Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL (13 de junio de 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y a tinta. Si se pide *obtener* o *deducir* un resultado, deberán justificarse razonadamente todos los pasos partiendo de las ecuaciones o hipótesis previas, mientras que si se pide *expresar* o *definir* deberá responderse con la necesaria precisión, sin que sea necesario demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Una partícula de masa m se halla sometida a una fuerza central $F(r)$. *Demostrar* que su trayectoria es necesariamente plana. Empleando coordenadas polares (r, φ) *deducir* la ecuación dinámica reducida (función tan sólo de r y sus derivadas, para un valor dado de la constante de las áreas C). ($3\frac{1}{3}/10$)

El momento de la fuerza respecto del centro es nulo, y por el teorema del momento cinético $\mathbf{0} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t\, \boldsymbol{H}_O \;\Rightarrow\; \boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{r} \wedge m\dot{\boldsymbol{r}} =$ cte.; la velocidad $\dot{\boldsymbol{r}}$ es constantemente perpendicular a esta dirección fija, por lo que la trayectoria pertenece a un plano normal a dicha dirección. Por otra parte, en coordenadas polares

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{r} \wedge m\dot{\boldsymbol{r}} = (r\,\boldsymbol{u}_r) \wedge (\dot{r}\,\boldsymbol{u}_r + r\dot{\varphi}\,\boldsymbol{u}_\varphi) = r^2\dot{\varphi}\,\boldsymbol{k}, \tag{1}$$

por lo que la constancia del módulo de $\boldsymbol{H}_O$ indica que

$$r^2\dot{\varphi} = C \tag{2}$$

(constante de las áreas). Teniendo en cuenta las componentes de la aceleración en polares podemos expresar ahora la ecuación de la dinámica en dirección radial,

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = F(r). \tag{3}$$

Por último, empleando la ecuación de la constante de las áreas (2) se puede eliminar $\dot{\varphi}$ de la ecuación anterior, resultando

$$\boxed{m\left(\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3}\right) = F(r).} \tag{4}$$

Explicar el papel que juegan las fuerzas internas, en un sistema mecánico con n partículas, para la aplicación de los siguientes teoremas: a) Cantidad de movimiento; b) Momento cinético; c) Energía cinética. ($3\frac{1}{3}/10$)

Por el principio de acción y reacción, denominando $\boldsymbol{f}_{ij}$ a la fuerza ejercida sobre la partícula i por la partícula j, se cumple $\boldsymbol{f}_{ij} = -\boldsymbol{f}_{ji}$. En el *teorema de la cantidad de movimiento*, la resultante de todas las fuerzas internas se anula,

$$M\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^{\text{int}} = \boldsymbol{F}^{\text{ext}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} \boldsymbol{f}_{ij}}_{=\boldsymbol{0}}, \tag{5}$$

ya que corresponde a $n(n-1)/2$ parejas de fuerzas que se anulan dos a dos. Por otra parte, el *teorema del momento cinético* es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{f}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \wedge \left(\sum_{j\neq i} \boldsymbol{f}_{ij}\right). \tag{6}$$

Al igual que antes, el último término se puede agrupar por parejas, y si se admite que las fuerzas interiores entre cada dos partículas son centrales, se anulan dos a dos, resultando igualmente nulo su efecto. Por el contrario, en el caso del *teorema de la energía cinética* las fuerzas interiores desarrollan en general un trabajo no nulo:

$$\mathrm{d}T = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^{\text{ext}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^{\text{int}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = \mathrm{d}W^{\text{ext}} + \mathrm{d}W^{\text{int}}, \tag{7}$$

donde el término $\mathrm{d}W^{\text{int}}$ se anula tan sólo para el caso de un sólido rígido.

Expresión general, en forma vectorial, de la derivada respecto al tiempo (en un sistema absoluto S) de un vector que es constante en relación con un determinado sistema móvil S'. *Aplicación*: calcular las componentes de la velocidad de rotación del triedro de Frenet al recorrer con velocidad v una determinada curva con curvatura κ y torsión τ. (Pista: emplear las fórmulas de Frenet $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}s = \kappa\,\boldsymbol{n}$ y $\mathrm{d}\boldsymbol{b}/\mathrm{d}s = -\tau\,\boldsymbol{n}$.) ($3\frac{1}{3}/10$)

Sea $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad de rotación de S' respecto de S, siendo sus componentes en el triedro intrínseco $(\Omega_t, \Omega_n, \Omega_b)$. La derivada de un vector $\boldsymbol{p}$ fijo respecto a S' vale

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}\right)_S = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{p}. \tag{8}$$

Aplicando esta expresión y la fórmula de Frenet al vector tangente,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{t} &= \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{t} = -\Omega_n \boldsymbol{b} + \Omega_b \boldsymbol{n} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{t} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\kappa\,\boldsymbol{n}. \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Omega_b = v\kappa,\ \Omega_n = 0. \tag{9}$$

Operando similarmente con la binormal,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{b} = -\Omega_t \boldsymbol{n} + \Omega_n \boldsymbol{t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{b} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -v\tau\,\boldsymbol{n}. \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Omega_t = v\tau. \tag{10}$$

Resulta por tanto

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} = v(\tau\,\boldsymbol{t} + \kappa\,\boldsymbol{b}).} \tag{11}$$