

Mecánica

EXAMEN FINAL (13 de junio de 2000)

Apellidos	Nombre	N.º	Grupo

Ejercicio 6.º (puntuación: 10)

Tiempo: 60 min.

Una masa m se mueve sobre una recta horizontal con rozamiento de constante μ , sometida a la acción de un resorte lineal de constante k y longitud natural l_0 , cuyo otro extremo está anclado a la recta. Se pone en movimiento estirando el resorte una elongación inicial $\delta_0 = x_0 - l_0$ y soltándolo con velocidad inicial nula. Se observa que la masa efectúa un movimiento de ida y otro de vuelta, parándose después de este. Se pide:

1. Ecuación diferencial del movimiento, distinguiendo si fuere necesario entre las diversas fases del mismo.
2. Integración de la ecuación, para obtener de forma explícita $x(t)$.
3. Rango de valores que puede tomar δ_0 para que el movimiento sea una única ida y vuelta.
4. Adoptando el valor máximo del rango anterior, calcular la energía disipada en el movimiento.



1.— La reacción normal de la recta vale mg , por lo que la fuerza de rozamiento durante el movimiento será

$$F_r = -\mu mg \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}, \quad (1)$$

es decir, tiene un valor μmg con sentido opuesto a la velocidad \dot{x} . La ecuación diferencial es por tanto

$$m\ddot{x} + k(x - l_0) = -\mu mg \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + kx = \mu mg + kl_0 & \dot{x} < 0 \text{ (ida)} \\ m\ddot{x} + kx = -\mu mg + kl_0 & \dot{x} > 0 \text{ (vuelta)} \end{cases} \quad (2)$$

2.— Integramos en primer lugar la primera fase del movimiento, con las condiciones iniciales ($x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$). Para simplificar las expresiones, denominaremos $\mu mg = ky_0$, con lo que la solución particular de la ecuación es $x_p = y_0 + l_0$, y la homogénea $x_h = A_1 \cos(\omega_0 t)$, siendo $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. La constante A se obtiene mediante la condición inicial:

$$A_1 \cos(\omega_0 t)|_{t=0} + y_0 + l_0 = x_0 \Rightarrow A_1 = x_0 - l_0 - y_0 = \delta_0 - y_0. \quad (3)$$

El movimiento en la primera fase de ida es pues

$$x(t) = (\delta_0 - y_0) \cos(\omega_0 t) + y_0 + l_0. \quad (4)$$

La velocidad cambia de signo para $t_1 = \pi/\omega_0$, en cuyo instante

$$\delta_1 = x_1 - l_0 = -(\delta_0 - y_0) + y_0 = -\delta_0 + 2y_0. \quad (5)$$

A partir de entonces comienza la segunda fase, en la que la solución general es

$$x(t) = A_2 \cos(\omega_0(t - t_1)) - y_0 + l_0, \quad (6)$$

por lo que considerando la elongación inicial para esta fase en t_1 ,

$$A_2 = x_1 - l_0 + y_0 = -\delta_0 + 3y_0, \quad (7)$$

y resulta la ecuación

$$x(t) = (-\delta_0 + 3y_0) \cos(\omega_0(t - t_1)) - y_0 + l_0. \quad (8)$$

La velocidad se anulará de nuevo para $t_2 = t_1 + \pi/\omega_0$, en cuyo instante

$$\delta_2 = x_2 - l_0 = -(-\delta_0 + 3y_0) - y_0 = \delta_0 - 4y_0. \quad (9)$$

3.— Para que tenga lugar la primera fase del movimiento (4), el resorte debe vencer al rozamiento, es decir $\delta_0 > y_0$. En la segunda fase, esta condición es $|\delta_1| > y_0$, es decir $\delta_0 > 3y_0$. Para que tuviera lugar una tercera fase, la condición sería $\delta_2 > y_0 \Rightarrow \delta_0 > 5y_0$. Por tanto, el rango de valores para que sólo ocurra una ida y una vuelta será

$$3y_0 < \delta_0 \leq 5y_0. \quad (10)$$

4.— La energía disipada se calcula fácilmente mediante la diferencia

$$\Delta E = \frac{1}{2}k\delta_2^2 - \frac{1}{2}k\delta_0^2 = \frac{1}{2}k(y_0)^2 - \frac{1}{2}k(5y_0)^2 = -12ky_0^2. \quad (11)$$

Otra forma de calcularla sería evaluando el trabajo desarrollado por la fuerza de rozamiento, llegándose al mismo resultado:

$$\Delta E = \mu mg(\delta_1 - \delta_0) - \mu mg(\delta_2 - \delta_1) = ky_0(-8y_0) - ky_0(4y_0) = -12ky_0^2. \quad (12)$$