

# Capítulo 1

## Principios de la mecánica

Este capítulo desarrolla algunos principios fundamentales sobre los que se basa la teoría de la *mecánica clásica*, en la que se centra este curso. Conocer dicho punto de partida, así como las limitaciones de la teoría empleada, resulta imprescindible para una asimilación adecuada de la materia.

### 1.1. La mecánica como teoría científica

**DEFINICIÓN:** *La mecánica es una teoría científica que estudia el movimiento de los cuerpos y sus causas, o bien el equilibrio, es decir, la falta de movimiento.*

Se trata de una *teoría científica* porque pretende interpretar fenómenos físicos que se observan experimentalmente. Para ello la mecánica parte de unos postulados o principios fundamentales, sobre los que se basa una teoría a través de modelos matemáticos, dando así una interpretación coherente a las observaciones experimentales. En la actualidad existen diversas teorías de la mecánica, y a lo largo del tiempo han existido muchas más que han quedado obsoletas bien por no ser prácticas en su aplicación, o bien por no adecuarse sus predicciones a la realidad física observada.

Para juzgar las teorías científicas, y en concreto la mecánica, no tiene sentido emplear criterios de «veracidad absoluta.» A pesar de que la mecánica tenga un elevado contenido de modelos matemáticos, habiendo sido a lo largo de la historia una de las motivaciones principales para el desarrollo de las matemáticas, no es la elegancia ni el rigor formal de estos modelos matemáticos un criterio adecuado para valorar una teoría de la mecánica. Cada teoría (y sus principios subyacentes) es tan buena como la interpretación que realiza de las observaciones experimentales de la realidad física.

Si las predicciones teóricas se corresponden adecuadamente con las observaciones experimentales, la teoría será adecuada, independientemente de su «elegancia» matemática. Por el contrario, si los resultados no se corresponden con las observaciones, llegaremos a la conclusión de que se precisa otra teoría distinta para el fenómeno en cuestión.

Así, las tres teorías principales de la mecánica existentes en la actualidad son:

**La Mecánica Clásica**, cuyo desarrollo moderno se considera generalmente iniciado por Newton (1686: «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica») y continuado hasta nuestros días por diversos matemáticos y científicos: Juan, Daniel y Jacobo Bernouilli, L. Euler, J. D'Alembert, J.L. Lagrange, W. Hamilton, etc. Los modelos newtonianos, enunciados por Isaac Newton, y desarrollados algo más tarde por Euler, fueron los primeros que lograron explicar satisfactoriamente al mismo tiempo el movimiento de los cuerpos celestes (observaciones de Kepler y otros sobre el movimiento de los planetas) y el de los cuerpos a escala humana (observaciones de Galileo sobre la caída de los cuerpos).

**La Mecánica Relativista**, que suple la inexactitud de la mecánica clásica para velocidades próximas a la de la luz (teoría de la relatividad restringida) o para campos gravitatorios muy intensos (teoría de la relatividad generalizada). Ha sido propuesta por Albert Einstein en este mismo siglo, e involucra una complejidad matemática notablemente mayor.

**La Mecánica Cuántica**, que surge de las observaciones de las partículas elementales, en las que intervienen acciones —productos de energía por tiempo— tan pequeñas que son comparables a la constante de Planck ( $E t \sim h$ ). En estos casos se aplica el principio de indeterminación de Heisenberg, que establece la imposibilidad de medir de manera precisa la posición y velocidad de la partícula al mismo tiempo, valores que conocemos tan sólo de manera probabilista. También ha sido propuesta este mismo siglo (Congreso de Solvay de Bruselas en 1927), por un grupo de científicos entre los que destacan L. de Broglie, E. Schrödinger y P. Dirac.

A pesar de las nuevas teorías de la mecánica surgidas recientemente, se puede afirmar que la *mecánica clásica* constituye una teoría coherente, capaz de proporcionar interpretaciones suficientemente precisas para la mayoría de los fenómenos que observamos.

La teoría de la relatividad es de un orden más general que la mecánica clásica. Cuando la velocidad es pequeña en relación con la de la luz y los campos gravitatorios no son muy intensos, sus predicciones corresponden con las de la mecánica clásica. Sin embargo, es capaz interpretar correctamente otros fenómenos que la mecánica clásica no explica de manera adecuada<sup>1</sup>. Sería posible por tanto estudiar el movimiento de los objetos cotidianos como un automóvil o un balón, por ejemplo, mediante la teoría de la relatividad. Sin embargo, los modelos y los desarrollos matemáticos resultarían de una complejidad extraordinaria, por lo que este método es prácticamente inviable.

La mecánica clásica, a pesar de lo que su nombre parece indicar, no constituye una teoría muerta ni agotada en su desarrollo. En nuestros días se continúa investigando, especialmente en campos como la mecánica de medios continuos, o en los métodos cualitativos para el estudio de sistemas dinámicos complejos (estabilidad de sistemas dinámicos no lineales y movimientos de tipo caótico).

La *Mecánica de Medios Continuos* es un subconjunto especializado de la mecánica clásica. En ella se estudia el movimiento y la deformación de los medios continuos (es decir, aquéllos que no se pueden representar mediante idealizaciones discretas con un número finito de grados de libertad, como el punto material o el sólido rígido). Los modelos más simples de la mecánica de medios continuos son la teoría de la elasticidad lineal y la de los fluidos newtonianos, permitiendo estudiar respectivamente la deformación de los sólidos elásticos y las estructuras en régimen lineal y el flujo de los fluidos. Recientemente, se han propuesto modelos más generales para comportamientos no lineales, así como métodos y algoritmos muy potentes para su resolución numérica mediante el ordenador (método de los elementos finitos). Es necesario también una investigación experimental constante para conocer las propiedades mecánicas de los nuevos materiales (o incluso de los tradicionales, ya que algunos como el hormigón o los suelos son todavía insuficientemente conocidos).

La *Dinámica de sistemas no lineales complejos* permite estudiar el comportamiento de sistemas que no pueden ser caracterizados de manera de-

---

<sup>1</sup>Un ejemplo lo constituye el corrimiento del perihelio (punto de la órbita más cercano al Sol) observado para algunos planetas, especialmente el de Mercurio, el planeta más cercano al Sol y cuya órbita es la más excéntrica (salvo la de Plutón). En efecto, se observa un avance de su perihelio de unos 574 segundos de arco por siglo, y considerando el efecto gravitacional de los restantes planetas, la dinámica clásica sólo predice unos 531 segundos por siglo. Los restantes 43 segundos son obtenidos de manera muy precisa por la teoría de la relatividad, lo que constituye una contundente confirmación de la misma.

terminista. La aparente falta absoluta de orden en su respuesta es debida a menudo a una sensibilidad extrema a la variación de las condiciones iniciales u otros parámetros del sistema, lo que conduce a la denominación de «*sistemas caóticos*». Estos sistemas precisan ser analizados mediante métodos cualitativos, propuestos a final del siglo pasado por H. Poincaré y Liapounov, en lugar de los métodos cuantitativos y deterministas habituales. También en este caso el ordenador es una herramienta de gran utilidad.

Este curso está basado en la *Mecánica Clásica*, desarrollada a partir de los principios y teoremas newtonianos. Esta se aplicará fundamentalmente a sistemas discretos formados por partículas o masas puntuales, sólidos rígidos, resortes, etc., aunque se hará alguna incursión en medios deformables, como por ejemplo los cables. La mecánica de medios continuos se tratará en otras asignaturas de cursos posteriores, como la resistencia de materiales, elasticidad y plasticidad, la geotecnia, el cálculo de estructuras, la hidráulica, etc. Sin embargo los conceptos básicos para todas estas asignaturas son los mismos que se estudian en este curso de mecánica.

Como se ha dicho, en la mecánica juegan un papel importante las matemáticas, ya que se basa en modelos matemáticos que interpreten las observaciones experimentales. El aparato matemático en algunos casos puede resultar de cierta complejidad. Es importante no perder de vista, sin embargo, el sentido físico de los conceptos: Las matemáticas no son un fin en sí, sino un medio para interpretar conceptos y fenómenos físicos. Aunque los modelos matemáticos empleados aquí puedan ser más generales (y más complejos por tanto) que los estudiados en cursos anteriores, no conviene que oscurezcan nunca la interpretación física intuitiva de los conceptos.

Uno de los postulados esenciales de la mecánica es la causalidad determinista, lo que ha permitido superar interpretaciones mágicas o religiosas existentes antaño para algunos fenómenos, como el movimiento de los astros y otros fenómenos del firmamento celeste. Aún en nuestros días existen personas que creen en dicho tipo de interpretaciones (por ejemplo los astrólogos y sus seguidores), fruto por lo general de la ignorancia o del miedo a la verdad científica. Sin embargo, conviene admitir que, en ciertas situaciones, el postulado de la causalidad determinista en sentido estricto es cuestionable, siendo necesario acudir a métodos probabilistas para describir los fenómenos (como en la mecánica estadística, basada en la causalidad probabilista) o a métodos cualitativos de análisis (por ejemplo en los sistemas caóticos, en los que no es posible predecir el movimiento como ecuaciones horarias, ya que cualquier pequeña perturbación inicial lo modifica). En cualquier caso, es conveniente evitar un exceso de celo en la aplicación de los modelos deterministas de la mecánica, ya que no debemos olvidar que nuestra percepción

de la «realidad física» es necesariamente subjetiva.

Por otra parte, se postula también la capacidad de definir un conjunto de causas suficientemente reducido para explicar los fenómenos. Las causas muy alejadas en el espacio o en el tiempo no tienen efecto sobre las observaciones de fenómenos presentes. Esto también es cuestionable para interpretaciones muy generales: No es posible prescindir de la estructura del cosmos en el instante posterior a la primera gran explosión (big-bang) para explicar la existencia de las galaxias, estrellas y planetas actuales; asimismo parece que algunos fenómenos cosmológicos no se pueden interpretar sin recurrir a la materia oscura existente en el universo, de naturaleza aún desconocida (agujeros negros, neutrinos, ...).

## 1.2. Sistemas de Referencia; Espacio y Tiempo

Los fenómenos mecánicos se describen mediante «sistemas de referencia<sup>2</sup>,» basados en los conceptos de espacio y tiempo. Por su importancia conviene enunciar los postulados que asume la mecánica clásica para estos conceptos.

El *espacio*, y por tanto su métrica, tiene las propiedades siguientes.

1. *Independencia* de los objetos en él inmersos. (La métrica del espacio no se ve afectada por los mismos.)
2. *Constancia* a lo largo del tiempo.
3. *Homogeneidad*: es igual en todos los puntos, no existiendo puntos privilegiados.
4. *Isotropía*: es igual en todas las direcciones, no existiendo direcciones privilegiadas.

El espacio se caracteriza por una métrica Euclídea<sup>3</sup>, lo que lo convierte en un espacio puntual Euclídeo en 3 dimensiones,  $\mathbb{R}^3$ .

El *tiempo* se caracteriza a su vez por las siguientes propiedades.

1. *Homogeneidad*, al no existir instantes privilegiados.

---

» <sup>2</sup>No se debe confundir el término *sistema mecánico* (conjunto de partículas o cuerpos cuyo movimiento se desea estudiar) con *sistema de referencia* (triedro de ejes, coordenadas o parámetros que sirven para describir dicho movimiento).

<sup>3</sup>La distancia entre dos puntos definidos por sus coordenadas cartesianas rectangulares  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2)$  viene dada por  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

2. Fluye *constantemente en un sentido*, por lo que no se puede retroceder ni volver al pasado (desgraciadamente para algunos). Asimismo, los fenómenos futuros no pueden condicionar los presentes. No se cumple por tanto la isotropía, existiendo un único sentido en el que puede discurrir el tiempo.
3. *Simultaneidad absoluta*: Los fenómenos considerados simultáneos para dos observadores en sendos sistemas de referencia, lo son asimismo para cualquier otro observador ligado a cualquier otro sistema de referencia.

En mecánica clásica, el tiempo se considera una variable de naturaleza distinta de las variables espaciales, y la métrica euclídea no está influenciada por él.

Algunos de estos postulados básicos no son aceptados por la mecánica relativista. La teoría de la relatividad restringida establece una referencia en cuatro dimensiones espacio-tiempo. La teoría de la relatividad general establece un espacio curvado, con métrica Riemanniana no Euclídea, debido a la presencia de masas que condicionan dicha métrica. De esta forma el espacio no sería independiente de los objetos en él inmersos.

### 1.3. Principio de la relatividad de Galileo

El principio de la relatividad galileana<sup>4</sup> establece que:

*‘Dos sistemas de referencia en movimiento relativo de traslación rectilínea uniforme son equivalentes desde el punto de vista mecánico; es decir, los experimentos mecánicos se desarrollan de igual manera en ambos, y las leyes de la mecánica son las mismas.’*

Uno de los ejemplos puestos por Galileo es el de un observador viajando en un barco que navega plácidamente sobre un río, en contraste con un observador fijo en la orilla. Ambos interpretan de la misma manera la caída de un cuerpo hacia el suelo en su propio sistema, que como sabemos sigue un movimiento vertical uniformemente acelerado.

---

<sup>4</sup>Galileo Galilei, *Discursos y demostraciones en torno a dos ciencias nuevas relacionadas con la mecánica*, 1602. Galileo, que vivió entre 1564 y 1642, realizó contribuciones importantes a la mecánica y a la astronomía, estudiando por primera vez los cielos mediante el telescopio que diseñó él mismo. Fue condenado como hereje por la inquisición católica, que no aceptaba su teoría según la cual la tierra gira alrededor del sol.

**Transformación de Galileo**<sup>5</sup>.— Sea un sistema móvil  $(O'x'y'z')$ , que se traslada respecto a otro fijo  $(Oxyz)$  con velocidad  $\mathbf{v}$ , manteniéndose paralelos los ejes de ambos. Puesto que podemos elegir las direcciones del triedro

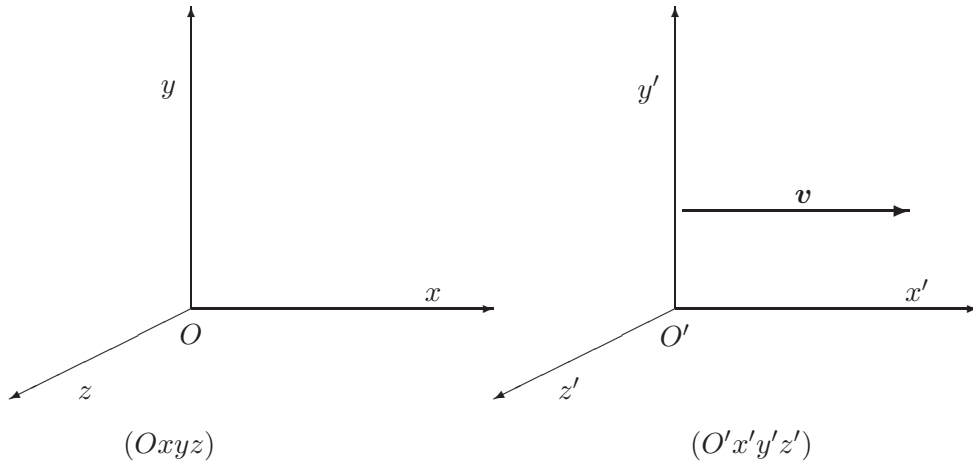


Figura 1.1: *Sistemas de referencia en movimiento relativo rectilíneo y uniforme, con velocidad  $v$  en la dirección de  $Ox$*

de referencia, elegimos la dirección  $Ox$  según la dirección de la velocidad de traslación (recordemos que el espacio es isotrópico, por lo que es lícito elegir una orientación arbitraria para los ejes, sin pérdida de generalidad). Consideraremos también que Inicialmente (para  $t = 0$ )  $O$  y  $O'$  coinciden.

Sean  $(x, y, z)$  las coordenadas de un punto en el sistema fijo,  $(x', y', z')$  en el móvil y  $v$  el módulo de la velocidad. Las ecuaciones de transformación para las coordenadas son:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (1.1)$$

Derivando sucesivamente<sup>6</sup>, obtenemos las velocidades y aceleraciones en

<sup>5</sup>En el apartado 6.3.5 se ofrece una generalización de esta transformación y se discute la relación de las simetrías que expresa (invariancias cuando se produce la transformación) con las constantes del movimiento y los principios de conservación.

<sup>6</sup>En lo sucesivo se empleará la notación de uno o dos puntos superpuestos para indicar derivadas (totales) respecto al tiempo:  $\dot{x} \stackrel{\text{def}}{=} dx/dt$ ,  $\ddot{x} \stackrel{\text{def}}{=} d^2x/dt^2$ . También emplearemos la notación mediante negritas para identificar vectores o tensores:  $\mathbf{a} \equiv \{a_i\}$ ,  $\mathbf{I} \equiv [I_{kl}]$ .

ambos sistemas:

$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} - v \\ \dot{y}' = \dot{y} \\ \dot{z}' = \dot{z} \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x}' = \ddot{x} \\ \ddot{y}' = \ddot{y} \\ \ddot{z}' = \ddot{z} \end{cases}$$

Se observa por tanto que las derivadas segundas (aceleraciones) coinciden. Esto nos permite intuir —admitiendo como postulado el principio de la relatividad galileana— que las leyes de la dinámica están basadas en las derivadas segundas respecto al tiempo, única forma de que las leyes sean invariantes cumpliéndose dicho principio. En efecto, según sabemos, el estado de un sistema formado por un partícula en movimiento según una dirección fija se caracteriza en un instante dado por su posición y su velocidad  $(x, \dot{x})$ . La evolución del movimiento viene gobernada por la ecuación dinámica ( $F = m\ddot{x}$ ).

## 1.4. Las leyes de Newton

Formuladas por Isaac Newton en su obra «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» (1686), constituyen el primer intento de formular una base axiomática para una teoría científica de la mecánica. Debe aclararse que no fueron formuladas por Newton de forma precisa como se suelen recoger hoy en día en los libros de texto. También debe advertirse que en sentido riguroso no recogen de forma completa toda la axiomática necesaria para la mecánica clásica, siendo necesario incorporar aportaciones adicionales de Euler, Cauchy y otros. A pesar de esto, la publicación de los «principia» constituye un hito monumental de enorme valor, sobre el que se cimienta la mecánica clásica.

Para aclarar el modelo axiomático de Newton citaremos aquí textualmente de los «Principia»<sup>7</sup>. Newton parte en primer lugar de cuatro definiciones:

*‘DEFINICION PRIMERA. La cantidad de materia es la medida de la misma originada de su densidad y volumen conjuntamente.’*

*‘DEFINICION II. La cantidad de movimiento es la medida del mismo obtenida de la velocidad y de la cantidad de materia conjuntamente.’*

*‘DEFINICION III. La fuerza ínsita de la materia es una capacidad de resistir por la que cualquier cuerpo, por cuanto de él*

---

<sup>7</sup>Las citas han sido extraídas de Isaac Newton, *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* (2 tomos), traducción española de Eloy Rada, Alianza Editorial, 1987.



*depende, perservera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo.'*

*'DEFINICION IV. La fuerza impresa es la acción ejercida sobre un cuerpo para cambiar su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo.'*

La definición primera (cantidad de materia de un cuerpo) equivale a lo que conocemos por *masa*. La tercera caracteriza las denominadas *fuerzas de inercia*, mientras que la cuarta se refiere a las *fuerzas* propiamente dichas.

Realizadas estas definiciones, Newton enuncia sus conocidas tres leyes o principios fundamentales:

*'LEY PRIMERA. Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento rectilíneo y uniforme a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado.'*

Esta ley constituye el llamado principio de la inercia. Admitiendo también el principio de Galileo, nos permite definir los llamados *sistemas inerciales*, como aquellos en los que se cumple dicho principio. Las leyes de la mecánica se formulan en un sistema inercial de referencia. Por el principio de Galileo, admitiendo que existe al menos un tal sistema inercial, existirán infinitos sistemas inerciales en los que se cumplen las mismas leyes mecánicas y en concreto la ley primera de Newton: todos aquellos relacionados entre sí mediante transformaciones de Galileo (1.1), es decir, que se mueven con velocidad rectilínea y uniforme respecto al primero.

Este principio nos permite también definir, como condiciones iniciales del movimiento, las que caracterizan a un movimiento estacionario o constante: la posición  $\mathbf{r}$  y la velocidad  $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{r}}$ .

Conviene observar también que Newton emplea el término «cuerpo» para referirse en realidad a una partícula, o punto material, caracterizada por la posición y velocidad de un solo punto<sup>8</sup>.

*'LEY II. El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.'*

Esta ley indica claramente una relación lineal («proporcional») entre fuerzas y variaciones de la cantidad de movimiento, de tipo vectorial («según

---

<sup>8</sup>El tratamiento de los sólidos rígidos, así como el de sistemas generales formados por varias partículas, requiere de diversos principios y teoremas adicionales que fueron propuestos por L. Euler. De esto se tratará en los capítulos 6 y 8.

la línea recta»). Se denomina en ocasiones *ley fundamental de la dinámica*, permitiendo obtener las ecuaciones básicas de la misma. Expresada como ecuación, equivale a:

$$\Delta \underbrace{(m\mathbf{v})}_{\substack{\text{cant. de} \\ \text{movto.}}} = \underbrace{\mathbf{F}\Delta t}_{\text{impulsión}} .$$

Pasando al límite, para un incremento infinitesimal de tiempo, obtenemos la relación diferencial siguiente:

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}dt.$$

O bien, llamando *cantidad de movimiento* a  $\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{v}$ ,

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Admitiremos en principio que la masa de un cuerpo se conserva. Así pues, se llega a la conocida expresión que define la ley del movimiento de una partícula:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}}, \quad (1.2)$$

donde  $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt$ . Cabe realizar en relación con esta fórmula las siguientes

OBSERVACIONES:

- La aceleración, derivada segunda del vector posición, es asimismo un vector. La ecuación (1.2) tiene por tanto carácter vectorial, lo que identifica a las fuerzas como vectores, e implícitamente supone la aditividad vectorial para las mismas (ley del paralelogramo de fuerzas).
- La expresión (1.2) da lugar a ecuaciones diferenciales de segundo orden, ya que intervienen derivadas segundas de la incógnita  $\mathbf{r}$  respecto al tiempo.

*‘LEY III. Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria. O sea, las acciones mutuas de los cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.’*

Se trata del llamado principio de acción y reacción. Todas las fuerzas deben de tener contrapartida, siendo imposible ejercer una fuerza desde el vacío, sin apoyo. Es siempre necesario apoyarse en algún cuerpo o medio material que absorba la reacción (modificando a su vez el movimiento de este otro cuerpo, según la segunda ley).

EJEMPLO 1.1: *Fuerza ejercida desde la superficie de la Tierra.* Todo cuerpo cercano a la tierra, tanto en estado de movimiento (caída libre) o en reposo sobre el suelo, *recibe* una fuerza (denominada peso) ejercida por la tierra, que lo mueve en el primer caso o lo mantiene inmóvil en el segundo. El cuerpo a su vez ejerce sobre la tierra una fuerza igual y contraria, aunque esta última, debido a la gran masa de la tierra, produce un efecto muy pequeño sobre nuestro planeta.

EJEMPLO 1.2: *Movimiento de un cohete en el vacío.* Una fuerza no se puede ejercer sobre el vacío, necesitando siempre aplicarse sobre otro cuerpo (que a su vez producirá una reacción igual sobre el primero). Para moverse — o más bien acelerar o frenar, es decir, variar el movimiento— en el vacío, un cohete o sonda espacial necesita apoyarse sobre algún medio. Esto se consigue mediante masa expulsada por la tobera, medio en el cual se *apoya* el cohete, a través de la expulsión de los gases del combustible quemado, propulsión iónica, plasma, u otros medios. De este tema se tratará en el capítulo 6.6.

## 1.5. Conceptos de masa y fuerza; discusión de las leyes de Newton

Las leyes de Newton reposan sobre las definiciones básicas de masa y fuerza. Sin embargo, examinando dichas leyes con espíritu crítico, es fácil ver que las definiciones realizadas por Newton de estos conceptos adolecen de algunas deficiencias.

La definición de fuerza (definición IV, pág. 1.9) es claramente circular con la primera ley. En efecto, se podría entender ésta como una definición de fuerza, obviando la definición anterior dada por Newton. Aún aceptando esto, tampoco se puede considerar esta ley como una definición precisa de fuerza, ya que no proporciona una manera de medir su valor de forma cuantitativa. En realidad tan sólo se podría deducir de la primera ley cuándo la fuerza es nula o cuándo no lo es. La segunda ley sin embargo sí se puede interpretar como una definición cuantitativa de fuerza, pero ésto la privaría a su vez de su consideración como principio.

En cuanto a la definición de masa (definición I, pág. 1.8), Newton la refiere a la densidad ( $\rho$ ) y volumen ( $V$ ) que integran un cuerpo ( $M = \rho V$ ). ¿Cuál sería entonces la definición de densidad? Es difícil aceptar que la densidad sea un concepto más fundamental que el de masa.

Un procedimiento aparentemente más riguroso para definir la masa es

el debido a E. Mach<sup>9</sup> (1858-1916), que resumimos a continuación.

Sean dos partículas,  $a$  y  $b$ , formando un sistema binario aislado. Expresando la segunda ley de Newton para la partícula  $a$ :

$$m_a \mathbf{a}_a = \mathbf{F}_{ab},$$

donde  $\mathbf{F}_{ab}$  es la fuerza ejercida sobre  $a$  por  $b$ . Análogamente para  $b$ ,

$$m_b \mathbf{a}_b = \mathbf{F}_{ba} = -\mathbf{F}_{ab},$$

por la 3.<sup>a</sup> ley de Newton. Así,

$$m_a \mathbf{a}_a = -m_b \mathbf{a}_b,$$

y empleando los módulos de las aceleraciones  $a_a$  y  $a_b$ ,

$$\frac{m_b}{m_a} = -\frac{a_a}{a_b}.$$

Suponiendo la masa  $m_a$  como valor de referencia o definición de unidad de masa, este procedimiento nos permite medir la masa de cualquier partícula  $b$  a partir de la medición de las aceleraciones  $a_b$  y  $a_a$ .

Aunque aquí, por clarificar la explicación, se ha llegado a esta definición partiendo de las leyes de Newton, sería posible considerarla como definición básica de masa, para comprobar posteriormente que, efectivamente, es consistente con las leyes de Newton.

De esta forma, con el espíritu crítico mencionado, cabría considerar las leyes primera y segunda de Newton como definiciones de fuerza, con lo que la única ley que expresa un postulado básico de la mecánica sería la ley tercera. Según Mach por tanto, es la ley tercera de Newton (principio de acción y reacción) la que reviste mayor importancia en la axiomática de la mecánica clásica.

En relación con esta última ley, puede ser objeto de cierta polémica la consecuencia implícita de existencia de *acciones a distancia*, es decir acciones que se propagan de manera instantánea (con velocidad infinita). En efecto, si se suponen dos cuerpos alejados entre sí con fuerzas de interacción centrales (dirigidas según la recta que las une), y uno de ellos sufre un cambio de posición, la ley de acción y reacción obligaría a que la fuerza de reacción sobre la otra partícula modificase su dirección de manera instantánea<sup>10</sup>.

<sup>9</sup>E. Mach, *The science of mechanics*, traducción al inglés, Open Court, 1902.

<sup>10</sup>Históricamente ha existido siempre, antes y después de Newton, una contestación a la posibilidad de tales acciones a distancia. Antiguamente se defendía que todo el espacio estaba lleno de una sustancia invisible, llamada «Éter,» vehículo transmisor de las fuerzas. Este concepto sobrevivió a Newton, alcanzando su mayor predicamento dos siglos después para explicar el campo electromagnético, siendo la Teoría de la Relatividad la que acabó de desterrarlo.

En la realidad física parece que no existen tales interacciones instantáneas; respondiendo a ello la teoría de la relatividad restringida establece un límite a la velocidad de propagación de las interacciones, que es la velocidad de la luz en el vacío ( $c$ ). Esto origina una cierta inexactitud de la mecánica clásica, error que sin embargo es muy pequeño para las fuerzas gravitatorias o elásticas en objetos «cotidianos.»

Conviene observar también que de la tercera ley se pueden hacer dos enunciados. En su *forma débil*, ciñéndose estrictamente al enunciado Newtoniano, establece que las fuerzas son iguales en magnitud y dirección y de sentido opuesto. Sin embargo, no presupone que tengan la misma dirección que la recta que une a las dos partículas sobre las que actúan. En el caso en que sí se verifique esta última hipótesis más restrictiva, se dice que se cumple el principio de acción y reacción en su *forma fuerte*, siendo las fuerzas centrales. En numerosos casos prácticos se verifican ambos enunciados del principio de acción y reacción, como son las fuerzas gravitatorias, elásticas, o electrostáticas. Sin embargo, existen fenómenos importantes en los que no se verifica en ninguna de sus dos formas. Estos casos corresponden a fuerzas que dependen de la velocidad, ligadas por lo general a campos que se propagan con velocidad finita, como son las fuerzas electrodinámicas debidas a cargas en movimiento.

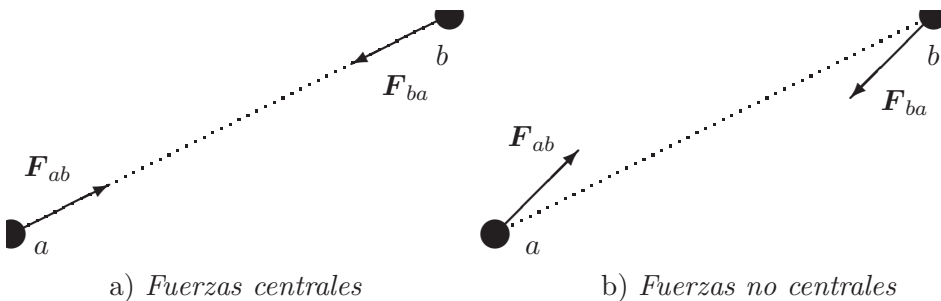


Figura 1.2: Las fuerzas centrales están dirigidas según la recta que une los cuerpos, mientras que las fuerzas no centrales no verifican esta hipótesis, aún siendo iguales en magnitud y dirección y de sentido opuesto.

En resumen, podemos clasificar las fuerzas citadas esquemáticamente como sigue.

- *Fuerzas centrales*: Están asociadas a campos que suponen una acción a distancia, propagándose por tanto de manera instantánea. Se trata de fuerzas dirigidas hacia las partículas que las originan, cumpliendo la tercera ley de Newton en su *forma fuerte*. En mecánica clásica se

admite esta hipótesis como adecuada para algunos de los tipos más usuales de fuerzas:

- *Fuerzas gravitatorias*. La hipótesis de fuerza central e instantánea se considera adecuada para las mediciones en escalas usuales. Sin embargo, para mediciones a escalas astronómicas o cosmológicas se trata de una hipótesis cuestionable. Sería más correcto interpretarlas mediante ondas de gravedad, que se propagan con la velocidad de la luz.
  - *Fuerzas electrostáticas o magnetostáticas*, de atracción o repulsión debidas a cargas eléctricas o magnéticas en reposo. Al igual que en el caso gravitatorio, de forma rigurosa para escalas astronómicas puede ser necesario considerar la transmisión de dichas fuerzas a través de ondas electromagnéticas.
  - *Fuerzas elásticas*, ejercidas entre las partículas en contacto de un medio continuo. Por lo general, podría admitirse que son manifestaciones macroscópicas de las fuerzas electrostáticas entre las moléculas.
- *Fuerzas no centrales*: ocurren, por lo general, cuando las interacciones dependen de la velocidad, estando asociadas a campos que se propagan con velocidad finita. Es el caso, por ejemplo, de las *Fuerzas electromagnéticas*, que cuando son debidas a cargas móviles pueden no cumplir tampoco el principio de acción y reacción en su forma débil.

Debe quedar claro que en este curso admitiremos la hipótesis de *fuerzas centrales*, por lo que será válido el principio de acción y reacción en su forma fuerte.

La definición de masa según el procedimiento de Mach arriba descrito no proporciona sin embargo un método viable para medirla. Sería prácticamente imposible aislar completamente un sistema binario y al mismo tiempo realizar mediciones. Una forma más práctica de medir la masa, aunque de forma indirecta, es con una balanza de resorte. En ésta lo que se mide directamente es el peso, o atracción gravitatoria hacia el centro de la Tierra. Basta dividir el peso ( $w$ ) por la aceleración de la gravedad en la superficie

de la Tierra ( $g$ ) para obtener la masa<sup>11</sup>:

$$w = mg \quad \Rightarrow \quad m = \frac{w}{g}.$$

## 1.6. La ley de la gravitación universal

Newton fue el primero en explicar el movimiento, tanto de los cuerpos celestes —proporcionando la explicación matemática de las leyes observadas por Kepler para el movimiento de los planetas en órbitas elípticas—, como de los «terrestres» —la famosa caída de la manzana—, a partir de una única ley para las fuerzas: la ley de la gravitación universal. Anteriormente, los estudios y teorías de la mecánica habían buscado explicaciones separadas para ambos fenómenos. Kepler había deducido del análisis minucioso de las observaciones experimentales que los planetas describían elipses con foco en el Sol, así como la constancia de la velocidad areolar y el período de estos movimientos orbitales (aptdo. 5.5). A su vez, Galileo había caracterizado el movimiento de caída uniformemente acelerado de los graves, por —según la leyenda— experimentos desde la torre inclinada de Pisa. Todas estas descripciones eran empíricas, sin una justificación basada en modelos matemáticos coherentes.

La ley de la gravitación universal propuesta por Newton establece que entre dos cuerpos<sup>12</sup> cualesquiera se produce una fuerza gravitatoria de atracción, proporcional al producto de las masas respectivas y al inverso del cuadrado de la distancia entre los mismos. La expresión de esta fuerza, en módulo, es

$$F = G \frac{Mm}{r^2},$$

y en forma vectorial

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1.3)$$

---

<sup>11</sup>No debe originar confusión la existencia de dos unidades con el mismo nombre para caracterizar magnitudes distintas: el kg de masa, y el kg de fuerza o kilopondio (kp), definido como el peso de 1 kg de masa en la superficie de la tierra, considerando un valor medio constante de la aceleración de la gravedad (1 kg fuerza  $\simeq$  9,81 N). Ello permite hablar —afortunadamente para los tenderos, fruteros, pescaderos y demás gremios poco interesados en la filosofía de la mecánica durante su quehacer cotidiano— simplemente de kg, sin necesitar especificar si se trata de masa o de peso, ya que en la superficie de la tierra ambos son equivalentes, al menos en una primera aproximación en que  $g$  se suponga constante.

<sup>12</sup>Debe entenderse «cuerpo» en el sentido de partícula, tal y como emplea Newton este término (pág. 1.9).

donde  $\mathbf{F}$  representa la fuerza ejercida por la masa  $M$  sobre  $m$ , y  $\mathbf{r}$  es el vector que las une, con origen en  $M$  y extremo en  $m$ .

En la mecánica clásica, la fuerza gravitatoria es una acción a distancia que, de manera muy aproximada, podemos suponer se transmite de forma instantánea, sin necesitar de ningún medio material para ello. Así, cada masa  $M$  crea un campo de fuerzas gravitatorio, campo vectorial caracterizado en cada punto por una intensidad  $\mathbf{i}$ :

$$\mathbf{i} \stackrel{\text{def}}{=} -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r};$$

La fuerza ejercida sobre un cuerpo de masa  $m$  será el producto de ésta por la intensidad del campo,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{i} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}.$$

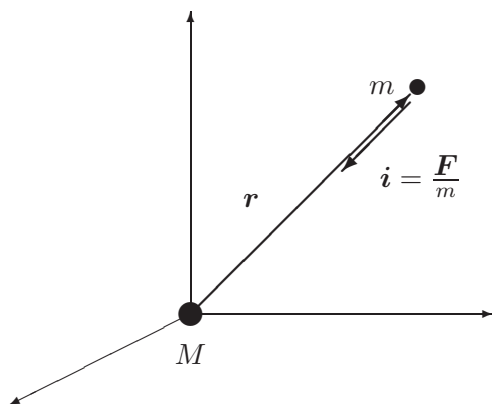


Figura 1.3: *Atracción gravitatoria entre dos masas  $M$  y  $m$ , situadas a distancia  $r$*

La teoría de la relatividad general elimina las fuerzas gravitatorias; para ello, interpreta el efecto de las masas como una modificación a la métrica espacio-tiempo, que resulta ser Riemanniana en lugar de Euclídea. Así, en esta nueva métrica, las trayectorias de las partículas corresponden a las geodésicas del espacio-tiempo, que vendrían a ser las ecuaciones horarias del movimiento<sup>13</sup>.

<sup>13</sup>En la mecánica clásica la trayectoria seguida por una partícula sometida a la acción gravitatoria de otra es una cónica, como se verá en el capítulo 5. Podríamos plantearnos, en la teoría de la relatividad general, qué trayectoria seguiría un cuerpo en un universo homogéneo, pero en cualquier caso no resulta ser una cónica. En un caso sencillo, con una única masa aislada, la métrica de Schwarzschild creada por ésta conduce a órbitas que no se cierran, lo que puede explicar algunos fenómenos bien conocidos como el corrimiento del perihelio de Mercurio.



### 1.6.1. Masa gravitatoria y masa inerte.

En principio, el concepto de masa que interviene en la ley de la gravitación no tendría porqué coincidir con la masa empleada para la ley II de Newton; en el primer caso sirve para definir la fuerza gravitatoria, mientras que en el segundo define la fuerza de inercia. Podemos distinguirlas por tanto denominándolas  $m_g$  (masa gravitatoria) y  $m_i$  (masa inerte).

Existe, sin embargo, una observación experimental: en la superficie de la tierra todos los cuerpos caen en el vacío hacia el suelo con la misma aceleración ( $g$ ). Sea un cuerpo cualquiera en la superficie de la tierra; su peso es

$$w = G \frac{M_g m_g}{R^2},$$

donde  $M_g$  y  $m_g$  son las masas respectivas (gravitatorias) de la Tierra y del cuerpo,  $R$  es el radio de la tierra (suponemos el cuerpo a una altura  $h$  pequeña, por lo que  $R + h \approx R$ ), y  $G$  es la constante de la gravitación universal.

Empleando la segunda ley de Newton, se puede relacionar el peso con la aceleración que experimenta el cuerpo:

$$w = m_i g,$$

siendo  $m_i$  la masa (inercial) del mismo. Igualando ambas expresiones de  $w$  se obtiene:

$$\frac{m_i}{m_g} = \frac{M_g G}{\underbrace{g R^2}_{\text{constante}}}.$$

Así, el cociente  $m_i/m_g$  permanece constante. Ya que  $G$  es una constante cuyo valor puede ser cualquiera, es posible elegir el mismo de forma que este cociente sea la unidad. De esta forma, ambas masas tendrían siempre igual valor:

$$m_i \equiv m_g.$$

Para ello, el valor de la constante de la gravitación universal ha de ser

$$G = \frac{g R^2}{M}.$$

**Consideraciones sobre el universo.**— Supongamos que el universo tiene un tamaño finito, y que, de forma aproximada, se puede idealizar como una esfera, con una distribución de masa de densidad media  $\rho$ . Sea un

cuerpo de masa  $m$ , situado a una distancia  $R$  del centro de dicha esfera; este experimentaría una fuerza atractiva hacia el centro del universo de valor:

$$F = \underbrace{\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right)}_{\text{masa esfera}} \frac{mG}{R^2} = \frac{4}{3}\pi \rho mGR.$$

Así, todos los cuerpos del universo experimentarían una aceleración hacia el centro de aquél de valor creciente proporcionalmente a su distancia  $R$ . Si esto fuese así, desde un punto distinto del centro del universo se observaría un movimiento diferente de las estrellas y galaxias según las distintas direcciones de observación; en la dirección del radio creciente, la aceleración sería mayor, mientras que en la opuesta disminuiría. Sin embargo, esto no parece concordar con las observaciones experimentales medidas desde la Tierra.

¿Cómo se puede explicar esto, admitiendo que el universo es finito? Una posible explicación sería una teoría «antropocéntrica», según la que el planeta Tierra tendría el inmenso privilegio de estar situado justo en el centro del universo. De esta forma, nuestras observaciones deberían ser iguales en cualquier dirección, ya que todas serían radiales. Sin embargo, fuera de creencias pseudo-religiosas, la teoría antropocéntrica parece poco probable. Más bien, la observación anterior podría explicarse por una de las siguientes dos hipótesis:

1. El universo es homogéneo, isótropo e infinito. Sin embargo, esta suposición es incompatible con la teoría, generalmente aceptada en la actualidad, del «Big-Bang» como origen del universo. Esta primera explosión primigenia ocurrió al parecer hace unos diez mil millones de años, lo que establece un límite para el tamaño del universo.
2. El universo es finito, pero con una métrica no euclídea, en la que todos los puntos pueden considerarse el centro de los demás. Esta última hipótesis es la que parece más plausible, quedando por discutir el tipo de métrica, para lo cual existen a su vez distintas teorías.

E. Mach interpretó la acción gravitatoria del resto del universo como responsable de la inercia de los cuerpos. Así, sería la masa del universo lejano la encargada de mantener un cuerpo con velocidad uniforme y rectilínea o en reposo ante la ausencia de otras fuerzas cercanas. Esto podría ser una bonita teoría, pero Mach lo dejó planteado tan sólo como una especulación, que carece de una justificación rigurosa.

**Tipos de fuerzas en el universo.**— Las fuerzas gravitatorias no son las únicas que existen en el universo físico. De forma esquemática se pueden distinguir cuatro tipos fundamentales de fuerzas, siendo las demás manifestaciones macroscópicas de éstas.

1. *Fuerzas gravitatorias.* Aunque en la mecánica clásica se consideran como acciones a distancia, de propagación instantánea, en la realidad parece que se propagan con velocidad finita. Esta propagación se realiza mediante las llamadas ondas gravitatorias. En la interpretación dual onda/corpúsculo equivalen a las partículas llamadas Gravitones<sup>14</sup>.
2. *Fuerzas electromagnéticas.* Están gobernadas por las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético. Se propagan mediante las Ondas electromagnéticas, que incluyen la luz, ondas de radio, etc. Las partículas equivalentes son los Fotones.
3. *Fuerzas nucleares fuertes.* Son las fuerzas que unen a las partículas en el núcleo atómico. Intervienen únicamente en la mecánica cuántica. Están asociadas a las partículas denominadas Gluones.
4. *Fuerzas nucleares débiles.* Son las fuerzas que intervienen en la desintegración nuclear. Asimismo intervienen en la mecánica cuántica, y las partículas asociadas son los Bosones.

La publicación por Newton de los «Principia» con la teoría de la gravitación universal supuso en su tiempo un avance importante para la mecánica y para las matemáticas, al interpretar de forma coherente y unificada dos tipos de fenómenos que antes se consideraban obedecientes a leyes distintas: el movimiento de los objetos terrestres y el de los objetos celestes. De manera similar, se busca hoy en día, por parte de los físicos teóricos y matemáticos, una *teoría unificada* que permita explicar, a partir de una causa común, los cuatro tipos de fuerzas que se observan en el universo. Sin embargo, es de prever que esta teoría, aún en el improbable caso de poderse obtener, sería mucho más compleja y engorrosa de utilizar que la mecánica clásica o los métodos newtonianos. Por ello, aún en la hipótesis de que se logre algún avance importante en esta línea, es improbable que tenga repercusiones prácticas en la mecánica aplicada a la ingeniería, campo que nos ocupa y en el cual la mecánica clásica seguirá teniendo plena vigencia.

---

<sup>14</sup>Aunque se han establecido diversos experimentos para detectar las ondas gravitatorias, aún no se han llegado a medir de forma fehaciente, debido a su intensidad extremadamente baja.

