

# Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (11 de septiembre de 2000)

Apellidos	Nombre	N.º	Grupo

Ejercicio 1.º

Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y a tinta. Si se pide *obtener* o *deducir* un resultado, deberán justificarse razonadamente todos los pasos partiendo de las ecuaciones o hipótesis previas, mientras que si se pide *expresar* o *definir* deberá responderse con la necesaria precisión, sin que sea necesario demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no se recogerá.

Sea un sistema dinámico lineal, sin amortiguamiento, con dos grados de libertad descritos por las coordenadas generalizadas  $(q_1, q_2)$ . 1) *Definir* el concepto de coordenadas normales y establecer su relación con las coordenadas generalizadas. 2) *Demostrar* la propiedad de ortogonalidad de los modos normales de vibración. 3) *Escribir* la solución general del movimiento para vibraciones libres, en función de las constantes que sean necesarias. 4) *Calcular* estas constantes para unas condiciones iniciales genéricas  $\{\mathbf{q}^0\} = (q_1^0, q_2^0)$ ,  $\{\dot{\mathbf{q}}^0\} = (\dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0)$ . (5 pts.)

La ecuación dinámica del sistema será del tipo  $[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}\}$ , siendo  $\{\mathbf{q}\} = (q_1, q_2)^T$ ,  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{K}]$  las matrices de masa y rigidez del sistema respectivamente, y  $\{\mathbf{f}\}$  el vector de fuerzas aplicadas. Los modos normales de vibración son vectores de coordenadas  $\{\mathbf{a}\}_k$ , solución del problema de autovalores  $[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\}_k = \lambda_k[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\}_k$  para  $k = 1, 2$ . Las componentes de los modos las denominaremos  $\{\mathbf{a}\}_1 = (a_{11}, a_{12})^T$  y  $\{\mathbf{a}\}_2 = (a_{21}, a_{22})^T$ .

1) En función de los modos normales de vibración la solución del movimiento para un caso general puede expresarse como  $\{\mathbf{q}(t)\} = u_1(t)\{\mathbf{a}\}_1 + u_2(t)\{\mathbf{a}\}_2$ , es decir

$$\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{Bmatrix} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{A}]^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}}_{\{\mathbf{u}\}} \quad (1)$$

Las componentes  $(u_1, u_2)$  se denominan coordenadas normales, y pueden interpretarse como las amplitudes variables con el tiempo de los modos normales de vibración, o bien como el resultado de un cambio de coordenadas definido por la matriz modal traspuesta  $[\mathbf{A}]^T$ .

2) Cada uno de los modos normales cumple la ecuación de autovalores:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\}_1 = \lambda_1[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\}_1, \quad [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\}_2 = \lambda_2[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\}_2;$$

premultiplicando la primera expresión por  $\|\mathbf{a}\|_2$ , la segunda por  $\|\mathbf{a}\|_1$  y restando ambas, teniendo en cuenta la simetría de  $[\mathbf{K}]$  y  $[\mathbf{M}]$  y admitiendo que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , resulta:

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\|\mathbf{a}\|_1[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\}_2; \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{a}\|_1[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\}_2 = 0$$

3) La solución general de las vibraciones libres es  $\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{a}\}_1(A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t) + \{\mathbf{a}\}_2(A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t)$ , en función de las 4 constantes  $(A_1, A_2, B_1, B_2)$ . Aplicando las condiciones iniciales dadas, resultan las expresiones  $A_1\{\mathbf{a}\}_1 + A_2\{\mathbf{a}\}_2 = \{\mathbf{q}^0\}$  y  $B_1\omega_1\{\mathbf{a}\}_1 + B_2\omega_2\{\mathbf{a}\}_2 = \{\dot{\mathbf{q}}^0\}$ . Premultiplicando estas expresiones sucesivamente por  $\|\mathbf{a}_1\|[\mathbf{M}]$  y  $\|\mathbf{a}_2\|[\mathbf{M}]$ , y admitiendo que los modos están normalizados, podemos despejar:

$$A_1 = \|\mathbf{a}_1\|[\mathbf{M}]\{\mathbf{q}^0\}; \quad A_2 = \|\mathbf{a}_2\|[\mathbf{M}]\{\mathbf{q}^0\}; \quad B_1 = \frac{1}{\omega_1}\|\mathbf{a}_1\|[\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{q}}^0\}; \quad B_2 = \frac{1}{\omega_2}\|\mathbf{a}_2\|[\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{q}}^0\}.$$

*Deducir*, a partir del principio del momento cinético, las ecuaciones de Euler de la dinámica para un sólido con un punto  $O$  fijo, *expresándolas* tanto en forma vectorial como en componentes según ejes principales. Se supondrá conocido el tensor de inercia  $\mathbf{I}_O$  y sus componentes principales  $(A, B, C)$ . (2,5 ptos.)

El momento cinético se expresa como  $\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$ . El principio del momento cinético indica que la derivada (absoluta) respecto al tiempo de esta magnitud es igual al momento de las fuerzas,  $\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O$ . La derivada absoluta se puede calcular derivando primero relativo al triedro del sólido, en el cual el tensor de inercia es constante, y añadiendo el término complementario correspondiente a la rotación:

$$\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}).$$

Esta es la expresión vectorial de la ecuación de Euler de la dinámica. Empleando como triedro del cuerpo el principal de inercia, en el cual el tensor de inercia tiene las componentes  $[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$  y la velocidad de rotación  $\{\boldsymbol{\Omega}\} = (p, q, r)^T$ , las componentes de la ecuación anterior resultan en las siguientes ecuaciones escalares:

$$\begin{cases} M_x = A\dot{p} - (B - C)qr, \\ M_y = B\dot{q} - (C - A)rp, \\ M_z = C\dot{r} - (A - B)pq. \end{cases}$$

Un sistema mecánico tiene un potencial  $V(q_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . 1) *Definir* los conceptos de equilibrio y estabilidad. 2) *Establecer y justificar* las condiciones de equilibrio y estabilidad en una posición determinada. (2,5 ptos.)

1) El *equilibrio* se define como la ausencia de movimiento, es decir para una posición determinada  $q_i^0$  se ha de verificar la condición inicial  $\dot{q}_i(0) = 0$  y la ecuación de evolución  $\ddot{q}_i = 0$ .

La *estabilidad* del equilibrio se define como la condición por la que, ante una pequeña perturbación respecto de la posición de equilibrio, el movimiento resultante se mantiene pequeño (acotado). Formalmente,  $\forall \epsilon \exists \delta$  tal que  $\|q_i(0) - q_i^0\|, \|\dot{q}_i(0)\| < \delta \Rightarrow \|q_i(t) - q_i^0\|, \|\dot{q}_i(t)\| < \epsilon$ .

2) Admitiendo que el sistema es holónomo y las coordenadas libres, es fácil demostrar que la condición necesaria y suficiente para el equilibrio es que se anulen las fuerzas generalizadas para cada coordenada, lo que en función del potencial equivale a la condición de extremo del mismo (mínimo o máximo):  $Q_j|_0 = \partial V / \partial q_j|_0 = 0$ .

Para justificar la estabilidad, supongamos una perturbación inicial pequeña, tal que  $T_0 + V_0 = \epsilon$ , donde consideramos sin pérdida de generalidad que en la posición de equilibrio es  $V|_0 = 0$ . Al ser conservativo el sistema la energía se debe mantener, por lo que  $T + V = \epsilon$  (cte.). Por otra parte, la energía cinética es esencialmente positiva ( $T > 0$ ). Supongamos que  $V$  es un mínimo local, lo que implica que en cualquier posición próxima es también  $V > 0$ ; esta condición conduce necesariamente a que ambas componentes se mantienen acotadas:  $T, V < \epsilon$ . La regularidad de las funciones respectivas en un entorno de la posición de equilibrio conduce a deducir igualmente que las posiciones y velocidades se mantendrán acotadas. En consecuencia, la condición para la estabilidad es que el potencial tenga un mínimo local en la posición de equilibrio, lo que puede expresarse matemáticamente indicando que la matriz Hessiana de las derivadas segundas de  $V$  ha de ser definida positiva:

$$\left[ \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right]_0 > 0.$$