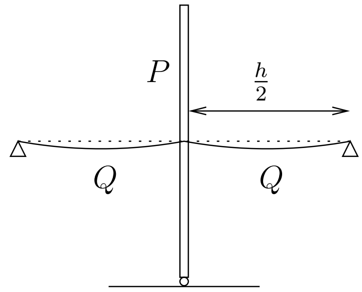
Ejercicio 3.º (puntuación: 10) Tiempo: 45 min.

Un poste rígido de peso P y altura h está colocado verticalmente, apoyado en su base mediante una articulación que permite el giro libre en un plano vertical y estabilizado mediante dos cables simétricos inextensibles anclados a una altura $h/2$ en el poste. Se pide:



1. Admitiendo que, para pequeños desplazamientos del poste, el efecto conjunto de los dos cables equivale a un resorte lineal de acción horizontal y constante k, calcular el valor que debe tener esta constante para que el equilibrio sea estable.

2. El peso de cada cable es $Q = P/100$, su anclaje en el terreno está situado a una distancia $h/2$ y se tensan de forma que la tensión horizontal en cada uno vale $H = P/10$. Calcular el valor de la rigidez k que proporciona la pareja de cables frente a desplazamientos horizontales de su anclaje en el poste, comprobando si el sistema resulta estable.



1.— Denominando θ al ángulo que forma el poste con respecto a la posición de equilibrio vertical, el potencial del sistema puede expresarse como:

$$V = P\frac{h}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(\frac{h}{2}\operatorname{sen}\theta\right)^2. \tag{1}$$

La primera derivada es

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = -P\frac{h}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}k\left(\frac{h}{2}\right)^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \tag{2}$$

donde comprobamos que $\theta = 0$ es una posición de equilibrio. Derivando de nuevo para estudiar su estabilidad,

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2} = -P\frac{h}{2}\cos\theta + k\left(\frac{h}{2}\right)^2\cos(2\theta). \tag{3}$$

Imponiendo que $\mathrm{d}^2V/\mathrm{d}\theta^2 > 0$ para $\theta = 0$ se deduce la condición pedida:

$$\boxed{k > \frac{2P}{h}}. \tag{4}$$

2.— Llamaremos $b = h/2$ a la luz de cada cable. Al producirse un desplazamiento elemental del poste, el punto de anclaje de cada cable se desplaza horizontalmente ($\mathrm{d}b$), aunque su longitud (S) se mantiene constante. Este desplazamiento producirá una variación de su tensión horizontal, $\mathrm{d}H$. La rigidez del sistema de los dos cables es $2\mathrm{d}H/\mathrm{d}b$, valor que evaluaremos calculando en primer lugar $\mathrm{d}a/\mathrm{d}b$. Para ello se parte de la ecuación que expresa la longitud del cable,

$$S = 2a \operatorname{senh}\left(\frac{b/2}{a}\right), \tag{5}$$

siendo

$$a = \frac{H}{Q/S}. \tag{6}$$

Derivando (5) respecto a b:

$$0 = 2\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b} \operatorname{senh}\left(\frac{b/2}{a}\right) + 2a\frac{(1/2)a - (b/2)\mathrm{d}a/\mathrm{d}b}{a^2} \cosh\left(\frac{b/2}{a}\right), \tag{7}$$

de donde se despeja

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b} = \frac{1/2}{\dfrac{b/2}{a} - \operatorname{tgh}\left(\dfrac{b/2}{a}\right)}. \tag{8}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (6) y (5), se llega a

$$\frac{Q}{2H} = \operatorname{senh}\left(\frac{b/2}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b/2}{\operatorname{argsenh}\left(\dfrac{Q}{2H}\right)} = 10{,}004b. \tag{9}$$

Por último, derivando (6) se deduce

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b} = \frac{S}{Q}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}b} = \frac{a}{H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}b}. \tag{10}$$

La rigidez del conjunto es $k = 2\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}b}$, que teniendo en cuenta (10), (8) y (9) resulta

$$k = 2404{,}4\frac{H}{b} = 240{,}44\frac{P}{b}, \tag{11}$$

por lo que se cumple sobradamente la condición (4) y el equilibrio es estable.