

# Capítulo 10

## Dinámica de impulsiones

### 10.1. Introducción

La dinámica de impulsiones estudia las situaciones en las que se producen cambios rápidos en la cantidad de movimiento o en el momento cinético de sistemas materiales. Estos fenómenos se suelen denominar *impactos*, *percusiones* o *choques*, y exigen fuerzas muy elevadas, que actúan durante intervalos de tiempo muy cortos. Ello permite que, al estudiar los cambios de movimiento debidos a la impulsión, se puedan despreciar las otras fuerzas “ordinarias” de valor acotado, por ser su efecto muy pequeño respecto al de las fuerzas impulsivas.

En la dinámica de impulsiones para sistemas discretos<sup>1</sup> se admite que el cambio de movimiento puede ser considerado como instantáneo, de forma que se estudia tan sólo el salto entre la situación inmediatamente anterior y la inmediatamente posterior a la impulsión. Se emplea un modelo simplificado, en el que se desprecian los efectos de deformabilidad de los sólidos y de transmisión de ondas de tensión en los mismos, pero que puede resultar válido siempre que las condiciones se aproximen a las de una impulsión teórica (intervalo de tiempo muy corto y fuerzas muy elevadas).

---

<sup>1</sup>es decir, aquellos que se representan mediante un número finito (discreto) de parámetros, como las partículas, conjuntos de partículas, sólidos rígidos, y mecanismos o ensamblajes de piezas rígidas. Por el contrario, *los medios continuos* (fluidos, sólidos deformables, estructuras de piezas prismáticas o laminares) poseen un número infinito de grados de libertad

## 10.2. Teoría de impulsiones

### 10.2.1. Impulsión sobre una partícula

Consideramos una partícula (punto material) de masa  $m$ , con velocidad  $v_1$  en el instante inmediatamente anterior a la impulsión y  $v_2$  en el instante inmediatamente después, moviéndose según una recta. Se trata por tanto de un sistema con un sólo grado de libertad.

Suponemos asimismo que se produce una fuerza impulsiva que actúa durante un intervalo de tiempo pequeño  $[\tau - \epsilon, \tau + \epsilon]$ , centrado en el instante  $\tau$ .

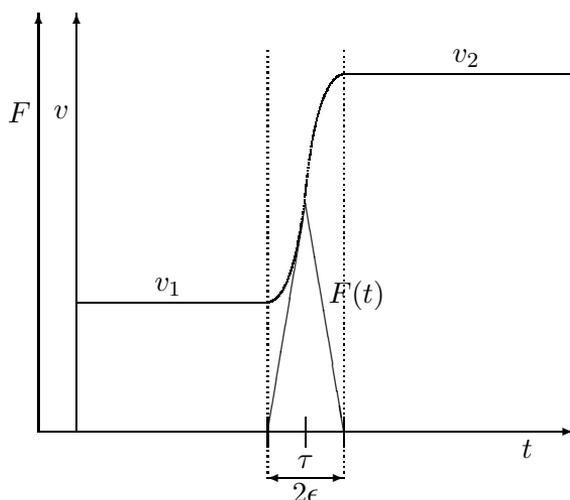


Figura 10.1: La variación de las velocidades en una impulsión se produce en un intervalo de tiempo  $[\tau - \epsilon, \tau + \epsilon]$  muy breve, asociado a una fuerza de tipo impulsivo de valor máximo elevado.

Definimos la *impulsión* como el incremento de la cantidad de movimiento de la partícula debido a esta fuerza:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} mv_2 - mv_1 = \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} F dt$$

Podemos generalizar esta definición a un movimiento no rectilíneo, en el cual se produzca también una variación de la velocidad en dirección, mediante la expresión vectorial:

$$\mathbf{I} \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \mathbf{F} dt \quad (10.1)$$

En la teoría de impulsiones se adopta la hipótesis de que la duración del intervalo de la impulsión ( $2\epsilon$ ) es muy breve, pudiendo considerarse el fenómeno como prácticamente instantáneo. Al mismo tiempo se admite que

la integral (10.1) conserva un valor finito para la impulsión. Para que esto ocurra, el módulo de la fuerza impulsiva  $\mathbf{F}$  debe ser muy alto, mucho mayor que las fuerzas ordinarias, y en el límite de impulsión instantánea ( $\epsilon \rightarrow 0$ ), infinito ( $F \rightarrow \infty$ ).

### 10.2.2. Fuerzas impulsivas; función delta de Dirac

Las fuerzas impulsivas que verifican las hipótesis de la teoría de impulsiones se pueden describir mediante un formalismo matemático que emplea la función delta de Dirac. Esta función  $\delta(t)$  se define de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad \delta(t) = 0 \quad \text{para todo } t \neq 0 \\ 2. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{array} \right. \quad (10.2)$$

Estas condiciones implican que para  $t \rightarrow 0$ ,  $\delta(t) \rightarrow \infty$ .

También deducimos de ellas que la integral vale 1 cuando se extiende a cualquier intervalo finito que comprenda el punto  $t = 0$ :

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(t) dt = 1 \quad (10.3)$$

Como corolario, podemos afirmar que para cualquier función acotada  $f(t)$  se cumple

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - \tau) dt = f(\tau). \quad (10.4)$$

Esto se demuestra fácilmente, puesto que al ser nulo  $\delta(t - \tau)$  salvo en el punto  $t = \tau$ , podemos sustituir en (10.4)  $f(t)$  por la constante  $f(\tau)$ , que sale fuera de la integral; empleando la propiedad (10.3), se obtiene directamente el resultado buscado.

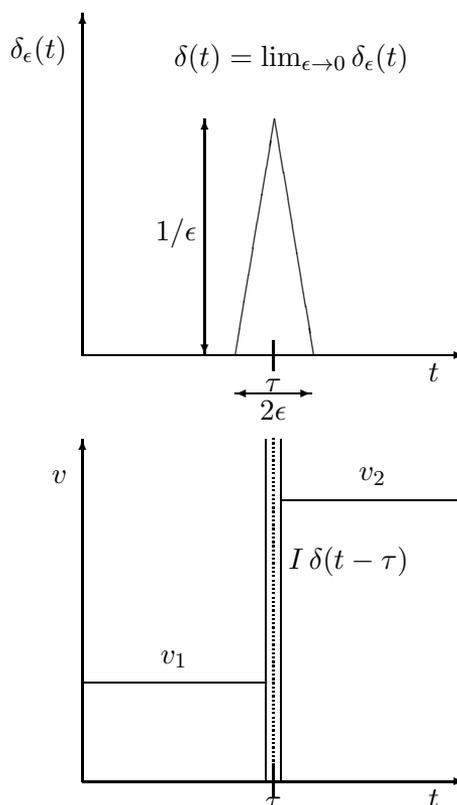
Definimos la fuerza impulsiva que produce la impulsión  $\mathbf{I}$  en el instante  $\tau$  como

$$\boxed{\mathbf{F}^{imp}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I} \delta(t - \tau)} \quad (10.5)$$

En virtud de (10.4) la integral de esta fuerza sobre cualquier intervalo que contenga el instante  $\tau$  será precisamente la impulsión  $\mathbf{I}$ . Asimismo, la fuerza tiene valor nulo para cualquier otro instante  $t \neq \tau$ .

En el estudio de los fenómenos impulsivos distinguiremos entre dos clases de fuerzas, las *fuerzas impulsivas*  $\mathbf{F}^{imp}$ , causantes de la variación “impulsiva” del movimiento, y las *fuerzas ordinarias*,  $\mathbf{F}^{ord}$ .

Figura 10.2: La función  $\delta$  de Dirac permite representar la fuerza impulsiva como  $F(t) = I \delta(t - \tau)$ , de forma que se produce un salto  $I$  de la cantidad de movimiento en el instante  $\tau$ .



Fuerzas ordinarias son aquellas cuyo efecto durante el breve intervalo de la impulsión es despreciable frente a las impulsivas. Para tener efectos apreciables en el movimiento, necesitan intervalos de tiempo mayores (un ejemplo es el peso o acción gravitatoria).

Esta distinción es claramente relativa, e imposible de cuantificar de manera exacta. La teoría de impulsiones no es por tanto absolutamente exacta, sino que constituye un modelo aproximado, que será más preciso cuanto más nítida sea la distinción entre ambos tipos de fuerzas.

El papel de las fuerzas ordinarias en una impulsión se puede establecer calculando la integral del impulso:

$$\int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} [\mathbf{F}^{imp}(t) + \mathbf{F}^{ord}(t)] dt$$

Por la definición de  $\mathbf{F}^{imp}$  (10.5), la integral anterior valdrá:

$$\int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \mathbf{I} \delta(t - \tau) dt + \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \mathbf{F}^{ord}(t) dt = \mathbf{I} + \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \mathbf{F}^{ord}(t) dt \quad (10.6)$$

Al estar  $\mathbf{F}^{ord}(t)$  acotada, el impulso debido a ellas se hace despreciable si  $\epsilon \rightarrow 0$ , mientras que el efecto de las fuerzas impulsivas se mantiene finito.

### 10.2.3. Axiomática

En función de los conceptos anteriores, se puede definir una axiomática para las impulsiones como sigue.

- *Principio de acción y reacción.*

Por cada impulsión  $\mathbf{I}$  existe otra impulsión reactiva ( $-\mathbf{I}$ ), igual y de sentido contrario. Este axioma proviene directamente de generalizar el principio de acción y reacción para las fuerzas.

- *Impulsiones exteriores e interiores.*

Las impulsiones se consideran interiores si ambas (activa y reactiva) se ejercen sobre puntos que pertenecen al sistema; si la impulsión actúa entre una partícula del sistema y otras externas a él, se llama exterior. En este caso, la reacción está fuera del sistema, mientras que si es interior tanto acción ( $\mathbf{I}$ ) como reacción ( $-\mathbf{I}$ ) se producen sobre el sistema, siendo la impulsión neta nula.

- *Aditividad Vectorial*

El efecto de dos o más impulsiones simultáneas es igual al de su suma vectorial, como vectores deslizantes. El concepto de simultaneidad hay que matizarlo, pues en la práctica es imposible que dos impulsiones ocurran de forma exactamente simultánea. Se consideran simultáneas las impulsiones si actúan con una diferencia de tiempo del orden del intervalo real de actuación de las fuerzas impulsivas.

### 10.2.4. Teorema fundamental

Basándose en la axiomática arriba expuesta, podemos considerar los siguientes sistemas de vectores deslizantes:

- $\Sigma_1$  Cantidades de movimiento de cada partícula antes del choque.
- $\Sigma_2$  Cantidades de movimiento después del choque.
- $\Pi$  Impulsiones sobre cada partícula (interiores y exteriores).

La igualdad vectorial establecida en la definición de la impulsión sobre una partícula nos permite establecer la equivalencia siguiente entre sistemas de vectores deslizantes:

$$m\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}_1 + \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Sigma_2 \equiv \Sigma_1 + \Pi}$$

Donde el signo + de la fórmula recuadrada indica la composición de sistemas de vectores deslizantes.

Puesto que las impulsiones interiores, por el principio de acción y reacción, forman un sistema nulo, el *Teorema fundamental* de la dinámica de impulsiones permite expresar la equivalencia como:

$$\boxed{\Sigma_2 \equiv \Sigma_1 + \Pi_{ext}} \quad (10.7)$$

Donde  $\Pi_{ext}$  es el sistema de vectores deslizantes que sólo incluye las impulsiones exteriores.

La aplicación del teorema fundamental (10.7) se hace a través de las igualdades de resultante y momentos, como criterio para la equivalencia de sistemas de vectores deslizantes:

$$\Sigma_2 \equiv \Sigma_1 + \Pi_{ext} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{\Phi}_2 = \mathbf{\Phi}_1 + \sum \mathbf{I}^{ext} \\ (\mathbf{H}_O)_2 = (\mathbf{H}_O)_1 + \sum \mathbf{r} \wedge \mathbf{I}^{ext} \end{cases} \quad (10.8)$$

Donde  $\mathbf{\Phi}$  y  $\mathbf{H}_O$  son respectivamente la cantidad de movimiento y el momento cinético totales del sistema.

Las ecuaciones de equivalencia (10.8) son condiciones necesarias que ha de verificar el sistema de vectores deslizantes  $\Sigma_2$ , pero no constituyen en un caso general un conjunto suficiente de condiciones para determinar  $\Sigma_2$ . Para comprender esto basta darse cuenta de que se trata de 6 ecuaciones escalares, y siempre que el sistema tenga mayor número de grados de libertad, serán precisas ecuaciones adicionales.

Como criterio práctico, las ecuaciones (10.8) no serán suficientes si existen grados de libertad o movimientos relativos internos permitidos en el sistema. En este caso, sería necesario dividirlo en subsistemas para establecer las ecuaciones adicionales necesarias, aplicando la equivalencia (10.8) en cada subsistema.

Al contrario que en las ecuaciones de la dinámica, el punto  $O$  en el que se toman los momentos en (10.8) puede ser un punto geométrico cualquiera, puesto que en estas ecuaciones no interviene el tiempo, sino que se plantea únicamente la equivalencia de sistemas de vectores deslizantes en un instante dado. No existe por tanto la restricción de que el punto sea fijo, como

veíamos en dinámica de sistemas para el teorema del momento cinético. Ahora bien, es necesario tener precaución a la hora de evaluar el momento cinético si el punto no tiene velocidad nula, no pudiéndose aplicar entonces algunas de las fórmulas usuales (ver apartado 11.4.2).

### 10.2.5. Aplicación del principio de los trabajos virtuales

Puesto que el sistema  $(\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Pi)$  es un sistema nulo, la impulsión se puede plantear como un problema de equilibrio, pudiendo aplicar por tanto el principio de los trabajos virtuales enunciado en el apartado 6.4.1. Tal y como se observó entonces, la ventaja más importante de este principio consiste en que establece una condición necesaria y suficiente para el equilibrio global de un sistema, sin necesidad de considerar las fuerzas de reacción que no realizan trabajo virtual. Buscaremos aquí por tanto la misma ventaja, de forma que se puedan eliminar de la expresión de equilibrio las impulsiones debidas a los vínculos lisos y permanentes.

Suponemos un sistema general sometido a un conjunto de impulsiones  $\{\mathbf{I}_i\}$ ; para cualquier conjunto de velocidades virtuales  $\{\mathbf{v}_i^*\}$  se ha de cumplir

$$\sum_i (m_i \Delta \mathbf{v}_i - \mathbf{I}_i) \cdot \mathbf{v}_i^* = 0 \quad \forall \{\mathbf{v}_i^*\} \quad (10.9)$$

Donde el sumatorio  $\sum_i$  se extiende a todas las partículas del sistema. Si las velocidades virtuales  $\mathbf{v}_i^*$  en (10.9) son completamente arbitrarias, en esta suma se deben incluir todas las impulsiones, tanto internas como externas, activas y reactivas. Esto es debido a que, en un caso general, aunque para cada percusión interna exista otra reactiva, de forma que su suma neta es nula, el trabajo virtual de las dos no lo es necesariamente. Supongamos para ello una percusión  $\mathbf{I}$  sobre una partícula  $A$ , con velocidad virtual  $\mathbf{v}^*$ , y la reacción  $-\mathbf{I}$  sobre  $B$  con velocidad virtual  $-\mathbf{v}^*$ . El trabajo virtual de esta pareja de impulsiones es

$$W^* = \mathbf{I} \cdot \mathbf{v}^* + (-\mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{v}^*) = 2\mathbf{I} \cdot \mathbf{v}^* \neq 0$$

Debido a esto, el enunciado más general del Principio de Trabajos Virtuales (10.9), para velocidades virtuales  $\{\mathbf{v}_i^*\}$  completamente arbitrarias, no resulta de gran utilidad práctica.

Si restringimos el sistema a uno con vínculos lisos y bilaterales, de forma que todas las impulsiones interiores se deban a vínculos permanentes, y consideramos tan sólo velocidades virtuales compatibles con los enlaces  $\{\mathbf{v}_i^*\}$ , es posible eliminar el efecto de las impulsiones interiores:

$$\sum_i (m_i \Delta \mathbf{v}_i - \mathbf{I}_i^{ext}) \cdot \mathbf{v}_i^* = 0 \quad \forall \{\mathbf{v}_i^*\} \text{ compatibles} \quad (10.10)$$

Tan sólo necesitamos tener en cuenta en este enunciado las impulsiones externas, al desaparecer las internas porque no realizan trabajo virtual. No desaparecerían, en cambio, las impulsiones debidas a choques internos con separación (vínculos no permanentes), puesto que las velocidades virtuales del punto de acción y del de reacción no serán necesariamente las mismas, y por tanto pueden dar trabajo virtual neto no nulo. En caso de existir estas impulsiones, no invalidarían la aplicación de (10.10), sino que habría que introducirlas como sumandos adicionales en la expresión del trabajo virtual en dicha ecuación.

### 10.2.6. Aplicación del principio de la cantidad de movimiento

El principio de la Cantidad de Movimiento (6.4) establece que, para un sistema cuya cantidad de movimiento es  $\Phi$ ,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i^{ext}}_{\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}}$$

Descomponiendo las fuerzas exteriores en impulsivas y ordinarias, e integrando para una impulsión que ocurra en el instante  $t = \tau$ :

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \left( \sum_i \mathbf{F}_i^{imp} + \sum_i \mathbf{F}_i^{ord} \right) dt \quad (10.11)$$

$$= \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \left( \sum_i \mathbf{I}_i^{ext} \delta(t - \tau) \right) dt + \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \left( \sum_i \mathbf{F}_i^{ord} \right) dt \quad (10.12)$$

despreciando, para  $\epsilon \rightarrow 0$ , el efecto de  $\sum_i \mathbf{F}_i^{ord}$ , resulta la ecuación de balance

$$\boxed{\Phi_2 - \Phi_1 = \sum_i \mathbf{I}_i^{ext}} \quad (10.13)$$

Observamos que el resultado es el mismo que el obtenido antes en (10.8<sub>1</sub>).

### 10.2.7. Aplicación del principio del momento cinético

La expresión de este principio es (6.12):

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \underbrace{\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext}}_{\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}_O}$$

Integramos esta expresión descomponiendo  $\mathbf{F}_i^{ext}$  en Fuerzas impulsivas ( $\mathbf{F}_i^{imp}$ ) y Fuerzas ordinarias ( $\mathbf{F}_i^{ord}$ ), ambas exteriores:

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1 &= \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \left[ \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{imp} + \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ord} \right] dt \\ &= \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \wedge \left[ \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \mathbf{I}_i^{ext} \delta(t - \tau) dt + \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \mathbf{F}_i^{ord} dt \right], \quad (10.14) \end{aligned}$$

siendo  $\bar{\mathbf{r}}_i$  la posición media de cada partícula durante la impulsión. La primera integral es precisamente la impulsión, mientras que la segunda es despreciable para  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\boxed{(\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1 = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{I}_i^{ext}} \quad (10.15)$$

Donde  $\bar{\mathbf{r}}_i$  ha sido sustituido por  $\mathbf{r}_i$  (Posición de cada partícula en el instante  $\tau$ ), al tender el intervalo  $[\tau - \epsilon, \tau + \epsilon]$  a cero. Observamos, al igual que antes, que se obtiene idéntico resultado que el expresado en (10.8<sub>2</sub>).

Esta ecuación, al contrario que (6.12) para el caso general de la dinámica, se puede aplicar también tomando momentos respecto de un punto que no sea fijo. En efecto, se vió en el apartado 6.3 que al tomar un punto  $Q$  cualquiera aparecía un término adicional en la ecuación del momento cinético (6.23):

$$\frac{d\mathbf{H}_Q}{dt} = \mathbf{M}_Q - M\mathbf{v}_Q \wedge \mathbf{v}_G$$

Sin embargo, el término adicional  $M\mathbf{v}_Q \wedge \mathbf{v}_G$  está acotado, al estarlo las velocidades de los dos puntos  $G$  y  $Q$ , y se puede englobar por tanto dentro de las fuerzas ordinarias, cuyos efectos de cambio de movimiento durante la percusión se desprecian por ser el intervalo de actuación infinitesimal.

## 10.3. Consideraciones energéticas

### 10.3.1. Energía cinética

Por lo general en una impulsión no se conserva la energía. El cambio energético proviene exclusivamente de la variación de la energía cinética, puesto que la energía potencial, al no variar la configuración del sistema sensiblemente durante un intervalo infinitesimal, sí que se conserva.

De forma global, el balance energético es tal que la energía mecánica disminuye, o a lo sumo se mantiene constante. La disminución proviene

físicamente de la transformación a otras formas de energía más “degradadas”, como calor, ruido, dislocaciones plásticas, etc., siguiendo el segundo principio de la termodinámica (entropía creciente).

Dentro de un sistema dado, para el balance de energía se pueden distinguir dos situaciones diferentes:

- Si sólo hay impulsiones interiores, la energía disminuye siempre o a lo sumo se conserva.
- Si hay impulsiones exteriores, la energía puede aumentar o disminuir. El aumento se produce a costa de que el sistema “robe” energía cinética del exterior: en conjunto debe quedar claro que nunca puede aumentar la energía.

En las impulsiones no ocurre lo mismo que en la dinámica, en la que el teorema de conservación de la energía tenía considerable utilidad práctica. Esto se debía a que permitía pasar de un estado a otro, obviando la (a menudo difícil) integración de las ecuaciones diferenciales de segundo orden de la dinámica, a lo largo de un camino cambiante. Para ello bastaba emplear la ecuación de balance energético que se denominaba “integral primera”, al formularse en función únicamente de derivadas primeras (velocidades).

En cambio, en la dinámica impulsiva, esta utilidad se pierde, por dos razones:

1. Por lo general, la energía no se conserva.
2. Las configuraciones anterior y posterior al choque son las mismas, por lo que no es preciso realizar una integración de las ecuaciones dinámicas para una trayectoria desconocida, sino expresar un mero balance de magnitudes cinéticas entre las situaciones anterior y posterior al choque, para una misma configuración.

Por estos motivos, hacemos notar que las consideraciones que se realizan a continuación tienen un interés más bien conceptual. Son importantes sin embargo para comprender el balance energético de las percusiones. Asimismo, en numerosas aplicaciones prácticas se puede conocer o estimar el llamado “coeficiente de restitución”, que como veremos está íntimamente ligado al balance energético.

Relacionaremos a continuación la pérdida de energía con el valor de las impulsiones. Para una partícula de masa  $m$ , denotando la velocidad por  $\mathbf{v}$  y la energía cinética por  $T$ , con los subíndices 1 y 2 para indicar las

situaciones anterior y posterior al choque respectivamente, la variación de energía cinética es

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{I} \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) \end{aligned}$$

Sumando para todas las partículas del sistema,

$$\boxed{T_2 - T_1 = \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{I}_i \cdot [(\mathbf{v}_i)_2 + (\mathbf{v}_i)_1]} \quad (10.16)$$

Si todas las impulsiones interiores provienen de vínculos permanentes (es decir, partículas que estaban unidas antes de la impulsión y permanecen unidas), los términos del sumatorio (10.16) debidos a ellas se anulan dos a dos, ya que ocurren en parejas del tipo

$$(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{I} + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) \cdot (-\mathbf{I}) = 0$$

Resulta por tanto bajo esta hipótesis

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{I}_i^{ext} \cdot [(\mathbf{v}_i)_2 + (\mathbf{v}_i)_1] \quad (10.17)$$

### 10.3.2. Coeficiente de restitución

Estudiamos dos cuerpos que chocan a través de sus puntos  $P$  y  $Q$  respectivamente. Sean las velocidades de dichos puntos  $\mathbf{v}_P^1$  y  $\mathbf{v}_Q^1$  (antes del choque) y  $\mathbf{v}_P^2$ ,  $\mathbf{v}_Q^2$  (después del choque). Admitiremos la hipótesis de que las ligaduras internas en cada cuerpo cumplen que son todas debidas a vínculos permanentes, lo que es válido por ejemplo en un sólido rígido. En el choque se produce una impulsión  $\mathbf{I}$  sobre  $P$ , dirigida según el vector unitario  $\mathbf{d}$  ( $\mathbf{I} = I\mathbf{d}$ ), y la correspondiente impulsión reactiva ( $-\mathbf{I}$ ) sobre  $Q$ .

Definimos:

*Coeficiente de restitución es el cociente, cambiado de signo, de las velocidades relativas de los puntos de impacto después y antes del choque, en la dirección de la impulsión:*

$$e \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{(\mathbf{v}_P^2 - \mathbf{v}_Q^2) \cdot \mathbf{d}}{(\mathbf{v}_P^1 - \mathbf{v}_Q^1) \cdot \mathbf{d}} = -\frac{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{d}} \quad (10.18)$$

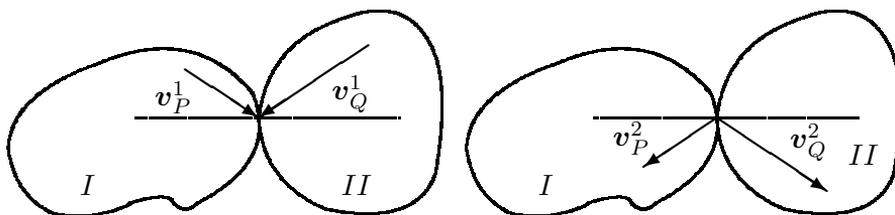


Figura 10.3: Choque entre dos cuerpos I y II a través de sus puntos P y Q respectivamente; situaciones inmediatamente anterior y posterior al choque.

Donde  $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1$  son las velocidades relativas después y antes del choque, respectivamente.

El coeficiente de restitución lo podemos relacionar con la pérdida de energía cinética del sistema conjunto. Para ello expresemos el balance energético global. Para el cuerpo I:

$$\Delta T_I = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_P^1 + \mathbf{v}_P^2) \cdot \mathbf{I}$$

y para el cuerpo II:

$$\Delta T_{II} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_Q^1 + \mathbf{v}_Q^2) \cdot (-\mathbf{I})$$

En estas expresiones se ha aplicado (10.17), que permite considerar tan sólo las impulsiones exteriores:  $\mathbf{I}$  sobre el cuerpo I y  $-\mathbf{I}$  sobre el II. Sin embargo, la evaluación de  $\Delta T_I$  y  $\Delta T_{II}$  corresponde a la energía cinética total de cada sólido, incluyendo la de rotación. Sumando ambas contribuciones,

$$\Delta T = \frac{1}{2}[(\mathbf{v}_P^1 - \mathbf{v}_Q^1) + (\mathbf{v}_P^2 - \mathbf{v}_Q^2)] \cdot \mathbf{I} \quad (10.19)$$

$$= \frac{1}{2}[\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{d} + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{d}] \mathbf{I} \quad (10.20)$$

y considerando, por la definición (10.18) del coeficiente de restitución, que  $\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{d} = -e(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{d})$ , resulta

$$\Delta T = \frac{1}{2} \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{I} (1 - e) \quad (10.21)$$

Para clarificar la aplicación de esta fórmula recordemos que  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_P^1 - \mathbf{v}_Q^1$  (velocidad relativa de P respecto de Q antes del choque) e  $\mathbf{I}$  es la impulsión que se produce sobre el punto P.

Según el valor de  $e$  diferenciamos varios tipos de choque:

- $e = 1$ , choque elástico ( $\Delta T = 0$ ).
- $e = 0$ , choque plástico ( $\Delta T = \frac{1}{2} \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{I}$ , máxima pérdida de energía cinética).  
Conviene precisar que, a pesar de que la pérdida de energía sea la máxima, en general no se pierde toda la energía cinética inicial ( $\Delta T \neq T_1$ ).
- $0 < e < 1$ , caso intermedio.

La expresión del coeficiente de restitución tiene por tanto un significado en términos de balance energético. Para resolver una impulsión es preciso por lo general plantear, además de las ecuaciones (10.13) y (10.15) que expresan balance de cantidad de movimiento y de momento cinético, alguna ecuación que exprese el balance energético, como la del coeficiente de restitución (10.18). Esta última condición se podría establecer igualmente expresando directamente la pérdida de energía cinética

$$\Delta T = T_2 - T_1. \quad (10.22)$$

Sin embargo es preferible emplear para esto las ecuaciones (10.18) ó (10.21) del coeficiente de restitución, ya que éstas proporcionan expresiones lineales en las velocidades, en lugar de expresiones cuadráticas como surge de (10.22).

### 10.3.3. Teorema de Carnot

Este teorema expresa la pérdida de energía para un caso particular: aquel en que el sistema sea holónimo con vínculos lisos, y las impulsiones se deban exclusivamente a la aparición de nuevos vínculos interiores permanentes.

Partimos para ello del principio de trabajos virtuales, que se puede aplicar con su enunciado restringido (10.10) debido a las hipótesis realizadas:

$$\sum_i (m_i \Delta \mathbf{v}_i - \mathbf{I}_i^{ext}) \cdot \mathbf{v}_i^* = 0, \quad \forall \{\mathbf{v}_i^*\} \text{ compatibles}$$

Al no haber impulsiones exteriores,  $\mathbf{I}_i^{ext}$  desaparece:

$$\sum_i m_i \Delta \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i^* = 0$$

Esta relación se cumple para velocidades virtuales  $\mathbf{v}_i^*$  cualesquiera, siempre que sean compatibles con los vínculos. En particular, se cumplirá para las

velocidades reales después del choque,  $\mathbf{v}_i^* = \mathbf{v}_{i1} + \Delta\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i2}$ , es decir

$$\sum_i m_i(\mathbf{v}_{i2} - \mathbf{v}_{i1}) \cdot \mathbf{v}_{i2} = 0 \quad (10.23)$$

Considerando la igualdad

$$2 \sum_i m_i(\mathbf{v}_{i1} \cdot \mathbf{v}_{i2}) = - \sum_i m_i(\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i2})^2 + \sum_i m_i v_{i1}^2 + \sum_i m_i v_{i2}^2,$$

desarrollando (10.23) resulta

$$\sum_i m_i v_{i2}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i(\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i2})^2 - \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{i1}^2 - \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{i2}^2 = 0$$

Y por tanto

$$-\frac{1}{2} \sum_i m_i(\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i2})^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{i2}^2 - \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{i1}^2 = T_2 - T_1$$

es decir

$$\boxed{T_2 - T_1 = -\frac{1}{2} \sum_i m_i(\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i2})^2} \quad (10.24)$$

Esta expresión ofrece una interpretación intuitiva muy clara, ya que permite calcular la pérdida de energía cinética como la energía cinética de un sistema (ficticio) en que cada partícula posea precisamente la velocidad que ha perdido,  $(\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i2})$ .

Repetimos la observación realizada arriba sobre las hipótesis restrictivas que es necesario verificar para que se pueda aplicar este teorema. Conviene analizar detalladamente las condiciones de cada problema, verificando que se cumplen las hipótesis enunciadas, antes de aplicarlo. En la práctica, por este motivo el teorema de Carnot tiene una utilidad bastante limitada.

## 10.4. Choque entre sólidos rígidos

### 10.4.1. La deformabilidad de los sólidos

Para explicar los choques y fenómenos impulsivos la teoría de impulsiones entre sistemas discretos (entre los que se hallan los sólidos rígidos), requiere introducir fuerzas impulsivas de contacto de valor infinito. Asimismo, el balance energético se expresa mediante un concepto nuevo, el de coeficiente de restitución.

En la realidad física, las fuerzas de contacto se generan por la deformabilidad de los cuerpos, comenzando en cero y aumentando a medida que las zonas de contacto se comprimen. Aunque pueden alcanzar valores elevados en relación con las fuerzas de naturaleza no impulsiva, obviamente no alcanzan nunca valores “infinitos”. En cualquier caso, tienen limitaciones de tipo físico debido a los límites de rotura de los materiales en contacto o a posibles transformaciones termodinámicas de los mismos (bajo presiones muy elevadas muchos materiales se licúan o incluso se subliman).

La pérdida de energía se explica por uno de los motivos siguientes:

- Energía residual de vibración elástica que permanece en los cuerpos después de separarse. Se trata en realidad de energía cinética y energía potencial elástica, pero para calcularla sería preciso estudiar la dinámica de la impulsión como cuerpos que fuesen deformables, aspecto que se halla fuera del ámbito de este curso.
- Pérdidas por energía plástica disipada, cambios de tipo termodinámico, ruido, calor, etc.

La deformación local en el área de contacto produce unas fuerzas internas en el sólido denominadas *tensiones*. La velocidad con que se transmite la onda de tensión generada en el choque (asociada a una discontinuidad de velocidades) es finita. Por ejemplo, en una barra, la velocidad con la que se propaga es  $c = \sqrt{E/\rho}$  siendo  $E$  el módulo elástico de Young y  $\rho$  la densidad másica.

El cambio de velocidades del sólido no se produce por tanto de forma instantánea, sino de manera gradual, asociado a la propagación de una onda que provoca un salto de velocidades y de tensiones en el material. Esta onda se refleja (“rebota”) en los extremos o bordes de los cuerpos, produciendo en general estados de vibración elástica más o menos complejos.

En ocasiones es imprescindible estudiar de manera detallada la transmisión de ondas de tensión para explicar los fenómenos impulsivos. Como ejemplo, consideramos el caso en que impactan axialmente dos barras homogéneas, una de las cuales se mueve con velocidad  $v$  y la segunda está en reposo. Si ambas barras son de igual longitud  $l$ , al cabo de un tiempo pequeño<sup>2</sup> la primera barra se queda en reposo, mientras que la segunda sale despedida con velocidad  $v$ . En este caso la energía cinética que tenía la primera barra se ha transmitido íntegramente a la segunda barra.

---

<sup>2</sup>este tiempo se puede calcular como el que tardan las ondas elásticas en avanzar hasta el extremo libre y volver al punto de impacto, es decir  $T = 2l/\sqrt{E/\rho}$

En cambio, si las barras son de distinta longitud (por ejemplo  $l$  y  $2l$ ), permanece una porción de la energía en la primera barra, en forma de vibraciones elásticas.

Esto ocurre así a pesar de que localmente el choque se produzca con coeficiente de restitución  $e = 1$ . En este último caso, se observaría, desde el punto de vista del sólido rígido (punto de vista que podríamos denominar “macroscópico”), una pérdida de energía, que en realidad (desde el punto de vista “microscópico”) permanece en el sistema como energía interna de vibración.

### 10.4.2. Caso general de choque entre dos sólidos

Análogamente al planteamiento en la dinámica de las ecuaciones de la cantidad de movimiento y del momento cinético, se debe considerar en una impulsión el balance de dichas magnitudes. Siendo  $\mathbf{v}_G$  la velocidad del centro de masa, el balance de la cantidad de movimiento se expresa como:

$$\sum_i \mathbf{I}_i = \sum_i m_i \Delta \mathbf{v}_i = \overbrace{\left( \sum_i m_i \right)}^M \Delta \mathbf{v}_G$$

Por tanto

$$\boxed{\sum_i \mathbf{I}_i^{ext} = M \Delta \mathbf{v}_G} \quad (10.25)$$

El balance del momento cinético arroja:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{I}_i^{ext} = \Delta \mathbf{H}_G = \mathbf{I}_G \cdot \Delta \boldsymbol{\Omega} + \underbrace{\Delta \boldsymbol{\theta} \wedge (\mathbf{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega})}_{\approx \mathbf{0}}$$

El término complementario del incremento se puede despreciar debido a que la rotación  $\Delta \boldsymbol{\theta}$  producida durante la impulsión es un infinitésimo. Por lo tanto se escribe

$$\boxed{\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{I}_i^{ext} = \mathbf{I}_G \cdot \Delta \boldsymbol{\Omega}} \quad (10.26)$$

La expresión de balance del momento cinético se puede aplicar igualmente si se toman momentos respecto de un punto cualquiera, que no sea ni un punto fijo ( $O$ ) ni el centro de masas ( $G$ ). Tal como se vió en el apartado 10.2.7, es posible aplicar la ecuación (10.15) para establecer el balance en un punto  $Q$  cualquiera

$$\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{I}_i^{ext} = \Delta \mathbf{H}_Q.$$

Ahora bien, conviene precisar que en este caso  $\Delta \mathbf{H}_Q$  no se expresa de la misma manera que como en la ecuación (10.26), en función del tensor de inercia, es decir  $\Delta \mathbf{H}_Q \neq \mathbf{I}_Q \cdot \Delta \boldsymbol{\Omega}$ . La expresión de  $\mathbf{H}_Q$  en un caso general es

$$\mathbf{H}_Q = \mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{G} \wedge M\mathbf{v}_Q \quad (10.27)$$

por lo que, en una impulsión, el incremento sería

$$\Delta \mathbf{H}_Q \approx \mathbf{I}_Q \cdot \Delta \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{G} \wedge M\Delta \mathbf{v}_Q$$

También podríamos haber empleado otras expresiones alternativas de  $\mathbf{H}_Q$  (véase la ecuación (6.14)), si resultan más convenientes, como

$$\mathbf{H}_Q = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} + M\mathbf{v}_G \wedge \mathbf{O}\mathbf{Q} \quad (10.28)$$

$$= \mathbf{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} + M\mathbf{v}_G \wedge \mathbf{G}\mathbf{Q} \quad (10.29)$$

La expresión (10.27) se reduce a la (10.26) si  $Q \equiv G$  (el punto tomado coincide con el centro de masas) o si  $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$  (el punto tomado tiene velocidad nula).

### 10.4.3. Choque directo

Se denomina choque directo aquel en que el vector deslizante que define la impulsión,  $\mathbf{I}$ , se halla sobre la normal común a los sólidos en contacto, en el que se encuentran asimismo los centros de masa respectivos. Para que se cumpla la condición enunciada de normalidad, las superficies han de ser lisas, o bien en caso de no serlo, no deben tener velocidad tangencial relativa los puntos de contacto.

En el choque directo, al no producirse momentos de las impulsiones respecto al centro de masas, basta con estudiar el movimiento de los centros de masas, como si se tratase de impulsiones de partículas.

Sean  $v_{1A}^n$ ,  $v_{1B}^n$ , las velocidades antes del choque de los centros de masa de los dos sólidos  $A$  y  $B$  en dirección de la impulsión (es decir, en dirección normal), y  $v_{2A}^n$ ,  $v_{2B}^n$  las velocidades posteriores al choque. Al estar alineados los centros de masa con la normal, sus velocidades son las mismas que las de los puntos de contacto, por lo que la ecuación del coeficiente de restitución es

$$v_{2A}^n - v_{2B}^n = -e(v_{1A}^n - v_{1B}^n) \quad (10.30)$$

Consideramos sólo las velocidades normales, que son las que cambian. Las velocidades tangenciales a la impulsión,  $v_A^t$  y  $v_B^t$ , se mantienen constantes.

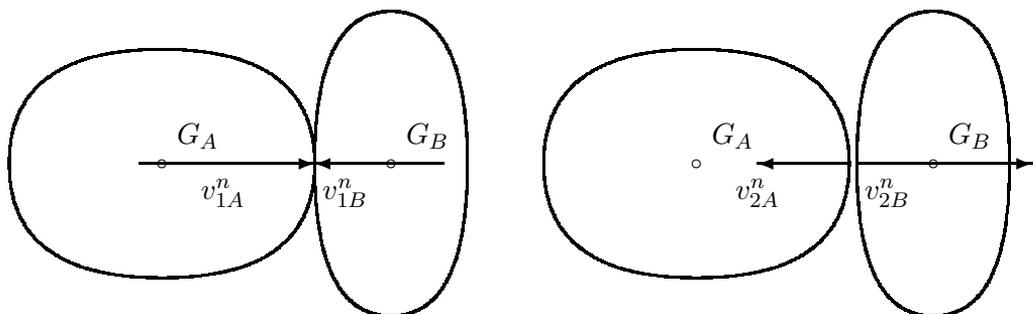


Figura 10.4: Choque directo entre dos sólidos; situación inmediatamente anterior e inmediatamente posterior al choque. Sólo se modifica la velocidad normal de A y B, que coinciden con las velocidades de los centros de masa respectivos, conservándose la velocidad tangencial.

Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_A v_{1A}^n + m_B v_{1B}^n = m_A v_{2A}^n + m_B v_{2B}^n \quad (10.31)$$

De (10.30) y (10.31) despejamos las incógnitas  $v_{2A}^n$  y  $v_{2B}^n$ :

$$v_{2A}^n = \frac{m_B(1+e)v_{1B}^n + (m_A - em_B)v_{1A}^n}{m_A + m_B}$$

$$v_{2B}^n = \frac{m_A(1+e)v_{1A}^n + (m_B - em_A)v_{1B}^n}{m_A + m_B}$$

Estas expresiones generales se pueden particularizar a los casos de choque *perfectamente elástico* ( $e = 1$ )

$$v_{2A}^n = \frac{2m_B v_{1B}^n + (m_A - m_B)v_{1A}^n}{m_A + m_B}$$

$$v_{2B}^n = \frac{2m_A v_{1A}^n + (m_B - m_A)v_{1B}^n}{m_A + m_B}$$

o *choque plástico* ( $e = 0$ )

$$v_{2A}^n = \frac{m_B v_{1B}^n + m_A v_{1A}^n}{m_A + m_B}$$

$$v_{2B}^n = v_{2A}^n$$

El choque de esferas o discos lisos es un ejemplo típico de choque directo, ya que los centros de masa están siempre en la normal a la superficie, dirección asimismo de la impulsión, al ser lisas.

### 10.4.4. Impulsiones tangenciales

Si en la percusión hay componente tangencial de la velocidad relativa en el punto de impacto, y las superficies no son lisas, se producirá además de la impulsión normal  $I_N$ , una impulsión tangencial  $I_T$ . El valor máximo de esta última se obtiene mediante un coeficiente adimensional  $k$ :

$$I_T \leq k \cdot I_N$$

Esta expresión establece un límite máximo para la impulsión  $I_T$  que se “moviliza”, en función de  $I_N$ , de forma similar al rozamiento de Coulomb.

Este valor máximo se alcanza si hay deslizamiento después de la impulsión. El valor de  $k$  es por lo general semejante al coeficiente de rozamiento de Coulomb,  $\mu$ .

## 10.5. Dinámica analítica de impulsiones

Es posible aplicar los métodos de la mecánica analítica, descritos en el capítulo 7, al caso de las impulsiones. Supongamos para ello un sistema holónomo, con vínculos lisos, y coordenadas libres  $\{q_j\}$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Recordamos la expresión de las ecuaciones de Lagrange (7.12):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

El primer sumando del lado izquierdo de esta ecuación representa las fuerzas de inercia, derivadas temporales de los momentos generalizados, mientras que el segundo corresponde a fuerzas ficticias debidas a la elección de coordenadas generalizadas  $\{q_j\}$ . En el caso en que éstas sean coordenadas cartesianas, este segundo término es nulo.

Para establecer el balance de momentos generalizados se integra sobre el intervalo  $[\tau - \epsilon, \tau + \epsilon]$ . La integral del sustraendo  $(\partial T / \partial q_j)$  resulta ser un infinitésimo del orden de  $\epsilon$ , al tener dicho término un valor acotado. Resulta pues:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right|_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} = \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \underbrace{\mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}}_{Q_j} dt,$$

donde se sobreentiende el sumatorio sobre índices repetidos en el integrando.

Despreciando las fuerzas ordinarias (no impulsivas), la integral de las fuerzas vale

$$\int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \mathbf{I}_i \delta(t - \tau) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} dt = \mathbf{I}_i \cdot \overline{\left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right)} \stackrel{\text{def}}{=} P_j$$

donde la barra superpuesta indica el valor medio a lo largo de la impulsión. Definimos esta expresión como “impulsión generalizada”  $P_j$ . Así, la ecuación de balance resulta

$$\underbrace{\Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)}_{\Delta p_j} = P_j \quad (10.32)$$

La aplicación de esta ecuación exige que se cumplan las condiciones expuestas al principio de este apartado, es decir que los vínculos sean holónomos lisos, y por tanto permanentes, condiciones que a menudo no se dan. Conviene por tanto tener cuidado con su empleo ya que, debido a estas restricciones, la aplicación directa de la ecuación (10.32) a las impulsiones, sin comprobar adecuadamente que se verifican las hipótesis expuestas, puede dar lugar a errores.