

## Capítulo 8

# Dinámica del sólido rígido

### 8.1. Conceptos generales

Se llama «sólido rígido» a un conjunto de partículas, de número finito o infinito, que a lo largo del movimiento mantengan invariables las distancias entre cada dos de ellas, de manera que se conserve la forma geométrica del sistema y la distribución espacial de su masa.

Es posible pues caracterizar un sólido rígido  $\mathcal{B}$  de dos maneras distintas, según si el número de partículas es o no finito. El sólido con *distribución discreta de masa* es el constituido por un número finito de  $N$  partículas ( $m_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ) unidas rígidamente. Por otra parte, el sólido con *distribución continua de masa* estará formado por un número infinito de partículas, pudiendo idealizarse como un medio continuo. Es decir, se considera como un dominio  $\mathcal{B}$  infinitamente subdivisible en el sentido del cálculo diferencial, mediante elementos infinitesimales de volumen ( $dV$ ) y masa ( $dm$ ). Admitiremos en este caso que existe una función de densidad  $\rho = dm/dV$  que expresa la relación entre ambos y que supondremos integrable.

De esta forma, la masa total del sólido se expresa como

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^N m_i && \text{(distribución de masa discreta)} \\ M &= \int_{\mathcal{B}} \rho dV && \text{(distribución de masa continua).} \end{aligned} \tag{8.1}$$

Quedan fuera del alcance de este capítulo los *medios continuos deformables*, que serán objeto de estudio en otras materias (Resistencia de Materiales; Elasticidad y Plasticidad; Cálculo de Estructuras; Geotecnia; Hidráulica y Mecánica de Fluidos). La consideración de la deformabilidad de

los cuerpos exigiría introducir medidas de la deformación interna (tensor de deformaciones), así como de las fuerzas internas entre las partículas del sólido (tensor de tensiones) y las ecuaciones que ligan ambas (ecuaciones constitutivas), lo que excede los objetivos de este curso.

Como se vió en el ejemplo 6.1 (figura 6.5), un sólido rígido libre posee seis grados de libertad. Éstos se pueden descomponer como tres parámetros que definan la traslación del sólido, (por ejemplo, las coordenadas del centro de masa,  $X_G, Y_G, Z_G$ ), y tres parámetros angulares que definan la orientación del sólido alrededor de  $G$  (por ejemplo, los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$ , que se definirán más adelante (apartado 8.6.8)).

Las ecuaciones de la dinámica pueden obtenerse aplicando los principios y teoremas generales enunciados en el capítulo 6. En particular, el movimiento se puede resolver aplicando las ecuaciones que se deducen a partir de los principios de la cantidad de movimiento (6.7), momento cinético (6.22) y energía cinética (6.15). Para el caso más general del sólido libre en tres dimensiones, se necesitarán al menos seis ecuaciones independientes. Un procedimiento general para obtener las ecuaciones necesarias y suficientes es la aplicación del principio de D'Alembert, como se ve a continuación.

### 8.1.1. Ecuaciones cardinales de la dinámica

Supondremos un sólido rígido libre, sin enlaces exteriores, siendo las únicas ligaduras las internas del propio sólido, de distancia constante. Los desplazamientos virtuales compatibles con estos enlaces son

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \boldsymbol{\theta} \wedge (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) + \delta \mathbf{r}_G, \quad \forall (\delta \mathbf{r}_G, \delta \boldsymbol{\theta}). \quad (8.2)$$

En esta expresión  $\delta \mathbf{r}_G$  responde a desplazamientos virtuales arbitrarios del centro de masa y  $\delta \boldsymbol{\theta}$  a rotaciones infinitesimales. Por concretar el desarrollo se ha considerado el sólido como conjunto discreto de partículas ( $m_i, i = 1, \dots, N$ ), aunque los resultados son igualmente válidos para una distribución continua.

El principio de D'Alembert (6.65) expresa

$$\underbrace{\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i}_{\delta W} - \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ comp.} \quad (8.3)$$

Empleando (8.2) el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas  $\mathbf{f}_i$  resulta

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_G + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot (\delta \boldsymbol{\theta} \wedge (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G)) \\ &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_G + \mathbf{M}_G \cdot \delta \boldsymbol{\theta},\end{aligned}\quad (8.4)$$

siendo  $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{f}_i^{\text{ext}}$  (resultante de las fuerzas exteriores aplicadas) y  $\mathbf{M}_G = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{f}_i^{\text{ext}}$  (resultante de momentos en  $G$ ). Para obtener la expresión anterior se ha empleado la propiedad de rotación del producto mixto en los términos debidos a  $\delta \boldsymbol{\theta}$ .

Por otra parte, los términos de inercia originan la siguiente contribución:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \left( \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_G + \left( \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \wedge m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \right) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \\ &= M \mathbf{a}_G \cdot \delta \mathbf{r}_G + \left( \frac{d}{dt} \mathbf{H}_G \right) \cdot \delta \boldsymbol{\theta},\end{aligned}\quad (8.5)$$

siendo  $\mathbf{H}_G = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \wedge m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ . Sustituyendo las expresiones anteriores en (8.3),

$$(\mathbf{F} - M \mathbf{a}_G) \cdot \delta \mathbf{r}_G + (\mathbf{M}_G - \frac{d}{dt} \mathbf{H}_G) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} = 0 \quad \forall (\delta \mathbf{r}_G, \delta \boldsymbol{\theta}). \quad (8.6)$$

De aquí se deducen las denominadas *ecuaciones cardinales* de la dinámica del sólido:

$$\begin{cases} \mathbf{F} = M \mathbf{a}_G; \\ \mathbf{M}_G = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_G. \end{cases} \quad (8.7)$$

Se trata de seis ecuaciones escalares, que al deducirse del principio de D'Alembert, sabemos de entrada que son necesarias y suficientes para determinar los seis grados de libertad del movimiento.

En el caso particular de un sólido con un punto  $O$  fijo, los desplazamientos virtuales serían  $\delta \mathbf{r}_i = \delta \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{r}_i$  (tomando en  $O$  el origen de coordenadas), y la ecuación del movimiento se reduce a

$$\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O. \quad (8.8)$$

Si el sistema rígido se considera como un medio continuo, formado por infinitas partículas, las expresiones anteriores son igualmente válidas, cal-

culándose las magnitudes a emplear en (8.7) mediante:

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} dS + \sum_k \mathbf{f}_k^{\text{ext}}, \quad (8.9)$$

$$\mathbf{M}_G = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{t} dS + \sum_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{f}_k^{\text{ext}}, \quad (8.10)$$

$$\mathbf{H}_G = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge \dot{\mathbf{r}} \rho dV. \quad (8.11)$$

siendo  $\mathbf{b}$  las fuerzas distribuidas por unidad de volumen (p. ej. la gravedad simplificada terrestre  $\rho\mathbf{g}$ ),  $\mathbf{t}$  las fuerzas aplicadas por unidad de superficie en el contorno  $\partial\mathcal{B}$ ,  $\mathbf{f}_k^{\text{ext}}$  fuerzas concentradas (puntuales). Para el caso con un punto fijo (ecuación (8.8)), las expresiones serían

$$\mathbf{M}_O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{t} dS + \sum_k \mathbf{r}_k \wedge \mathbf{f}_k^{\text{ext}}, \quad (8.12)$$

$$\mathbf{H}_O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} \rho dV. \quad (8.13)$$

Si se admite que la resultante de las fuerzas exteriores,  $\mathbf{F}$ , no depende de la orientación del sólido, sino tan sólo de la posición del centro de masas  $\mathbf{r}_G$  y posiblemente del tiempo, la integración de la ecuación (8.7<sub>1</sub>) permitiría calcular la trayectoria del centro de masas como si se tratase de una partícula, de forma desacoplada de la ecuación (8.7<sub>2</sub>), problema que ya hemos estudiado con anterioridad en la dinámica de la partícula (capítulo 2).

Sería un grave error sin embargo considerar que el movimiento del sólido se reduce a definir el movimiento del centro de masas. Para definir completamente el movimiento faltaría determinar su orientación, mediante la ecuación (8.7<sub>2</sub>), ó (8.8) en el caso con un punto fijo.

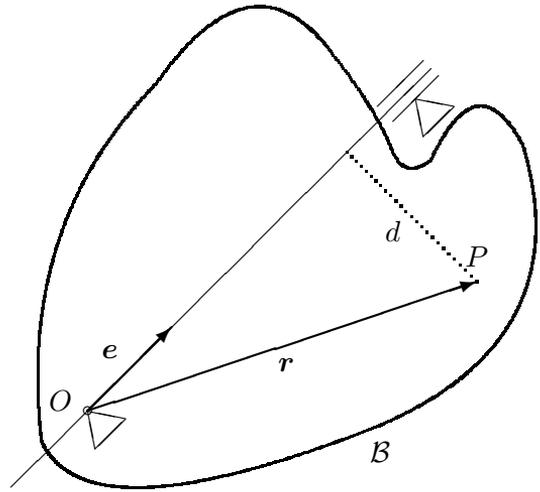
En este capítulo trataremos sobre el planteamiento y resolución de las ecuaciones (8.7<sub>2</sub>) ó (8.8). Ambas ecuaciones son formalmente iguales, definen el mismo tipo de problema: el movimiento de orientación o rotación del sólido alrededor de un punto que puede considerarse fijo, sea éste  $G$  u  $O$ .

## 8.2. Expresión de las magnitudes cinéticas

### 8.2.1. Movimiento de rotación instantánea

Consideremos un sólido  $\mathcal{B}$  con un movimiento instantáneo de rotación, alrededor de un eje  $(O, \mathbf{e})$ , con velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}$ , siendo  $\mathbf{e}$  un versor

Figura 8.1: Sólido  $\mathcal{B}$  girando alrededor de un eje fijo  $(O, \mathbf{e})$ .



unitario. El eje de rotación de dicho movimiento será en general variable a lo largo del tiempo. En caso contrario se trataría de la rotación de un sólido alrededor de un eje fijo, que da lugar como se sabe a un movimiento plano. Al tratarse de una rotación instantánea la velocidad de los puntos del eje es nula, por lo que tomando origen de coordenadas en  $O$  la velocidad de un punto  $P$  cualquiera del sólido  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}. \quad (8.14)$$

El momento cinético conjunto del cuerpo se obtiene mediante la suma o la integral, según se trate de una distribución discreta o continua, de los momentos cinéticos elementales de cada partícula:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}_i], \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(sólido discreto)} \\ (8.15) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \rho dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho dV = \int_{\mathcal{B}} [r^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}] \rho dV \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(sólido continuo)} \\ (8.16) \end{array}$$

En lo que sigue consideraremos un sólido continuo, por concretar las expresiones. Proyectando sobre el versor unitario  $\mathbf{e}$  obtenemos el *momento*

cinético áxico:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_O &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{e} \cdot [\mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})] \rho \, dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} \Omega (\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV = \Omega \int_{\mathcal{B}} d_e^2 \rho \, dV \end{aligned} \quad (8.17)$$

donde se ha empleado la propiedad de rotación del producto mixto. Asimismo, se denomina  $d_e \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}|$  a la distancia de cada punto al eje de rotación  $(O, \mathbf{e})$ .

En la expresión anterior, la integral que aparece se define como *momento de inercia* del sólido respecto al eje  $(O, \mathbf{e})$ :

$$I_{O,e} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} d_e^2 \rho \, dV \quad (8.18)$$

resultando por tanto a partir de (8.17) la expresión

$$H_{O,e} = I_{O,e} \Omega, \quad (8.19)$$

donde  $H_{O,e} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e}$ , momento cinético áxico del sólido respecto del eje  $(O, \mathbf{e})$ .

De la misma manera, la energía cinética se puede expresar como

$$\begin{aligned} T &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} v^2 \rho \, dV = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2 \rho \, dV \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 \int_{\mathcal{B}} d_e^2 \rho \, dV; \end{aligned} \quad (8.20)$$

es decir,

$$T = \frac{1}{2} I_{O,e} \Omega^2. \quad (8.21)$$

En el caso de un sólido discreto, las expresiones anteriores son igualmente válidas, siendo la expresión del momento de inercia  $I_{O,e} = \sum_{i=1}^N m_i d_{e,i}^2$ .

Debe advertirse que en las expresiones anteriores del momento cinético (8.19) y energía cinética (8.21) el valor del momento de inercia  $I_{O,e}$  no es constante, y deberá ser calculado en cada instante en función de la posición del eje de rotación  $(O, \mathbf{e})$ . Esta circunstancia limita la utilidad práctica de dichas fórmulas, siendo más recomendable para un caso general el uso del tensor de inercia, tal como se explicará en el apartado 8.3 (expresiones (8.29) y (8.42)).

### 8.2.2. Movimiento general (rotación y traslación)

En el caso más general en que el movimiento no sea una rotación instantánea sino un movimiento general sin puntos de velocidad nula, el campo de velocidades se puede desarrollar en general a partir del centro de masas ( $G$ ). Definiendo la posición relativa al mismo por  $\mathbf{r}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} - \mathbf{r}_G$ , y suponiendo que la velocidad instantánea de rotación es  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$ ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}'. \quad (8.22)$$

El momento cinético resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}' \wedge (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}') \rho \, dV \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}' \wedge \mathbf{v}_G \rho \, dV}_{=0} + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}') \rho \, dV. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Proyectando sobre el versor  $\mathbf{e}$  de la velocidad de rotación,

$$H_{G,e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_G = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{e} \cdot [\mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')] \rho \, dV = \Omega I_{G,e}, \quad (8.24)$$

donde  $I_{G,e}$  es el momento de inercia respecto del eje ( $G, \mathbf{e}$ ), que se define análogamente a (8.18).

El desarrollo de la energía cinética es en este caso

$$\begin{aligned} T &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')^2 \rho \, dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} v_G^2 \rho \, dV + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{v}_G \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}') \rho \, dV}_{=0} + \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')^2 \rho \, dV \\ &= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_{G,e} \Omega^2. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Esta expresión es la aplicación del teorema de König (6.25) al caso del sólido.

Debe realizarse aquí la misma advertencia que se hizo al final del apartado anterior, en relación con el valor variable en general del momento de inercia  $I_{G,e}$  a emplear en las fórmulas (8.24) y (8.25<sub>3</sub>).

### 8.2.3. Dinámica del sólido con un eje fijo

De las expresiones anteriores se puede obtener de forma directa la ecuación dinámica del caso más sencillo de movimiento de rotación de un sólido,

que es cuando el eje de rotación  $(O, \mathbf{e})$  es fijo. Puesto que se trata de un sólido rígido,  $I_{O,e}$  es una constante que refleja la distribución de masas del sólido alrededor de dicho eje fijo. Teniendo en cuenta esto, si se deriva (8.19) y empleando (8.8) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_{O,e} = I_{O,e} \dot{\Omega} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e} = M_{O,e} \\ &\Downarrow \\ \boxed{M_{O,e} = I_{O,e} \dot{\Omega}.} & \end{aligned} \quad (8.26)$$

En esta ecuación  $M_{O,e} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}$  es el momento áxico de las fuerzas. Al derivar para obtener esta expresión se ha tenido en cuenta que, el eje  $(O, \mathbf{e})$  es fijo, tanto respecto al sólido como a la referencia absoluta, por lo que el momento de inercia  $I_{O,e}$  se mantiene constante, ya que la distribución de masa no sufre distorsión.

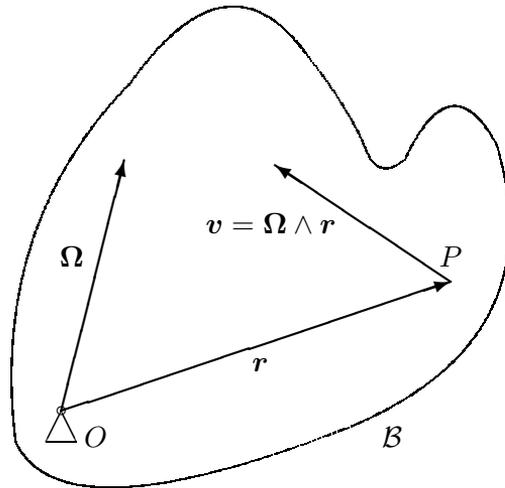
La expresión (8.26) define la dinámica de la rotación en torno a un eje fijo. Es similar a la ley «Fuerza = Masa  $\times$  Aceleración» (2.2) para dinámica de traslación de partículas, cumpliendo aquí  $\dot{\Omega}$  el papel de aceleración (variación del movimiento),  $M_{O,e}$  el papel de fuerza (causante de la variación) e  $I_{O,e}$  el papel de masa (inercia a la variación).

### 8.3. El tensor de inercia

Para el caso más general de la dinámica del sólido, en lo que sigue nos limitaremos a la ecuación (8.7<sub>2</sub>), o bien directamente a la ecuación (8.8) en el caso en que el sólido tenga un punto fijo  $O$  —dando por descontada la solución de la ecuación (8.7<sub>1</sub>) que gobierna la traslación—. Como se ha dicho, las dos ecuaciones son formalmente iguales, expresando ambas la dinámica de la rotación alrededor de un punto que se pueda suponer fijo, sea este punto  $G$  u  $O$ . Por tanto en lo que sigue centraremos nuestra atención en la ecuación (8.8) correspondiente al sólido con un punto fijo.

Para poder expresar dicha ecuación en un caso general en que el eje de rotación no sea fijo, es preciso en primer lugar desarrollar las expresiones de las magnitudes cinéticas (momento cinético, energía cinética) de forma intrínseca, sin referirse al eje de rotación, lo que dará lugar al denominado *tensor de inercia*. Como veremos, este tensor constituye la descripción más general de la inercia de un sólido a la variación de su movimiento, generalizando el concepto de momento de inercia que se emplea para la rotación alrededor de un eje.

Figura 8.2: *Movimiento del sólido  $\mathcal{B}$  con un punto fijo  $O$ .*



**Expresión del Momento Cinético.**— El momento cinético de un sólido  $\mathcal{B}$  con un punto fijo  $O$ , con velocidad de rotación instantánea  $\mathbf{\Omega}$ , viene dado por (8.16):

$$\mathbf{H}_O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho dV = \int_{\mathcal{B}} [r^2 \mathbf{\Omega} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{\Omega}) \mathbf{r}] \rho dV. \quad (8.27)$$

Se observa fácilmente que esta expresión es lineal en  $\mathbf{\Omega}$ ; por tanto se puede interpretar que define  $\mathbf{H}_O$  como una transformación lineal de  $\mathbf{\Omega}$ , que identificaremos con un tensor<sup>1</sup>  $\mathbf{I}_O$ ,

$$\mathbf{I}_O : \quad \mathbf{\Omega} \mapsto \mathbf{H}_O(\mathbf{\Omega}) = \int_{\mathcal{B}} [r^2 \mathbf{\Omega} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{\Omega}) \mathbf{r}] \rho dV. \quad (8.28)$$

Se trata de un tensor de segundo orden, que denominamos *tensor de Inercia* del sólido  $\mathcal{B}$  en el punto  $O$ .

En lenguaje tensorial, decimos que  $\mathbf{H}_O$  es la actuación de  $\mathbf{I}_O$  sobre  $\mathbf{\Omega}$ :

$$\boxed{\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}} \quad (8.29)$$

donde el operador  $(\cdot)$  indica la aplicación del tensor sobre un vector, obteniéndose como resultado otro vector<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Véase el apéndice A, donde se define un tensor de orden dos como «una función lineal que aplica cada vector a un vector»

<sup>2</sup>En este texto se empleará el punto  $(\cdot)$  para significar esta aplicación de un tensor sobre un vector, que no debe confundirse con el producto escalar entre dos vectores. Otros autores indican la aplicación de un tensor sin ningún símbolo, es decir  $\mathbf{I}_O \mathbf{\Omega}$

**Componentes del tensor de inercia.**— En notación tensorial, a partir de (8.27) y teniendo en cuenta que  $(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega})$  (véase apéndice A), el tensor de inercia se puede expresar de manera explícita mediante

$$\mathbf{I}_O = \int_{\mathcal{B}} (r^2 \mathbf{1} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \rho \, dV, \quad (8.30)$$

donde  $\mathbf{1}$  es el tensor identidad, de componentes  $\delta_{ij}$  (deltas de Kronecker) en una base ortonormal, y  $(\otimes)$  indica producto tensorial o diádico.

Para clarificar el significado del tensor de inercia, desarrollemos las componentes del mismo en una base ortonormal, a partir de (8.27):<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} (H_O)_i &= \int_{\mathcal{B}} [r^2 \Omega_i - (r_j \Omega_j) r_i] \rho \, dV \\ &= \left[ \int_{\mathcal{B}} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \rho \, dV \right] \Omega_j \\ &= I_{O,ij} \Omega_j. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Los coeficientes  $I_{O,ij}$  corresponden a las componentes del tensor de inercia  $\mathbf{I}_O$  y quedan definidos por

$$I_{O,ij} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \rho \, dV, \quad (8.32)$$

La ecuación (8.31) permite interpretar la actuación del tensor de inercia  $\mathbf{I}_O$  como el producto tensorial contraído<sup>4</sup> con  $\boldsymbol{\Omega}$ .

**Cambio de coordenadas.**— Una de las propiedades esenciales de los tensores es el comportamiento de sus coordenadas frente a un cambio de base (apartado A.5 en apéndice A). Supongamos un tal cambio, asociado a un tensor de cambio  $\mathbf{A}$  con matriz de componentes  $[\mathbf{A}]^5$ , que transforma la

<sup>3</sup>En estas expresiones, se sobreentiende que se efectúa la suma sobre los índices repetidos sobre su rango de variación, convención que emplearemos en lo sucesivo en este capítulo salvo indicación expresa en contra.

<sup>4</sup>es decir, realizando la sumatoria («contrayendo») en el índice más cercano entre ambos

<sup>5</sup>Emplearemos la siguiente notación en este curso para las expresiones matriciales:  $\{\mathbf{x}\} \equiv \{x_i\}$ ,  $\{\mathbf{r}\} \equiv \{r_i\}$  (entre llaves) para matrices columna ( $n \times 1$ ),  $\|\mathbf{x}\| = \{\mathbf{x}\}^T \equiv \|x_i\|$ ,  $\|\mathbf{r}\| = \{\mathbf{r}\}^T \equiv \|r_i\|$  (entre barras dobles) para matrices fila ( $1 \times n$ ), y  $[\mathbf{R}] \equiv [R_{ij}]$ ,  $[\mathbf{A}] \equiv [A_{ij}]$ ,  $[\mathbf{I}] \equiv [I_{ij}]$  (entre corchetes) para matrices de 2 índices (rectangulares  $n \times m$  o cuadradas  $n \times n$ ). Reservaremos las letras «negritas matemáticas» ( $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{I}$ ) para vectores o tensores. Procuraremos distinguir de esta manera entre el tensor  $\mathbf{R}$  y la matriz de componentes del mismo en un triedro dado,  $[\mathbf{R}] \equiv [R_{ij}]$ .

base ortonormal  $\{\mathbf{e}_i\}$  en otra igualmente ortogonal  $\{\mathbf{e}'_i\}$ :

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \|\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3\| = \|\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3\| \|\mathbf{A}\| \\ \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_j A_{ji} \end{cases} \quad (8.33)$$

Las coordenadas de un vector dado  $\mathbf{a}$  cambian como

$$\{\mathbf{a}\}' = [\mathbf{A}]^T \{\mathbf{a}\} \quad \Leftrightarrow \quad a'_i = A_{ji} a_j. \quad (8.34)$$

Las coordenadas del tensor  $\mathbf{I}_O$  (cf. ecuación (A.43) en apéndice A) en ambas bases están relacionadas por

$$[\mathbf{I}_O]' = [\mathbf{A}]^T [\mathbf{I}_O] [\mathbf{A}] \quad \Leftrightarrow \quad I'_{O,ij} = A_{ki} I_{O,kl} A_{lj}. \quad (8.35)$$

Recordamos que, al tratarse de un cambio entre bases ortonormales,  $\mathbf{A}$  es ortogonal ( $[\mathbf{A}]^T = [\mathbf{A}]^{-1}$ , y  $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$ ). Supondremos además que ambos triedros son «a derechas», por lo que adicionalmente ha de ser  $\det(\mathbf{A}) = +1$ .

Reviste especial interés considerar un triedro  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  ligado al sólido, con origen en un punto  $O$  del mismo y direcciones  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  solidarias al cuerpo. En este triedro, un punto material del sólido tiene coordenadas constantes<sup>6</sup> a lo largo del movimiento:

$$\mathbf{r} = x^\circ \mathbf{i} + y^\circ \mathbf{j} + z^\circ \mathbf{k}, \quad \text{con } (x^\circ, y^\circ, z^\circ) \text{ constantes.} \quad (8.36)$$

Las componentes del tensor de inercia en este triedro, a partir de (8.32), son igualmente constantes. Empleando la notación indicial para las coordenadas,  $(r_1^\circ, r_2^\circ, r_3^\circ) = (x^\circ, y^\circ, z^\circ)$ , estas componentes son

$$I_{O,ij}^\circ = \int_B (r^2 \delta_{ij} - r_i^\circ r_j^\circ) \rho \, dV \quad (\text{constantes}) \quad (8.37)$$

Consideremos ahora el cambio de base que relaciona el triedro del cuerpo  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  con el triedro fijo  $(O, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ ,

$$\|\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}\| = \|\mathbf{I} \mathbf{J} \mathbf{K}\| [\mathbf{R}]. \quad (8.38)$$

(El triedro fijo puede definirse como aquél que coincide con la posición del triedro del cuerpo en el instante de referencia o inicial,  $[\mathbf{R}]_{t=0} = [\mathbf{1}]$ .) La relación entre las componentes del tensor de inercia en ambos triedros es

$$[\mathbf{I}_O]^\circ = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{I}_O] [\mathbf{R}], \quad (8.39)$$

---

<sup>6</sup>Este tipo de coordenadas ligadas al movimiento se denominan en ocasiones *coordenadas convectivas*.

donde  $[\mathbf{I}_O]^\circ$  son las componentes del tensor de inercia en el triedro del cuerpo, e  $[\mathbf{I}_O]$  las componentes en el triedro fijo. Teniendo en cuenta  $[\mathbf{R}]^T = [\mathbf{R}]^{-1}$ , la relación anterior se puede invertir resultando

$$[\mathbf{I}_O] = [\mathbf{R}][\mathbf{I}_O]^\circ[\mathbf{R}]^T. \quad (8.40)$$

Esta expresión matricial define las componentes del tensor de inercia en una base fija (inercial) a lo largo del movimiento, en función de la matriz  $[\mathbf{R}]$ . Se puede comprender fácilmente que las coordenadas  $[\mathbf{I}_O]$  por lo general no serán constantes. Si se desea evitar tener que considerar dicha variación en el cálculo, deberá expresarse el tensor de inercia en un triedro ligado al sólido ( $[\mathbf{I}_O]^\circ$ ).

**Expresión de la Energía Cinética.**— La expresión de la energía cinética (8.20) se puede desarrollar como:

$$\begin{aligned} T &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Considerando (8.16) y (8.29) puede escribirse en función del tensor de inercia,

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})}. \quad (8.42)$$

Otras maneras de expresar esta ecuación<sup>7</sup> son:

$$T = \frac{1}{2} \Omega_i I_{O,ij} \Omega_j \quad (\text{notación indicial}); \quad (8.43)$$

$$= \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\Omega}\| [\mathbf{I}_O] \{\boldsymbol{\Omega}\} \quad (\text{notación matricial}). \quad (8.44)$$

La ecuación (8.42) es una expresión tensorial, por lo que el resultado es otro tensor, en este caso de orden cero, es decir, un escalar invariante. Por lo tanto, el valor de  $T$  es un invariante intrínseco del movimiento, que no depende del sistema de coordenadas elegido. En efecto, realizando el cambio

<sup>7</sup> En la expresión (8.42) el primer punto  $(\cdot)$  indica producto escalar entre vectores y el segundo la aplicación del tensor sobre un vector. En algunos textos se emplea la notación del producto de un tensor  $\mathbf{A}$  por un vector  $\mathbf{x}$  por la izquierda como  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}$ , o en índices  $x_i A_{ij}$ , con lo que la ecuación anterior puede expresarse también sin paréntesis como  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$

de coordenadas definido por  $[\mathbf{A}]$  según (8.34) y (8.35) y teniendo en cuenta la ortogonalidad de la matriz de cambio:

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\Omega}\|' [\mathbf{I}_O]' \{\boldsymbol{\Omega}\}' \\ &= \frac{1}{2} (\|\boldsymbol{\Omega}\| [\mathbf{A}]) ([\mathbf{A}]^T [\mathbf{I}_O] [\mathbf{A}]) ([\mathbf{A}]^T \{\boldsymbol{\Omega}\}) \\ &= \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\Omega}\| [\mathbf{I}_O] \{\boldsymbol{\Omega}\} = T. \end{aligned} \quad (8.45)$$

## 8.4. Propiedades del tensor de inercia

### 8.4.1. Momentos y productos de inercia

Sea un eje  $(O, \mathbf{u})$  correspondiente a un versor  $\mathbf{u}$  pasando por el punto  $O \in \mathcal{B}$ . La distancia al eje de un punto cualquiera  $P \in \mathcal{B}$  definido por  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  es  $d = |\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}|$ . Según la definición de momento de inercia (8.18),

$$\begin{aligned} I_u &= \int_{\mathcal{B}} d^2 \rho \, dV = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV \\ &= \mathbf{u} \cdot \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV. \end{aligned} \quad (8.46)$$

La integral que aparece es análoga a la (8.27), que sirvió para definir el tensor de inercia, ocupando aquí  $\mathbf{u}$  el lugar de  $\boldsymbol{\Omega}$ . Por tanto,

$$I_u = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{u}) \quad (8.47)$$

Esta expresión define el momento de inercia como una forma cuadrática función de  $\mathbf{u}$ , y permite calcular, conocido  $\mathbf{I}_O$ , el momento de inercia para un eje cualquiera por  $O$ .

En general, es sabido que las componentes cartesianas  $(ij)$  del tensor  $\mathbf{I}_O$  se obtienen mediante

$$I_{O,ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_j).$$

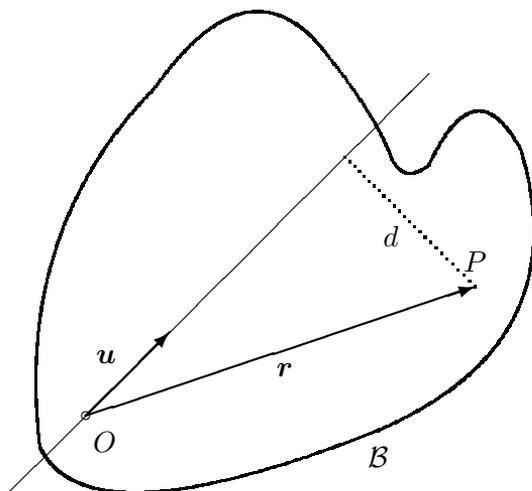
En concreto, tomando las direcciones de los versores del triedro  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  y empleando (8.47) y (8.30) obtenemos los *momentos de inercia* según las direcciones del triedro de referencia:

$$I_{xx} = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{i}) = \int_{\mathcal{B}} (y^2 + z^2) \rho \, dV, \quad (8.48)$$

$$I_{yy} = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{j}) = \int_{\mathcal{B}} (x^2 + z^2) \rho \, dV, \quad (8.49)$$

$$I_{zz} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{k}) = \int_{\mathcal{B}} (x^2 + y^2) \rho \, dV. \quad (8.50)$$

Figura 8.3: *Momento de inercia del sólido  $\mathcal{B}$  respecto de un eje  $(O, \mathbf{u})$ .*



Estos momentos de inercia coinciden con las componentes de la diagonal principal de la matriz de coordenadas, como es fácil ver. La expresión completa de esta matriz es

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{I}_O] &= \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{B}}(y^2 + z^2)\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} xy\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} zx\rho \, dV \\ -\int_{\mathcal{B}} yx\rho \, dV & \int_{\mathcal{B}}(z^2 + x^2)\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} yz\rho \, dV \\ -\int_{\mathcal{B}} zx\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} yz\rho \, dV & \int_{\mathcal{B}}(x^2 + y^2)\rho \, dV \end{pmatrix} \quad (8.51) \\
 &= \begin{pmatrix} I_{xx} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{yy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Las integrales de fuera de la diagonal, con signo positivo, se denominan *productos de inercia*:

$$P_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} xy\rho \, dV; \quad P_{yz} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} yz\rho \, dV; \quad P_{zx} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} zx\rho \, dV. \quad (8.52)$$

De la expresión (8.51) es inmediato comprobar que  $\mathbf{I}_O$  es un tensor simétrico, por lo que para definirlo en un caso general bastarán 6 componentes (3 momentos de inercia y 3 productos de inercia).

Además, el tensor  $\mathbf{I}_O$  es siempre definido positivo. Esto se deduce de forma inmediata de (8.42) que expresa  $T$  como una forma cuadrática de  $\boldsymbol{\Omega}$  definida por  $\mathbf{I}_O$ . La energía cinética  $T$ , por su propia definición, es esencialmente positiva para cualquier movimiento de rotación no nulo ( $\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$ ),

lo que caracteriza al tensor  $\mathbf{I}_O$  como definido positivo. Análogamente, los momentos de inercia definidos por la forma cuadrática (8.47) deben ser mayores que cero, anulándose únicamente para sólidos degenerados (rectas o puntos).

Otras propiedades del tensor de inercia de fácil demostración son las siguientes:

- La contracción (traza) de un tensor de 2.º orden es un invariante escalar. Por tanto

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\mathbf{I}_O) &= I_{\alpha\alpha} = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} \\ &= 2 \int_{\mathcal{B}} (x^2 + y^2 + z^2) \rho \, dV \\ &= 2 \int_{\mathcal{B}} r^2 \rho \, dV = 2I_O,\end{aligned}$$

donde  $I_O$  es el denominado *momento de inercia polar*, invariante de  $\mathcal{B}$  para un punto  $O$  dado.

- Se verifica la propiedad triangular, es decir, un momento de inercia es menor que la suma de los otros dos, pero mayor que su diferencia. Se comprueba inmediatamente,

$$\begin{aligned}I_{yy} + I_{zz} &= \int_{\mathcal{B}} (2x^2 + y^2 + z^2) \rho \, dV = I_{xx} + \underbrace{2 \int_{\mathcal{B}} x^2 \rho \, dV}_{>0}, \\ I_{yy} - I_{zz} &= \int_{\mathcal{B}} (z^2 - y^2) \rho \, dV = I_{xx} - \underbrace{2 \int_{\mathcal{B}} y^2 \rho \, dV}_{>0}.\end{aligned}$$

### 8.4.2. Elipsoide de inercia

Consideremos el haz de ejes que pasan por un punto  $O$ , con direcciones arbitrarias definidas por el versor unitario  $\mathbf{e}$ . Definimos para cada dirección un punto situado sobre el eje  $(O, \mathbf{e})$  a una distancia  $(I_e)^{-1/2}$  de  $O$ :

$$\mathbf{r} = \pm \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{I_e}}.$$

Si expresamos la forma cuadrática en  $\mathbf{r}$  definida por  $\mathbf{I}_O$ ,

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e})}{I_e} = 1. \quad (8.53)$$

Esta última ecuación caracteriza el lugar geométrico de los puntos considerados como una cuádrlica con centro en  $O$ . La expresión (8.53) es una forma cuadrática definida positiva (en todos los casos de sólidos no degenerados), por lo que geoméricamente se trata de un elipsoide, llamado *elipsoide de inercia*. Su expresión desarrollada es

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2P_{xy}xy - 2P_{yz}yz - 2P_{zx}zx = 1$$

El elipsoide de inercia ofrece una manera alternativa de estudiar el movimiento del sólido, a través de procedimientos *geométricos*, en lugar de los procedimientos *algebraicos* mediante el tensor de inercia, de naturaleza más abstracta.

### 8.4.3. Ejes principales de inercia

En un caso general, la velocidad instantánea de rotación  $\boldsymbol{\Omega}$  y el momento cinético  $\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$  no tienen porqué ser paralelos. Sin embargo, existen algunas direcciones privilegiadas en las que sí se cumple esta condición; éstas se llaman *direcciones principales de inercia en  $O$* .

Si  $\boldsymbol{\Omega}$  es paralela a una dirección principal de inercia, esto quiere decir que existirá un escalar  $\lambda$  que exprese la proporcionalidad,

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \lambda \boldsymbol{\Omega};$$

si tomamos el versor  $\mathbf{e}$  correspondiente a esta dirección ( $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$ ), se cumplirá

$$I_e = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot (\lambda \mathbf{e}) = \lambda;$$

es decir, el coeficiente de proporcionalidad es precisamente el momento de inercia según la dirección principal,  $\lambda = I_e$ . Éstos se denominan *momentos principales de inercia*.

La obtención de las direcciones principales y momentos principales asociados a un tensor  $\mathbf{I}_O$  constituye un *problema de autovalores*: Se trata de encontrar una dirección  $\mathbf{e}$  tal que, para algún  $\lambda$ , se verifique

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}. \quad (8.54)$$

Introduciendo el tensor unidad  $\mathbf{1}$ , cuyas componentes cartesianas son las deltas de Kronecker ( $\delta_{ij}$ ), resulta la igualdad

$$(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (8.55)$$

Esta expresión corresponde a un sistema de ecuaciones lineal y homogéneo, de incógnitas  $\mathbf{e} \equiv \|e_1 e_2 e_3\|$ . Para que exista solución no trivial ( $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ ), la matriz de coeficientes de (8.55) ha de ser singular:

$$\det(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) = 0, \quad (8.56)$$

expresión que constituye la denominada *ecuación característica* del problema de autovalores (8.54). Se trata de una ecuación cúbica en  $\lambda$ , que posee tres raíces ( $\lambda_I = A$ ,  $\lambda_{II} = B$ ,  $\lambda_{III} = C$ ). Por ser  $\mathbf{I}_O$  simétrico, estas tres raíces deben ser reales; como además es definido positivo, las tres serán además positivas, correspondiendo a los tres momentos principales de inercia.

Cada momento principal de inercia está asociado a una dirección principal de inercia, solución de (8.55) con el valor de  $\lambda$  apropiado: ( $\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}$ ). Admitamos en primer lugar que la ecuación característica tiene tres raíces distintas ( $A \neq B \neq C$ ), las tres direcciones principales se obtienen respectivamente de

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_I = A\mathbf{e}_I \quad (8.57)$$

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_{II} = B\mathbf{e}_{II} \quad (8.58)$$

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_{III} = C\mathbf{e}_{III} \quad (8.59)$$

Una propiedad esencial de las direcciones principales es que, si corresponden a autovalores distintos, han de ser mutuamente ortogonales. En efecto, multiplicando escalarmente (8.57) por  $\mathbf{e}_{II}$  y (8.58) por  $\mathbf{e}_I$ ,

$$\mathbf{e}_{II} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_I) = A\mathbf{e}_{II} \cdot \mathbf{e}_I$$

$$\mathbf{e}_I \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_{II}) = B\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_{II}$$

restando estas dos expresiones y haciendo uso de la simetría del tensor de inercia, se obtiene

$$0 = (A - B)\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_{II},$$

expresión que indica la ortogonalidad entre ambas direcciones, ya que por hipótesis antes realizada  $(A - B) \neq 0$ . Por lo tanto, el triedro de referencia ( $O, \mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}$ ) formado por las tres direcciones principales en  $O$  constituye una base ortonormal ligada al sólido. Las componentes del tensor de inercia en esta base son

$$I_{O,ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_j) = \lambda_i \delta_{ij} \quad (i \text{ no sumado}),$$

lo que equivale a una matriz de componentes diagonal:

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Los ejes principales de inercia corresponden a los ejes geométricos del elipsoide de inercia, cuya expresión en este triedro sería

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

ecuación que corresponde a un elipsoide de semiejes  $(1/\sqrt{A}, 1/\sqrt{B}, 1/\sqrt{C})$ .

En el caso en que existiera una raíz doble en la ecuación característica (8.56), habrá dos momentos principales iguales. Los ejes principales de inercia estarán constituidos por el correspondiente a la raíz única y otros dos ejes cualesquiera en el plano normal al primero y que sean ortogonales entre sí, adoptando entonces la matriz de componentes del tensor de inercia la forma

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}.$$

En este caso es inmediato comprobar que cualquier dirección del plano  $(O, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III})$  ortogonal al primer vector (es decir, un vector  $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{e}_{II} + \beta \mathbf{e}_{III}$  para  $\alpha$  y  $\beta$  arbitrarias) es también dirección principal de inercia. Estamos ante un tensor de inercia *cilíndrico*.

Por último, en el caso en que exista una única raíz triple, análogamente al caso anterior, cualquier dirección del espacio es principal. Podremos escoger como ejes principales tres direcciones ortogonales cualesquiera. Diremos que el tensor de inercia es *esférico*, siendo su expresión en cualquier sistema cartesiano de coordenadas la misma:

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Veamos ahora que los momentos de inercia correspondientes a las direcciones principales son los máximos y mínimos de los momentos de inercia para cualquier dirección. Basta plantear el problema de máximos/mínimos condicionados en el que se buscan los extremos de la función

$$I_e(\mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}), \quad (8.60)$$

sujetos a la ligadura

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1, \quad (8.61)$$

puesto que el versor  $\mathbf{e}$  debe tener módulo unidad. El problema se soluciona mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Tomando una variación infinitesimal de la primera expresión e igualando a cero, la condición de extremo (8.60) queda expresada como

$$2\mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \delta\mathbf{e}) = 0.$$

(donde se ha empleado la simetría de  $\mathbf{I}_O$ .) Multiplicando la ecuación de ligadura (8.61) por un multiplicador arbitrario  $\lambda$ , y tomando igualmente su variación,

$$2\lambda\mathbf{e} \cdot \delta\mathbf{e} = 0.$$

Restando ahora ambas expresiones,

$$(\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} - \lambda\mathbf{e}) \cdot \delta\mathbf{e} = 0,$$

lo que, al ser  $\delta\mathbf{e}$  arbitrario, obliga a

$$\boxed{\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}}. \quad (8.62)$$

Es decir,  $\mathbf{e}$  debe ser una dirección principal, como queríamos demostrar. Por lo tanto, de las tres direcciones principales, una corresponderá al máximo momento de inercia, otra al mínimo, y la tercera a un valor intermedio.

#### 8.4.4. Simetrías de masas

La existencia de simetrías en la distribución de masas simplifica de manera considerable el cálculo del tensor de inercia. En la práctica es conveniente emplear estas simplificaciones siempre que sea posible.

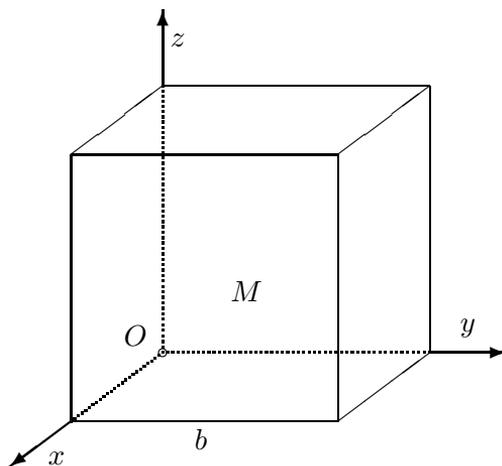
- a. *Plano de Simetría.* Por ejemplo, si  $(Oxy)$  es un plano de simetría, cualquier partícula de coordenadas  $(x, y, z)$  posee una simétrica  $(x, y, -z)$ . Así,  $P_{xz} = \int_{\mathcal{B}} xz\rho dV = 0$ ,  $P_{yz} = \int_{\mathcal{B}} yz\rho dV = 0$ . En la expresión de la matriz de inercia (8.51), la tercera fila y la tercera columna se anulan, por lo que el eje  $Oz$  (perpendicular al plano de simetría) es un eje principal de inercia.
- b. *Eje de Simetría.* Sea este, ejemplo el eje  $Oz$ . Para toda partícula en  $(x, y, z)$  existe otra en  $(-x, -y, z)$ . Por tanto  $P_{xz} = P_{yz} = 0$ , y el eje de simetría  $Oz$  es también eje principal de inercia.

- c. *Eje de Revolución.* Sea este por ejemplo el eje  $Oz$ . El eje de revolución es también eje de simetría, por lo que  $Oz$  será eje principal. Por otra parte, existe simetría respecto de cualquier plano que contenga al eje de revolución, por lo que todo eje  $\in Oxy$  es principal de inercia. Estaremos por tanto ante un tensor de inercia cilíndrico,

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 8.1: Sea un cubo homogéneo, de masa  $M$  y arista  $b$ . Se desea calcular las componentes del tensor de inercia referido a un vértice del cubo con ejes paralelos a las aristas, así como los ejes principales de inercia.

Figura 8.4: Obtención del tensor de inercia de un cubo respecto del vértice  $O$ , con ejes  $(x, y, z)$  paralelos a las aristas



Calculamos directamente las integrales que definen las componentes del tensor de inercia (8.51) en ejes cartesianos ortonormales (8.51):

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint_V (y^2 + z^2) \rho \, dx \, dy \, dz \\ &= \rho \int_0^b dz \int_0^b (y^2 + z^2) \, dy \int_0^b dx \\ &= \rho b \int_0^b dz \int_0^b (y^2 + z^2) \, dy \\ &= \rho b \int_0^b \left( \frac{b^3}{3} + bz^2 \right) dz \\ &= \rho b \left( \frac{b^4}{3} + \frac{b^4}{3} \right) = \frac{2}{3} Mb^2, \end{aligned}$$

ya que  $M = b^3\rho$ . Análogamente

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}Mb^2.$$

Los productos de inercia valen

$$\begin{aligned} P_{xy} &= \iiint_V xy\rho \, dx \, dy \, dz \\ &= \rho \int_0^b dx \int_0^b xy \, dy \int_0^b dz \\ &= \rho b \int_0^b dx \int_0^b xy \, dy \\ &= \rho \frac{b^3}{2} \int_0^b x \, dx \\ &= \rho \frac{b^3}{2} \frac{b^2}{2} = \frac{1}{4}Mb^2 \end{aligned}$$

y de igual manera

$$P_{yz} = P_{zx} = \frac{1}{4}Mb^2$$

Por lo tanto, la expresión del tensor de inercia es

$$[\mathbf{I}_O] = Mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix}. \quad (8.63)$$

Calculemos ahora los ejes principales de inercia. La ecuación característica es:

$$\det(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) = 0$$

denominando  $Mb^2 = \beta$ , para simplificar las expresiones, resulta

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\beta - \lambda & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - \lambda & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante,

$$\det(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) = \left(\frac{11}{12}\beta - \lambda\right) \left[\left(\frac{5}{12}\beta - \lambda\right) \left(\frac{2}{3}\beta - \lambda\right) - \frac{1}{8}\beta^2\right] = 0,$$

cuyas soluciones son  $\lambda = (1/6)\beta$  y  $\lambda = (11/12)\beta$  (doble).

Por lo tanto el tensor de inercia, expresado en los ejes principales, sería

$$[\mathbf{I}_O] = Mb^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 11/12 & 0 \\ 0 & 0 & 11/12 \end{pmatrix}$$

Para obtener las direcciones principales, sustituimos en (8.62) cada autovalor  $\lambda$  solución de la ecuación característica, y resolviendo para  $\mathbf{e}$  obtendremos la dirección principal asociada. Conviene recordar que al ser la matriz de coeficientes singular, estas direcciones principales quedan indeterminadas en función de al menos un parámetro, lo que nos permite elegir las soluciones normalizadas, correspondientes a versores de módulo unidad.

Sustituyendo el primer autovalor ( $\lambda = \beta/6$ ) en (8.62) y simplificando resulta:

$$\begin{aligned} 2e_1 - e_2 - e_3 &= 0, \\ -e_1 + 2e_2 - e_3 &= 0, \\ -e_1 - e_2 + 2e_3 &= 0. \end{aligned}$$

La solución —función de un parámetro indeterminado  $\mu$  ya que las tres ecuaciones no son independientes— es  $\mu(1, 1, 1)$ , que corresponde a la diagonal del cubo.

Las otras dos direcciones principales hay que buscarlas en el plano normal a ésta. Como el otro autovalor es una solución doble, serán cualesquiera dos direcciones de este plano que sean normales entre sí. (El tensor de inercia es por tanto cilíndrico.)

## 8.5. Campo tensorial de inercia

Tal y como se ha definido en el apartado 8.3, el tensor de inercia es un «tensor de punto», ligado al punto material  $O$  que se ha tomado como origen de coordenadas. Por lo tanto, al variar dicho punto, se obtendrá un tensor distinto, con lo que se define un *campo tensorial*. Si se toma como referencia el centro de masas  $G$ , obtendremos el llamado *tensor central de inercia*,  $\mathbf{I}_G$ :

$$\mathbf{I}_G = \int_{\mathcal{B}} (r_{GP}^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_{GP} \otimes \mathbf{r}_{GP}) \rho dV \quad (8.64)$$

Donde  $\mathbf{r}_{GP} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{GP}$ , vector desde  $G$  a un punto genérico  $P \in \mathcal{B}$ .

Calculemos la expresión de  $\mathbf{I}_O$  en función de  $\mathbf{I}_G$ ; empleando la descomposición<sup>8</sup>  $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}_{GP}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O &= \int_{\mathcal{B}} (r_P^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_P \otimes \mathbf{r}_P) \rho \, dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} (r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G) \rho \, dV + \int_{\mathcal{B}} (r_{GP}^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_{GP} \otimes \mathbf{r}_{GP}) \rho \, dV \\ &\quad + 2 \cdot \mathbf{1} \underbrace{\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r}_G \cdot \mathbf{r}_{GP}) \rho \, dV}_{=0} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_{GP} + \mathbf{r}_{GP} \otimes \mathbf{r}_G) \rho \, dV}_{=0} \end{aligned}$$

Las dos últimas integrales se anulan debido a que se reducen a factores constantes por integrales del tipo  $\int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_{GP} \rho \, dV = \mathbf{0}$ . Por lo tanto la expresión del campo tensorial de inercia resulta

$$\boxed{\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_G + M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G)}. \quad (8.65)$$

Desarrollando ésta en componentes:

$$I_{O,ij} = I_{G,ij} + M[r_G^2 \delta_{ij} - r_{G,i} r_{G,j}],$$

y matricialmente:

$$[\mathbf{I}_O] = [\mathbf{I}_G] + M(r_G^2 [\mathbf{1}] - \{\mathbf{r}_G\} \|\mathbf{r}_G\|).$$

Veamos a continuación algunas propiedades del campo tensorial de inercia.

a. *Ejes principales de inercia*

Sea un punto  $O$  sobre uno de los ejes principales de inercia en  $G$ . Entonces, tanto la dirección principal  $\mathbf{u} \|\mathbf{r}_G$  como las otras dos direcciones principales perpendiculares a  $\mathbf{u}$  son también principales en  $O$ . Para comprobar esto, distinguimos los dos casos, según que la dirección sea la del vector unitario  $\mathbf{u}$  o perpendicular a éste. En el primero,  $\mathbf{r}_G = \overline{OG} \mathbf{u}$ ; aplicando (8.65):

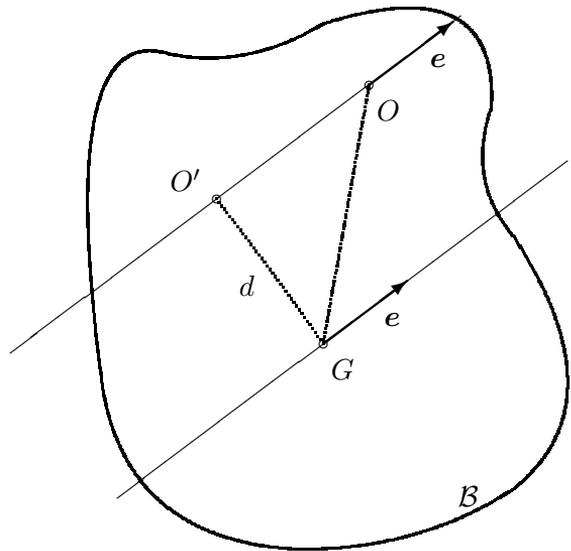
$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{I}_G \cdot \mathbf{u} + M[r_G^2 \mathbf{u} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot (r_G^2 \mathbf{u})] \\ &= \lambda \mathbf{u} + M \underbrace{[r_G^2 \mathbf{u} - r_G^2 \mathbf{u} \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}_{=1}]}_{=0} \\ &= \lambda \mathbf{u} \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>empleamos la notación  $\mathbf{r}_P \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{OP}$  para denotar al vector desde el origen  $O$  a un punto  $P$  explicitado en el subíndice



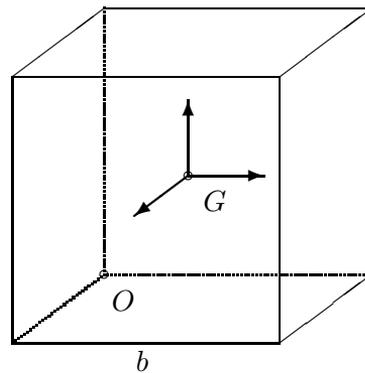
Figura 8.6: Teorema de Steiner: momento de inercia para un eje  $(O, \mathbf{e})$  paralelo a  $(G, \mathbf{e})$



Es inmediato ver que, para una dirección  $\mathbf{e}$  dada, el momento de inercia mínimo es el correspondiente a un eje  $(G, \mathbf{e})$  que pasa por  $G$ .

EJEMPLO 8.2: Continuando con el cubo del ejemplo 8.1 anterior se pretende ahora hallar el tensor de inercia en el centro de masas, respecto a unos ejes paralelos a las aristas del cubo, a partir del tensor de inercia obtenido antes en un vértice (8.63).

Figura 8.7: Obtención del tensor central de inercia de un cubo respecto de su centro  $G$



Aplicamos la expresión (8.65) del campo tensorial de inercia:

$$\mathbf{I}_G = \mathbf{I}_O - M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G).$$

El vector  $\mathbf{r}_G$  vale:

$$\|\mathbf{r}_G\| = \|b/2, b/2, b/2\| \Rightarrow \begin{cases} r_G^2 = \frac{3b^2}{4}; \\ r_{G,i} r_{G,j} = \frac{b^2}{4} \quad (\forall i, j). \end{cases}$$

luego:

$$[M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G)]_{ij} = M(r_G^2 \delta_{ij} - r_{G,i} r_{G,j}),$$

y su matriz de componentes es

$$M \frac{b^2}{4} \begin{pmatrix} 3-1 & -1 & -1 \\ -1 & 3-1 & -1 \\ -1 & -1 & 3-1 \end{pmatrix} = M \frac{b^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, a partir de (8.63),

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}_G] &= Mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix} - M \frac{b^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= Mb^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se comprueba pues que el triedro formado por las direcciones de las aristas es un triedro principal en  $G$ . Lo mismo se podría haber deducido por simetrías, ya que la dirección de cada arista en  $G$  forma un eje de simetría.

De hecho, por ser el tensor esférico (los tres momentos principales son iguales), la matriz de componentes es diagonal y cualquier eje es principal en  $G$ . El resultado habría sido el mismo para cualquier triedro de referencia cartesiano por el centro. El comportamiento de un cubo respecto al giro alrededor de su centro de masas es por lo tanto idéntico al de una esfera.

## 8.6. Rotación finita del sólido

### 8.6.1. Rotaciones infinitesimales y su composición

Supongamos un sólido  $\mathcal{B}$  con un punto fijo  $O$ , y un vector  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$  dirigido desde  $O$  a un punto  $P \in \mathcal{B}$ . Este vector está ligado al sólido, por lo que su matriz de coordenadas en una base ligada al mismo,  $\|\mathbf{x}\|^\circ = \|xyz\|$ ,

es constante a lo largo del movimiento. Por el contrario, si se considera un triedro fijo ( $OXYZ$ ), las coordenadas de  $\mathbf{x}$  variarán al moverse el sólido.

Supongamos que el movimiento es una rotación pequeña  $\epsilon$  alrededor de una determinada dirección. Sin pérdida de generalidad consideramos esta dirección según el eje  $Oz$ , por lo que la rotación la expresamos vectorialmente como  $\epsilon \mathbf{k}$ . Las nuevas coordenadas del vector  $\mathbf{x}$  en el triedro fijo después de esta rotación infinitesimal son (figura 8.8):

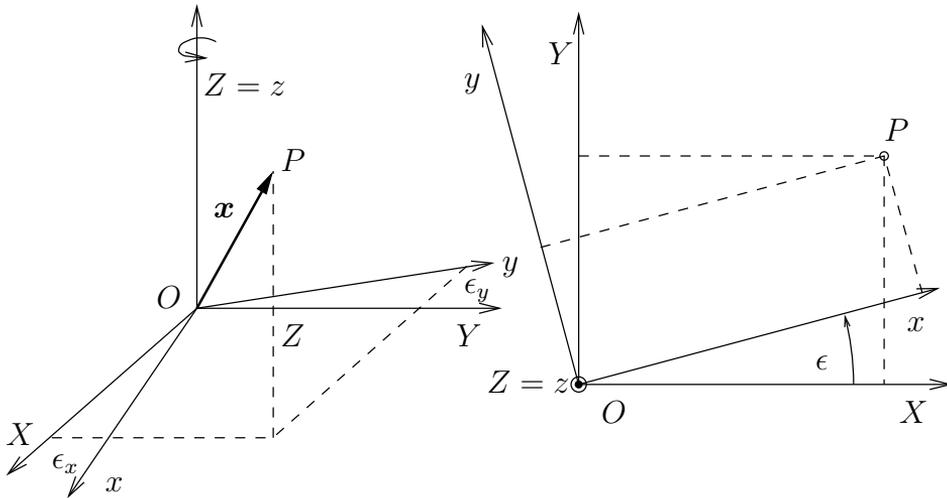


Figura 8.8: Rotación infinitesimal alrededor del eje  $z$ , en la que los ejes  $Oxyz$  giran solidariamente con el sólido, así como el vector posición  $\mathbf{x}$  de un punto  $P$  del sólido, mientras que los ejes  $OXYZ$  permanecen fijos.

$$\begin{aligned} X &= x \cos \epsilon - y \operatorname{sen} \epsilon = x - \epsilon y + \mathcal{O}(\epsilon^2); \\ Y &= x \operatorname{sen} \epsilon + y \cos \epsilon = y + \epsilon x + \mathcal{O}(\epsilon^2); \\ Z &= z. \end{aligned} \tag{8.66}$$

En forma matricial la expresión equivale a

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \epsilon \begin{Bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{Bmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{8.67}$$

En esta expresión, la matriz  $[\mathbf{J}_z] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  se denomina *generador de rotaciones infinitesimales alrededor de  $z$* , y corresponde a las coordenadas de

un tensor hemisimétrico  $\mathbf{J}_z$ . Suponiendo  $\epsilon$  suficientemente pequeño, la expresión (8.67), despreciando infinitésimos de orden dos o superior, equivale a la ecuación tensorial

$$\mathbf{x} = (\mathbf{1} + \epsilon \mathbf{J}_z) \cdot \mathbf{x}^\circ. \quad (8.68)$$

En esta expresión  $\mathbf{x} \equiv (X \ Y \ Z)^T$  es el vector de posición medido por un observador fijo, mientras que  $\mathbf{x}^\circ \equiv (x \ y \ z)^T$  es el *vector convectivo* de posición del punto  $P$ , es decir, un vector medido desde el punto de vista del observador móvil con el sólido, que es constante a lo largo del movimiento para una partícula dada. Este último vector puede interpretarse también como *coordenada material* de la partícula, ya que cada punto  $P \in \mathcal{B}$  está asociada a un vector constante  $\mathbf{x}^\circ$ .

Como todo tensor hemisimétrico,  $\mathbf{J}_z$  equivale a un producto vectorial (cf. apartado A.10). En esta ocasión el vector axial asociado es precisamente el versor del eje  $z$ :

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{J}_z \cdot \mathbf{a} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{a} \equiv (-a_y, a_x, 0)^T. \quad (8.69)$$

La ecuación (8.68) puede escribirse de forma incremental,

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ = \epsilon \mathbf{J}_z \cdot \mathbf{x}^\circ, \quad (8.70)$$

y en el límite infinitesimal ( $\epsilon \rightarrow d\phi$ ,  $\mathbf{x}^\circ \rightarrow \mathbf{x}$ )

$$d\mathbf{x} = d\phi \mathbf{J}_z \cdot \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad d\mathbf{x} = d\phi \mathbf{k} \wedge \mathbf{x}. \quad (8.71)$$

Definiendo la velocidad de rotación  $\boldsymbol{\Omega}_z \stackrel{\text{def}}{=} (d\phi/dt)\mathbf{k}$ , la ecuación anterior equivale a

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Omega}_z \wedge \mathbf{x}. \quad (8.72)$$

Como se ha dicho antes, la elección de la dirección  $z$  para la rotación no resta generalidad, siendo válida la expresión (8.72) para una rotación según una dirección cualquiera  $\boldsymbol{\Omega}$ . El razonamiento seguido establece por tanto la equivalencia entre una rotación infinitesimal y el campo de velocidades del sólido (4.10), estando ambas definidas por una aplicación hemisimétrica o equivalentemente por un producto vectorial.

**Composición de dos rotaciones infinitesimales.**— Supongamos ahora dos rotaciones infinitesimales sucesivas,

$$\begin{aligned} R_{\epsilon_1} : \mathbf{x}^\circ &\mapsto \mathbf{x}^1 = (\mathbf{1} + \epsilon_1 \mathbf{J}_1) \cdot \mathbf{x}^\circ; \\ R_{\epsilon_2} : \mathbf{x}^1 &\mapsto \mathbf{x}^2 = (\mathbf{1} + \epsilon_2 \mathbf{J}_2) \cdot \mathbf{x}^1. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de  $\mathbf{x}^1$  y despreciando infinitésimos de orden superior al primero, la composición de las dos puede expresarse como

$$\begin{aligned} R_{\epsilon_2} \circ R_{\epsilon_1} : \mathbf{x}^\circ \mapsto \mathbf{x}^2 &= (\mathbf{1} + \epsilon_1 \mathbf{J}_1 + \epsilon_2 \mathbf{J}_2) \cdot \mathbf{x}^\circ + \epsilon_1 \epsilon_2 (\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{J}_1) \cdot \mathbf{x}^\circ \\ &\approx (\mathbf{1} + \epsilon_1 \mathbf{J}_1 + \epsilon_2 \mathbf{J}_2) \cdot \mathbf{x}^\circ. \end{aligned} \quad (8.73)$$

Esto puede interpretarse como una rotación infinitesimal suma de las dos,

$$\epsilon_1 \mathbf{J}_1 + \epsilon_2 \mathbf{J}_2. \quad (8.74)$$

De forma equivalente, puesto que la primera rotación equivale al producto vectorial por  $\epsilon_1$  y la segunda por  $\epsilon_2$ , se comprueba igualmente que la composición de las dos equivale al producto vectorial por la suma de ambos vectores,  $\epsilon_1 + \epsilon_2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 &= \mathbf{x}^\circ + \epsilon_1 \wedge \mathbf{x}^\circ; \\ \mathbf{x}^2 &= \mathbf{x}^1 + \epsilon_2 \wedge \mathbf{x}^1 \\ &= \mathbf{x}^\circ + (\epsilon_1 + \epsilon_2) \wedge \mathbf{x}^\circ + \underbrace{\epsilon_2 \wedge (\epsilon_1 \wedge \mathbf{x}^\circ)}_{\approx 0}. \end{aligned}$$

Tanto la suma de tensores de orden dos como la suma de vectores son operaciones conmutativas, por lo que igualmente *la composición de rotaciones infinitesimales es conmutativa*, no importando el orden en que se produzca. Como se ha dicho antes, esta propiedad encuentra su equivalente en el campo de velocidades del sólido (4.5), en el que la composición de dos rotaciones por  $O$  es otra rotación con velocidad angular suma de las anteriores, no importando el orden de los sumandos en esta adición.

### 8.6.2. Composición de rotaciones finitas

Al contrario que las rotaciones infinitesimales, *la composición de rotaciones finitas no es una operación conmutativa*. Esto se puede comprobar fácilmente aplicando sucesivamente a un sólido dos rotaciones finitas elementales según ejes distintos, en diferente orden (figura 8.9). Esta falta de conmutatividad se debe a que, como se verá a continuación, las rotaciones finitas se caracterizan como producto por un tensor de rotación. La composición de rotaciones equivale pues al producto de tensores, operación que no es conmutativa.

De forma matricial, las componentes del vector rotado vienen dadas por el producto por una matriz ortogonal, y la composición de rotaciones por el producto de las matrices correspondientes. Comenzaremos por desarrollar esta interpretación matricial a través del cambio de base asociado a la rotación.

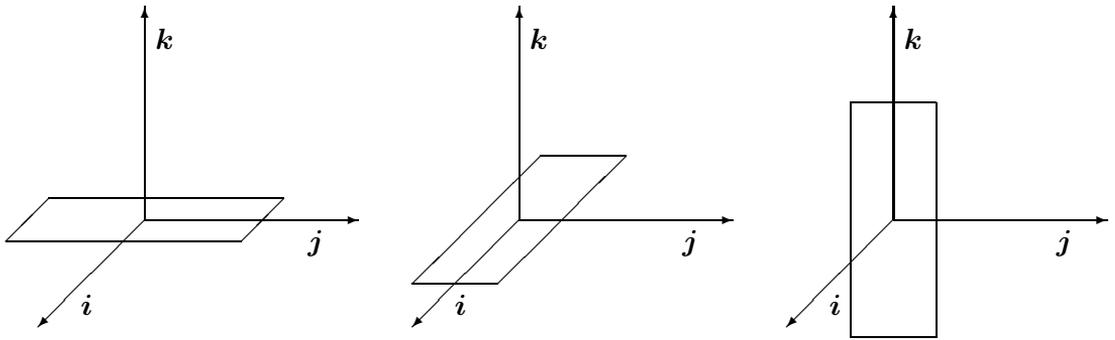
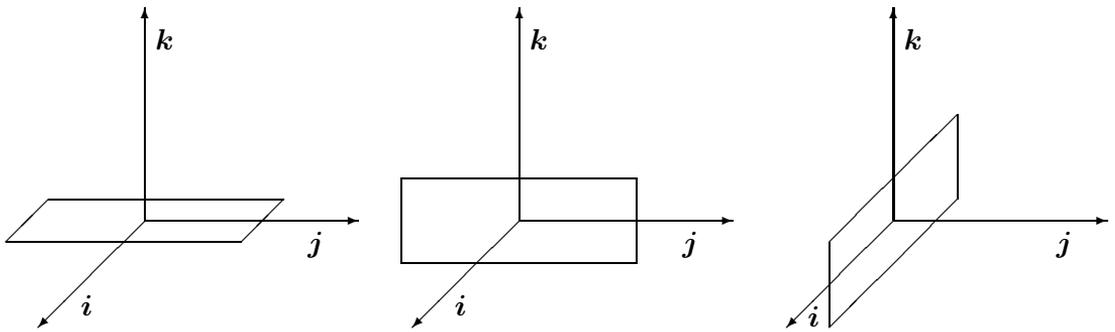
a) rotación  $\frac{\pi}{2}\mathbf{k}$  seguida de  $\frac{\pi}{2}\mathbf{j}$ .b) rotación  $\frac{\pi}{2}\mathbf{j}$  seguida de  $\frac{\pi}{2}\mathbf{k}$ .

Figura 8.9: *Las rotaciones finitas no son conmutativas: en el caso a) se realiza primero la rotación  $(\pi/2)\mathbf{k}$  seguida de  $(\pi/2)\mathbf{j}$ ; en el caso b)  $(\pi/2)\mathbf{j}$  seguida de  $(\pi/2)\mathbf{k}$ , siendo el resultado claramente diferente.*

### 8.6.3. La Rotación finita como cambio de base

Sea  $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  una base ortonormal ligada al sólido (*triedro del cuerpo*) y  $(O; \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  una base ortonormal fija (*triedro fijo*). Se puede interpretar la rotación del sólido a partir del cambio de base entre ambos triedros.

Supongamos este definido por una matriz  $[\mathbf{R}]$ , de forma que<sup>9</sup>:

$$\|i j k\| = \|\mathbf{I J K}\| [\mathbf{R}]. \quad (8.75)$$

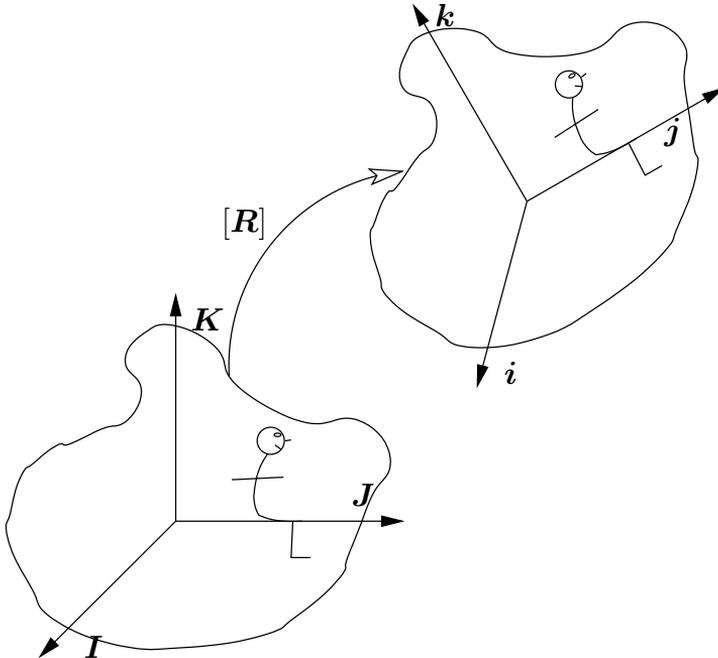


Figura 8.10:  
La rotación finita equivale a un cambio de base definido por la matriz  $[\mathbf{R}]$ , que permita pasar del triedro fijo  $\|\mathbf{I J K}\|$  al triedro del cuerpo  $\|i j k\|$

La relación de cambio de coordenadas asociada, denominando  $(X, Y, Z)$  a las coordenadas en el triedro fijo y  $(x, y, z)$  las del triedro del cuerpo, es

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \quad (8.76)$$

La rotación del sólido puede por tanto interpretarse como un cambio de base, definido por la matriz  $[\mathbf{R}]$ , que multiplica al vector columna de coordenadas «convectivas» para obtener las nuevas coordenadas. En esta interpretación, se trataría de distintas coordenadas (según dos triedros diferentes) para un mismo vector.

<sup>9</sup> Recordemos que, según A.5, otra manera de definir el cambio de base es mediante las siguientes expresiones de transformación de los vectores de la misma:  $i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I}$ ;  $j = \mathbf{R} \cdot \mathbf{J}$ ;  $k = \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}$ , donde el tensor  $\mathbf{R}$  es aquel cuya matriz de coordenadas en la base  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  es precisamente  $[\mathbf{R}]$ , la misma matriz de la expresión (8.75).

La superposición de dos rotaciones sucesivas, asociadas a dos matrices  $[\mathbf{R}_1]$  y  $[\mathbf{R}_2]$ , equivale al producto de las mismas<sup>10</sup>,  $[\mathbf{R}_2][\mathbf{R}_1]$ . Como se sabe, el producto de matrices *no es una operación conmutativa*:  $[\mathbf{R}_1][\mathbf{R}_2] \neq [\mathbf{R}_2][\mathbf{R}_1]$ .

La condición de que ambos triedros sean ortonormales obliga a que la matriz de cambio sea ortogonal,  $[\mathbf{R}]^T = [\mathbf{R}]^{-1}$  (cf. apéndice A). La matriz  $[\mathbf{R}]$  es de dimensión  $3 \times 3$  y tiene por tanto 9 componentes, pero la propiedad de ortogonalidad impone 6 condiciones escalares:

$$\sum_{k=1}^3 R_{ik} R_{jk} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \leq j), \quad (8.77)$$

por lo que el conjunto de dichas matrices se podrá por tanto representar mediante  $9 - 6 = 3$  parámetros independientes.

De esta manera, la orientación del triedro del cuerpo  $\|\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}\|$  queda definida por tres grados de libertad. Estos caracterizan el cambio del triedro fijo  $\|\mathbf{I} \mathbf{J} \mathbf{K}\|$  al triedro del cuerpo  $\|\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}\|$ , que se mueve con el sólido y define por tanto su orientación.

#### 8.6.4. La Rotación finita como transformación ortogonal

El movimiento más general de un sólido rígido con un punto fijo se representa mediante una transformación lineal  $\mathbf{R}$ , es decir, un tensor de orden dos (cf. apéndice A). Veremos además que este tensor es ortogonal propio.

Sea  $\mathbf{x}^\circ$  el vector posición de una partícula del sólido, medido desde el punto fijo  $O$ , en un instante inicial que tomaremos como *configuración de referencia*. Este vector  $\mathbf{x}^\circ$  se denomina *convectivo*, siendo constante a lo largo del movimiento para una partícula dada del sólido (siempre representa el vector posición en la configuración de referencia). De forma equivalente,  $\mathbf{x}^\circ$  puede considerarse como el vector posición medido por un observador móvil con el sólido, para el que la situación de los puntos del sólido es fija.

Por otra parte, sea  $\mathbf{x}$  el vector posición de un punto del sólido, para un observador fijo o inercial, en un instante genérico del movimiento, que denominaremos *configuración rotada*. La relación con el vector posición con-

<sup>10</sup>En efecto, si  $\{\mathbf{x}^1\} = [\mathbf{R}_1]\{\mathbf{x}^0\}$ ,  $\{\mathbf{x}^2\} = [\mathbf{R}_2]\{\mathbf{x}^1\} = [\mathbf{R}_2][\mathbf{R}_1]\{\mathbf{x}^0\}$

vectivo  $\mathbf{x}^\circ$  se establece mediante un tensor<sup>11</sup>  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ \quad \Rightarrow \quad x_i = R_{ij}x_j^\circ. \quad (8.78)$$

Es fácil comprobar porqué esta transformación debe ser ortogonal: al tratarse de un sólido rígido, la distancia al punto fijo tiene que coincidir en ambas configuraciones, la inicial y la rotada; desarrollando esta condición,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} &= (\mathbf{x}^\circ \cdot \mathbf{R}^\top) \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ) = \mathbf{x}^\circ \cdot ((\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{x}^\circ) \\ &= \mathbf{x}^\circ \cdot \mathbf{x}^\circ. \end{aligned}$$

Se deduce por tanto que el tensor  $\mathbf{R}$  debe cumplir la condición de ortogonalidad (cf. apéndice A):

$$\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{R} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top. \quad (8.79)$$

Tomando determinantes en la expresión anterior,

$$\det(\mathbf{R}^\top) \det(\mathbf{R}) = (\det(\mathbf{R}))^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{R}) = \pm 1. \quad (8.80)$$

De las dos posibilidades que se ofrecen para el signo del determinante, debe tomarse  $+1$ , lo que corresponde a una *transformación ortogonal propia*. Las transformaciones ortogonales cuyo determinante vale  $-1$  se denominan impropias, y producen, además de una rotación, una inversión en los ejes equivalente a la imagen reflejada en un espejo, lo que conllevaría inversión de los volúmenes.

Resumiendo lo expuesto en este apartado y anterior (8.6.3), es posible interpretar la rotación  $\mathbf{R}$  desde dos puntos de vista distintos:

1. *Rotación activa*: El tensor  $\mathbf{R}$  transforma el vector  $\mathbf{x}^\circ$  en otro vector distinto  $\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ$ .
2. *Rotación pasiva*: El tensor  $\mathbf{R}$ , o su matriz de coordenadas asociada  $[\mathbf{R}] = [R_{ij}]$ , define un cambio de base, del triedro fijo  $(\mathbf{E}_i) \equiv (\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  al triedro del cuerpo  $(\mathbf{e}_i) \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , según las relaciones de cambio (8.75):  $\mathbf{e}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_i = R_{ji}\mathbf{E}_j$ . Denominando  $\{\mathbf{x}\}^\circ = (xyz)^\top$  a las coordenadas del vector posición de un punto en el triedro del cuerpo y  $\{\mathbf{x}\} = (XYZ)^\top$  a las del triedro fijo, la relación entre éstas debe ser (8.76):  $\{\mathbf{x}\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{x}\}^\circ$ .

<sup>11</sup>Puede demostrarse que esta transformación es necesariamente lineal, teniendo en cuenta en primer lugar la conservación de las distancias relativas entre  $\mathbf{x}$  y su producto por un escalar  $\alpha\mathbf{x}$ , que conduce a  $\mathbf{R}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{R}(\mathbf{x})$ ; por otra parte, la conservación de los ángulos entre  $\mathbf{x}_1$  y  $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$  conduce a  $\mathbf{R}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{R}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2)$ , por lo que se puede identificar con un tensor.

Nótese que en la acepción como rotación pasiva, se consideran distintas coordenadas para un mismo vector, en dos bases distintas: el sólido permanece mientras es el triedro de referencia el que rota. Por el contrario, la interpretación activa de la rotación considera dos vectores distintos: es el propio sólido el que rota.

La interpretación según uno u otro punto de vista es equivalente en cuanto a las expresiones en coordenadas, pudiendo adoptarse la que más convenga en cada caso. En lo que sigue consideraremos en principio la interpretación *activa*.

Por último, añadamos que una forma explícita de obtener el tensor de rotación, a partir de los vectores unitarios de los triedros fijo y rotado, es:

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{E}_k \otimes \mathbf{e}_k = \mathbf{I} \otimes \mathbf{i} + \mathbf{J} \otimes \mathbf{j} + \mathbf{K} \otimes \mathbf{k}. \quad (8.81)$$

### 8.6.5. Teorema de Euler

*«El desplazamiento más general de un sólido con un punto fijo es un giro alrededor de algún eje».*

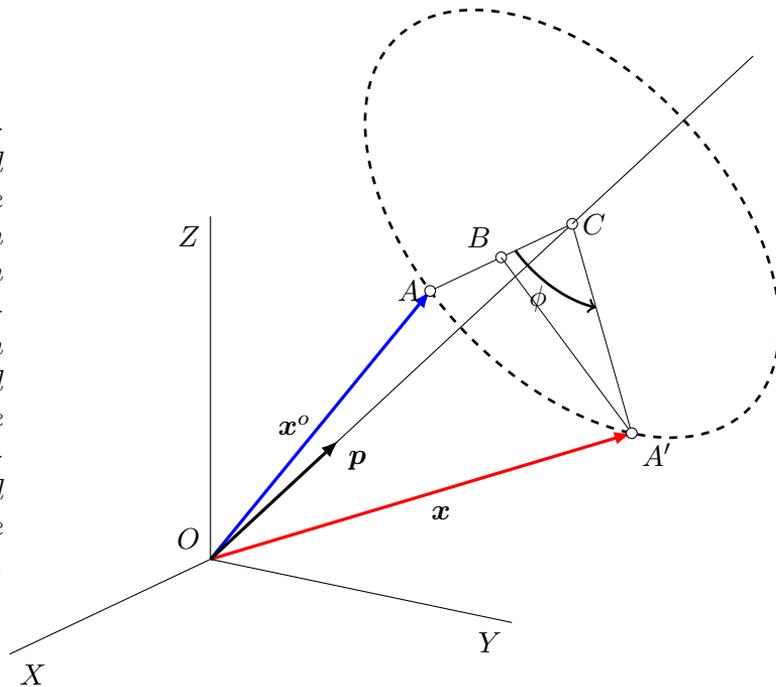
Este enunciado puede parecer trivial a primera vista, teniendo en cuenta que a menudo hemos asimilado los términos «movimiento de un sólido con un punto fijo» con «rotación de un sólido». Sin embargo, una lectura más cuidadosa permite comprobar que no resulta obvio. El significado que tiene este teorema es que, para todo movimiento de un sólido con un punto fijo, existe un determinado eje de rotación  $(O, \mathbf{p})$  que produce el mismo efecto girando el sólido alrededor de él un determinado ángulo  $\phi$ . Como ejemplo ilustrativo, considérense las dos rotaciones compuestas definidas en la figura 8.9, en las que no resulta inmediato identificar para cada una de ellas el eje de rotación resultante.

DEMOSTRACIÓN.— Si el movimiento es una rotación alrededor de un eje, los puntos del mismo no sufrirán cambio alguno, mientras que los puntos fuera del eje efectuarán un giro de magnitud angular finita  $\phi$  alrededor del mismo. Por tanto, el versor  $\mathbf{p}$  que define la dirección del eje debe ser invariante en la transformación definida por  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}.$$

Esta ecuación indica que  $\mathbf{p}$  debe ser un vector propio de  $\mathbf{R}$ , con autovalor  $\lambda = +1$ . El teorema quedará demostrado por tanto si probamos que  $\mathbf{R}$  posee

Figura 8.11: *Teorema de Euler: el desplazamiento de un sólido con un punto fijo  $O$  es un giro de valor  $\phi$  alrededor de algún eje  $(O, \mathbf{p})$ . Para el punto  $A$  el giro se desarrolla alrededor de  $C$ , por el cual el punto  $A$  se transforma en  $A'$ , y  $\mathbf{x}^\circ$  en  $\mathbf{x}$ .*



dicho autovalor, en cuyo caso la dirección buscada del eje de giro será la del vector propio correspondiente. Para ello partimos de la igualdad trivial siguiente, que se deduce inmediatamente de la condición de ortogonalidad (8.79):

$$(\mathbf{R} - \mathbf{1}) \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{1} - \mathbf{R}^T;$$

tomando determinantes,

$$|\mathbf{R} - \mathbf{1}| \cdot |\mathbf{R}^T| = |\mathbf{1} - \mathbf{R}^T|;$$

considerando en esta expresión que el determinante de un tensor es igual al del traspuesto, y que el determinante de una rotación propia vale +1,<sup>12</sup>

$$|\mathbf{1} - \mathbf{R}^T| = (-1)^3 |\mathbf{R}^T - \mathbf{1}| = -|\mathbf{R} - \mathbf{1}|,$$

llegándose finalmente a

$$|\mathbf{R} - \mathbf{1}| = 0.$$

Esta igualdad garantiza el cumplimiento de la ecuación característica ( $|\mathbf{R} - \lambda \mathbf{1}| = 0$ ) para el autovalor  $\lambda = +1$ . Admitiendo además que el autovalor

<sup>12</sup> Se cumple  $|\mathbf{R}^T| = |\mathbf{R}| = +1$  y  $|\mathbf{R}^T - \mathbf{1}| = |\mathbf{R} - \mathbf{1}|$

$\lambda = +1$  es único, cuestión que no demostraremos por no prolongar esta discusión, quedaría probado el teorema.  $\square$

El teorema de Euler es coherente con el comentario realizado antes sobre los tres grados de libertad que definen la rotación finita debido a las condiciones de ortogonalidad (8.77). Parece lógico buscar una correspondencia de estos tres parámetros con algún vector del espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ . Este podría ser el denominado *vector de rotación de Euler*, cuya dirección es  $\mathbf{p}$  y el módulo es el ángulo girado  $\phi$ .

A pesar de esto, debemos insistir en que no se puede considerar los movimientos del sólido con un punto fijo (o «rotaciones») como vectores, lo que implicaría su aditividad conmutativa para la composición de dos rotaciones. Hemos visto que la composición de dos rotaciones finitas consecutivas no es conmutativa, por lo que éstas no poseen estructura de espacio vectorial. Se debe seguir considerando a éstas como transformaciones lineales ortogonales (definidas mediante tensores o matrices ortogonales) y no como vectores, a pesar de que estén caracterizadas por tres parámetros que podrían servir para definir un vector en  $\mathbb{R}^3$ . Para precisar este aspecto y no inducir a error se suele decir que  $\mathbf{p}$  es un «pseudo-vector»<sup>13</sup>.

Un corolario del Teorema de Euler es el *Teorema de Chasles*, cuyo enunciado afirma:

*«El desplazamiento más general de un sólido rígido es una traslación más una rotación».*

La comprobación es inmediata, ya que al liberar la ligadura del punto fijo se introducen tres grados de libertad de traslación de dicho punto, que no afectan a la orientación del sólido. Chasles propuso también un enunciado más fuerte de este teorema, que no demostraremos aquí, según el cual es posible escoger un origen de coordenadas de forma que los ejes de traslación y rotación coincidan, siendo entonces el movimiento el de un sacacorchos (helicoidal).

### 8.6.6. Relación entre rotaciones finitas e infinitesimales

#### Generación del tensor de rotación $R$ integrando las rotaciones infinitesimales

Sea una rotación finita de ángulo  $\phi$  alrededor de cierto eje, que para concretar tomaremos como el  $Oz$ , sin pérdida de generalidad. Es decir,

<sup>13</sup>Las rotaciones finitas forman un grupo no conmutativo, denominado  $SO(3)$  o *grupo especial ortogonal*.

la rotación finita puede caracterizarse por el vector de Euler asociado  $\phi \mathbf{k}$ . Podemos imaginar el giro completo  $\phi$  como composición de  $n$  giros infinitesimales  $\phi/n$ ,  $n \rightarrow \infty$ . En el límite, cada uno de estos giros elementales está asociado a la transformación  $(\mathbf{1} + \frac{\phi}{n} \mathbf{J}_z)$ , siendo  $\mathbf{J}_z$  el tensor hemisimétrico asociado al vector axial  $\mathbf{k}$  (ver ecuación 8.69). La composición de estos giros elementales se asocia al producto de todos los tensores elementales correspondientes,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbf{1} + \frac{\phi}{n} \mathbf{J}_z \right)^n = \mathbf{1} + \phi \mathbf{J}_z + \frac{\phi^2}{2} \mathbf{J}_z^2 + \dots + \frac{\phi^n}{n!} \mathbf{J}_z^n + \dots \quad (8.82)$$

Este desarrollo, por analogía con la función exponencial de exponente real<sup>14</sup>, se define como la exponencial del tensor  $\phi \mathbf{J}_z$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbf{1} + \frac{\phi}{n} \mathbf{J}_z \right)^n = \sum_0^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} \mathbf{J}_z^n = e^{\phi \mathbf{J}_z}. \quad (8.83)$$

En el caso que nos ocupa, se puede comprobar sumando la serie (8.82) que el desarrollo de la exponencial da lugar a la siguiente matriz de componentes, que corresponde a un giro  $\phi \mathbf{k}$ :

$$\left[ e^{\phi \mathbf{J}_z} \right] = [\mathbf{R}(\phi \mathbf{k})] = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 \\ \text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.84)$$

Otra forma de justificar la exponencial de (8.83) es considerando que una rotación infinitesimal elemental se puede expresar como

$$d\mathbf{x} = d\phi \mathbf{k} \wedge \mathbf{x} = d\phi \mathbf{J}_z \cdot \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\phi} = \mathbf{J}_z \cdot \mathbf{x}. \quad (8.85)$$

Esta ecuación diferencial vectorial es similar a la siguiente ecuación diferencial escalar, cuya integral es la exponencial:

$$\frac{dy}{dx} = ay \quad \Rightarrow \quad y = y_0 e^{ax}. \quad (8.86)$$

Análogamente, la solución de la ecuación (8.85) se puede escribir también como una exponencial,

$$\mathbf{x} = e^{\phi \mathbf{J}_z} \cdot \mathbf{x}^0. \quad (8.87)$$

Comprobamos que se obtiene el mismo resultado que antes (8.83) para el tensor de rotación.

<sup>14</sup>recordemos:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n = e^x$

### Obtención de la velocidad angular $\Omega$ derivando el tensor de rotación $R$

Desde el otro punto de vista, si derivamos la expresión de la transformación de rotación (8.78) podemos obtener también una relación entre la rotación finita y la rotación infinitesimal, caracterizada esta última por la velocidad de rotación. En efecto, teniendo en cuenta que en (8.78) el vector  $\mathbf{x}^\circ$  que representa la posición de una partícula para un observador ligado al sólido es constante:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x}^\circ. \quad (8.88)$$

Podemos eliminar ahora  $\mathbf{x}^\circ = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x}$ , resultando

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x}) = (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{x}. \quad (8.89)$$

El operador  $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$  que aparece en esta fórmula es hemisimétrico, como se comprueba fácilmente<sup>15</sup>, por lo que cabe asociarlo al producto vectorial por un vector axial asociado (cf. apartado A.10), que denominamos  $\Omega$ . Al operador hemisimétrico lo denominamos  $\widehat{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$ :

$$(\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{x} = \widehat{\Omega} \cdot \mathbf{x} = \Omega \wedge \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x}. \quad (8.90)$$

El resultado final es por tanto

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \Omega \wedge \mathbf{x},$$

expresión que coincide con el campo de velocidades de un sólido rígido respecto del punto  $O$  fijo, véase (4.10), lo que justifica la consideración de dicho vector axial  $\Omega$  como velocidad de rotación del sólido.

#### 8.6.7. Parametrización de la rotación; fórmula de Rodrigues y parámetros de Euler

La rotación queda definida por la ecuación (8.78):

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ; \quad (8.91)$$

veamos cómo se puede expresar el tensor  $\mathbf{R}$  correspondiente a esta transformación de manera explícita, a partir de la rotación  $(\mathbf{p}, \phi)$  definida por el teorema de Euler.

<sup>15</sup>En efecto:  $\mathbf{0} = \frac{d}{dt} \mathbf{1} = \frac{d}{dt} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T) = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^T = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T)^T$ .

Refiriéndose a la figura 8.11 podemos expresar los vectores posición mediante las igualdades vectoriales siguientes:

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}_{OC} + \mathbf{r}_{CA'}; \tag{8.92}$$

$$\mathbf{x}^\circ = \mathbf{r}_{OC} + \mathbf{r}_{CA}. \tag{8.93}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{OC} &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}; \mathbf{r}_{CA'} &&= \mathbf{r}_{CB} + \mathbf{r}_{BA'} \\ &= [\mathbf{x}^\circ - (\mathbf{x}^\circ \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}] \cos \phi + (\mathbf{p} \wedge \mathbf{x}^\circ) \sin \phi; \end{aligned}$$

desarrollando estos términos mediante (8.92) y (8.93),

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^\circ \cos \phi + (\mathbf{x}^\circ \cdot \mathbf{p})\mathbf{p} (1 - \cos \phi) + (\mathbf{p} \wedge \mathbf{x}^\circ) \sin \phi \tag{8.94}$$

expresión que constituye la denominada *fórmula de Euler-Rodrigues*. De forma equivalente, también se puede expresar como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^\circ \cdot \cos \phi + (\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}^\circ (1 - \cos \phi) + (\mathbf{p} \wedge \mathbf{x}^\circ) \sin \phi \tag{8.95}$$

De aquí se deduce inmediatamente el operador de la transformación correspondiente que es

$$\mathbf{R} = \underbrace{\mathbf{1} \cos \phi}_{\substack{\text{tensor} \\ \text{diagonal}}} + \underbrace{\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} (1 - \cos \phi)}_{\substack{\text{tensor} \\ \text{simétrico}}} + \underbrace{\widehat{\mathbf{p}} \sin \phi}_{\substack{\text{tensor} \\ \text{hemisimétrico}}} \tag{8.96}$$

donde el símbolo  $\widehat{\mathbf{p}}$  representa el tensor definido por la aplicación hemisimétrica correspondiente al producto vectorial por  $\mathbf{p}$ :

$$\forall \mathbf{a}, \quad \widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{a}.$$

Se comprueba pues en (8.96) que el tensor ortogonal  $\mathbf{R}$  de la rotación resultante se descompone en tres partes: una diagonal, otra simétrica, y otra hemisimétrica<sup>16</sup>.

Cuando el ángulo girado  $\phi$  es muy pequeño, desarrollando en serie ( $\sin \phi$ ) y ( $\cos \phi$ ) y despreciando infinitésimos de segundo orden, la parte diagonal se convierte en la identidad; la parte simétrica, afectada de  $(1 - \cos \phi)$ , se hace despreciable; y la parte hemisimétrica, afectada de  $\sin \phi \rightarrow \phi$ , se convierte

<sup>16</sup> Otras expresiones equivalentes de la fórmula de Euler-Rodrigues son  $\mathbf{R} = \mathbf{1} + (1 - \cos \phi)\widehat{\mathbf{p}}^2 + \sin \phi \widehat{\mathbf{p}}$ , o  $\mathbf{R} = \mathbf{1} + \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\phi/2)}{(\phi/2)^2} \widehat{\phi}^2 + \frac{\sin \phi}{\phi} \widehat{\phi}$ , siendo  $\phi = \phi \mathbf{p}$ .

en el producto vectorial por el vector de rotación infinitesimal (dirección  $\mathbf{p}$  y módulo  $\phi$  infinitésimo). Por lo tanto, el incremento infinitesimal de  $\mathbf{x}$ , para una rotación elemental, equivale a un producto vectorial. Esto coincide con la descripción antes realizada para giros infinitesimales (apartado 8.6.1).

Para definir la rotación se podrían emplear los 4 parámetros que definen el vector de rotación de Euler:

$$\{\phi, p_1, p_2, p_3\}, \quad (8.97)$$

estando sujetos a la ligadura que expresa que el módulo de  $\mathbf{p}$  es la unidad:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (8.98)$$

Esta manera de caracterizar el movimiento del sólido con un punto fijo, en función del ángulo girado y la dirección del eje de rotación, resulta particularmente intuitiva y fácil de visualizar. Sin embargo no es la única forma para describir la rotación, ni tampoco la más conveniente en la práctica, debido a que en general no es inmediata la obtención de la dirección de rotación  $\mathbf{p}$ .

Existen otras parametrizaciones posibles para definir la rotación del sólido. Una de las más empleadas es la definida por los denominados *parámetros de Euler*:

$$e_0 = \cos \frac{\phi}{2}; \quad e_1 = p_1 \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}; \quad e_2 = p_2 \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}; \quad e_3 = p_3 \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}.$$

Estos cuatro parámetros constituyen un *cuaternio* y se hallan sujetos a la ligadura

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1,$$

equivaliendo por tanto a 3 grados de libertad. Los parámetros de Euler resultan ventajosos para su uso en modelos numéricos de cálculo, siendo empleados en numerosos programas de ordenador para cinemática y dinámica de mecanismos.

Por último, otra forma para definir la rotación finita es la caracterizada por los *ángulos de Euler*, que será la que emplearemos de manera preferente en este curso, por ser la más conveniente para el desarrollo analítico de las expresiones.

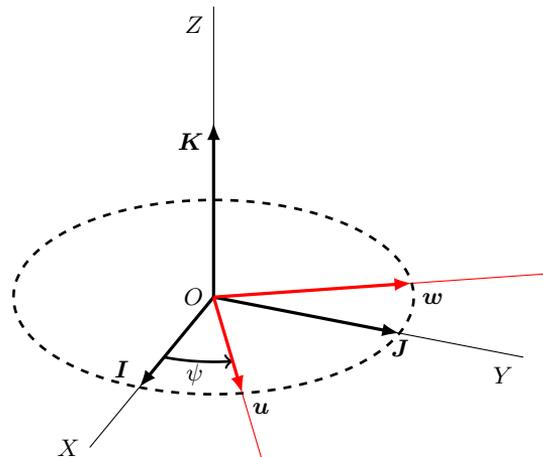
### 8.6.8. Ángulos de Euler

La manera que emplearemos en lo sucesivo para caracterizar la orientación del sólido será mediante los *ángulos de Euler*. Definiremos estos a

partir de tres rotaciones elementales, que interpretaremos como sucesivos cambios de base (apartado 8.6.3), partiendo del triedro fijo  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ , hasta obtener el triedro del cuerpo  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Estos cambios son rotaciones del triedro efectuadas por orden según el esquema «313»: primer giro respecto del eje 3, seguido de un giro respecto del eje transformado 1, y por último un nuevo giro alrededor del nuevo eje 3.

**Precesión,  $\psi\mathbf{K}$ .**— En primer lugar se efectúa un giro de magnitud  $\psi$  en torno al eje  $\mathbf{K}$ , pasando del triedro  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  al triedro  $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K})$ . Refiriéndose a la figura 8.12, las expresiones de los vectores del nuevo triedro son:

Figura 8.12: rotación  $\psi\mathbf{K}$  (precesión)



$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{I} \cos \psi + \mathbf{J} \operatorname{sen} \psi, \\ \mathbf{w} &= -\mathbf{I} \operatorname{sen} \psi + \mathbf{J} \cos \psi. \end{aligned}$$

La expresión matricial equivalente es

$$\|\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}\| = \|\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\| \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & 0 \\ \operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_\psi]}.$$

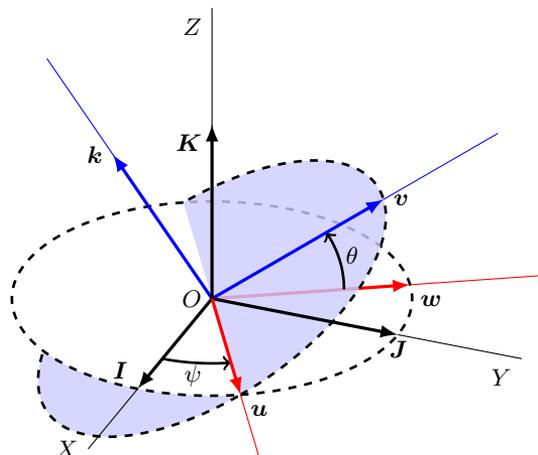
La matriz de rotación inversa es:

$$[\mathbf{R}_\psi]^{-1} = [\mathbf{R}_\psi]^T = \begin{pmatrix} \cos \psi & \operatorname{sen} \psi & 0 \\ -\operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

equivalente a un giro de  $(-\psi)$  alrededor de  $\mathbf{K}$ .

**Nutación,  $\theta\mathbf{u}$ .**— Se define como un giro de ángulo  $\theta$  en torno al eje  $\mathbf{u}$ , obteniendo a partir del triedro  $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K})$  el llamado *triedro intermedio*,  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$ . La operación queda ilustrada en la figura 8.13, siendo la expresión matricial del cambio:

Figura 8.13: rotación  $\theta\mathbf{u}$  (nutación)



$$\|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\| = \|\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}\| \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_\theta]}.$$

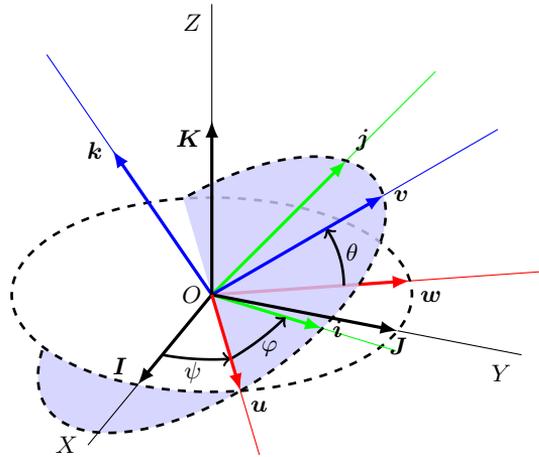
**Rotación propia,  $\varphi\mathbf{k}$ .**— La última operación consiste en un giro de magnitud  $\varphi$  alrededor del eje  $\mathbf{k}$ , obteniendo finalmente a partir del triedro intermedio  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$  el *triedro del cuerpo*  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  (figura 8.14). La expresión matricial es:

$$\|\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\| = \|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\| \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi & 0 \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_\varphi]}.$$

La rotación total hasta obtener finalmente el triedro del cuerpo será la composición de las tres rotaciones consecutivas:

$$\left. \begin{aligned} \|\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}\| &= \|\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\| \cdot [\mathbf{R}_\psi] \\ \|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\| &= \|\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{k}\| \cdot [\mathbf{R}_\theta] \\ \|\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\| &= \|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\| \cdot [\mathbf{R}_\varphi] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\| = \|\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\| \cdot [\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi],$$

Figura 8.14: rotación  $\varphi \mathbf{k}$  (rotación propia)



por tanto la matriz de rotación total es<sup>17</sup>

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi].$$

Su expresión en función de los ángulos de Euler resulta

$$[\mathbf{R}] = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \text{sen } \psi \cos \theta \text{ sen } \varphi; & -\cos \psi \text{ sen } \varphi - \text{sen } \psi \cos \theta \cos \varphi; & \text{sen } \psi \text{ sen } \theta \\ \text{sen } \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \text{ sen } \varphi; & -\text{sen } \psi \text{ sen } \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi; & -\cos \psi \text{ sen } \theta \\ \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi; & \text{sen } \theta \cos \varphi; & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (8.99)$$

Dejamos como ejercicio sugerido al lector la comprobación de que se verifica la condición de ortogonalidad,  $[\mathbf{R}]^{-1} = [\mathbf{R}]^T$ .

De los triedros manejados los más utilizados a efectos prácticos son el triedro fijo  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  y el triedro del cuerpo  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . A veces interesa también emplear también el denominado triedro intermedio,  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  cuya relación con el triedro fijo viene dada por

$$\|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\| = \|\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\| \cdot [\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta],$$

siendo la matriz de transformación correspondiente a este triedro

$$[\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi \cos \theta & \text{sen } \psi \text{ sen } \theta \\ \text{sen } \psi & \cos \psi \cos \theta & -\cos \psi \text{ sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

<sup>17</sup> La interpretación de esta rotación como transformación *activa* indica que sobre el sólido se efectúa primero  $\mathbf{R}_\varphi$  seguida de  $\mathbf{R}_\theta$  y por último  $\mathbf{R}_\psi$ . Por el contrario para la interpretación *pasiva* como cambios del triedro o base sigue el orden inverso, en el que el primer cambio ha sido  $[\mathbf{R}_\psi]$  seguido de  $[\mathbf{R}_\theta]$  y de  $[\mathbf{R}_\varphi]$ .

Para calcular las matrices inversas haremos uso en general de la condición de ortogonalidad, evaluando en su lugar las traspuestas:

$$\begin{aligned}([\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta])^{-1} &= ([\mathbf{R}_\varphi] \cdot [\mathbf{R}_\theta])^T; \\([\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi])^{-1} &= ([\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi])^T.\end{aligned}$$

Hacemos notar que una rotación general siempre se puede descomponer de esta manera, por lo que los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$  son una parametrización adecuada de las rotaciones.

Sin embargo, existen posiciones singulares en las que la representación mediante ángulos de Euler no es única. Por ejemplo, basta considerar los casos  $\theta = 0$  ó  $\theta = \pi$ , correspondientes a rotaciones alrededor del eje  $(O, \mathbf{k})$ , en los que la descomposición del giro entre  $\psi$  y  $\varphi$  no es unívoca.

### 8.6.9. Expresiones de la velocidad de rotación

La ecuación de la dinámica del sólido (8.8) determina la derivada del momento cinético, que a su vez depende linealmente de la velocidad de rotación (8.29). La expresión de ésta es por lo tanto un aspecto clave para el desarrollo de las ecuaciones de la dinámica del sólido.

Interesa definir la velocidad de rotación  $\boldsymbol{\Omega}$  a través de sus expresiones en alguno de los triedros descritos en el apartado anterior, especialmente en el del sólido  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , intermedio  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$  o fijo  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ .

Según la definición realizada de los ángulos de Euler en el apartado anterior,  $\boldsymbol{\Omega}$  se puede descomponer según las tres direcciones correspondientes a éstos como<sup>18</sup>:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\mathbf{K} + \dot{\theta}\mathbf{u} + \dot{\varphi}\mathbf{k}. \quad (8.100)$$

Las componentes de esta expresión no están definidas según direcciones ortonormales, por lo que resulta conveniente desarrollarlas en alguno de los triedros definidos anteriormente. En cualquier caso debemos notar que las distintas expresiones de  $\boldsymbol{\Omega}$  se refieren siempre a la velocidad de rotación *total* o *absoluta* del sólido, no se trata en ningún caso de la velocidad de rotación relativa a un triedro.

### Expresión de $\boldsymbol{\Omega}$ en el Triedro del cuerpo

Denominamos  $(p, q, r)$  a las componentes de  $\boldsymbol{\Omega}$  en este triedro:

$$\boldsymbol{\Omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$$

<sup>18</sup>En esta expresión se ha tenido en cuenta que, al referirse la velocidad a rotaciones infinitesimales ( $d\psi = \dot{\psi}dt, \dots$ ), éstas sí se pueden sumar vectorialmente al contrario de lo que ocurre para rotaciones finitas.

Para obtenerlas desarrollamos  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{u}$  en la expresión (8.100). La expresión de  $\mathbf{K}$  se obtiene de

$$\|\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\| = \|\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\| \cdot ([\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi])^{-1}$$

resultando

$$\mathbf{K} = \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi \mathbf{i} + \text{sen } \theta \text{ cos } \varphi \mathbf{j} + \text{cos } \theta \mathbf{k}. \quad (8.101)$$

La expresión de  $\mathbf{u}$  se obtiene de

$$\|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\| = \|\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\| \cdot [\mathbf{R}_\varphi]^{-1},$$

resultando

$$\mathbf{u} = \text{cos } \varphi \mathbf{i} - \text{sen } \varphi \mathbf{j}.$$

Se obtiene finalmente:

$$\begin{cases} p = \dot{\theta} \text{ cos } \varphi + \dot{\psi} \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi, \\ q = -\dot{\theta} \text{ sen } \varphi + \dot{\psi} \text{ sen } \theta \text{ cos } \varphi, \\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \text{ cos } \theta. \end{cases} \quad (8.102)$$

### Expresión de $\Omega$ en el Triedro Intermedio

En este caso denotamos las componentes por  $(p', q', r')$  :

$$\Omega = p' \mathbf{u} + q' \mathbf{v} + r' \mathbf{k}.$$

Desarrollamos  $\mathbf{K}$  en la expresión (8.100) mediante

$$\|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\| = \|\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}\| \cdot [\mathbf{R}_\theta],$$

resultando<sup>19</sup>

$$\mathbf{K} = \text{sen } \theta \mathbf{v} + \text{cos } \theta \mathbf{k}.$$

Se obtiene así

$$\begin{cases} p' = \dot{\theta}, \\ q' = \dot{\psi} \text{ sen } \theta, \\ r' = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \text{ cos } \theta \quad [= r]. \end{cases} \quad (8.103)$$

La expresión anterior prodría haberse deducido también de particularizar (8.102) para  $\varphi = 0$ , ya que el triedro intermedio no es sino el triedro del cuerpo anulando la rotación propia,  $\varphi \mathbf{k}$ .

<sup>19</sup> También puede obtenerse este resultado mediante proyección directa en la figura 8.13

### Expresión de $\Omega$ en el Triedro Fijo

Por último, si llamamos  $(P, Q, R)$  a las componentes en este triedro:

$$\Omega = PI + QJ + RK,$$

la expresión de las mismas resulta

$$\begin{cases} P = \dot{\varphi} \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta + \dot{\theta} \cos \psi, \\ Q = -\dot{\varphi} \cos \psi \operatorname{sen} \theta + \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi, \\ R = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta. \end{cases} \quad (8.104)$$

La comprobación de estas expresiones queda propuesta como ejercicio al lector.

### Obtención de las componentes de $\Omega$ a partir de la matriz de rotación $R$

Merece la pena observar que un procedimiento alternativo para calcular las expresiones de las componentes de  $\Omega$  es emplear la expresión que la define a partir de la derivada del tensor de rotación (8.90):

$$[\widehat{\Omega}] = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} = [\dot{R}] \cdot [R]. \quad (8.105)$$

En esta expresión, los términos  $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  indican las componentes en el triedro que se escoja, equivaliendo a  $(p, q, r)$  en el triedro del cuerpo,  $(p', q', r')$  en el intermedio o  $(P, Q, R)$  si se emplea el fijo. Particularizando en los distintos triedros puede comprobarse la equivalencia con las expresiones de las componentes de  $\Omega$  obtenidas anteriormente (respectivamente (8.102), (8.103) y (8.104) por métodos vectoriales.

## 8.7. Ecuaciones de la dinámica

En lo que antecede se han desarrollado los conceptos necesarios de cinemática de la rotación (rotaciones finitas y su parametrización mediante los ángulos de Euler) y de cinética y geometría de masas (tensor de inercia, momentos de inercia, expresiones del momento cinético y energía cinética). Pasaremos ahora a plantear las ecuaciones de la dinámica del sólido con un punto fijo, debidas a Euler. Partimos para ello de la ecuación del momento cinético, que tomará la forma (8.7.2) si se aplica en  $G$  y (8.8) si se aplica en un punto fijo  $O$ .

### 8.7.1. Ecuaciones de Euler

Según hemos visto, el momento cinético  $\mathbf{H}_O$  viene expresado por (8.29), en función del tensor de inercia  $\mathbf{I}_O$ , que define la geometría de masas del sólido respecto a  $O$ . El tensor de inercia será *constante* para un observador ligado al movimiento del cuerpo; en cambio, respecto del sistema de referencia fijo, sería necesario considerar la variación de sus componentes. Así, la derivada (absoluta) de  $\mathbf{H}_O$  conviene realizarla a través de la derivada relativa al triedro del cuerpo, añadiendo el término complementario correspondiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \\ &= \left( \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \right)_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}). \end{aligned}$$

Resulta la denominada *ecuación de Euler* de la dinámica, en su expresión vectorial:

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})} \quad (8.106)$$

Hacemos notar que esta ecuación es una expresión vectorial *intrínseca*, es decir, independiente del sistema en el que se expresen sus coordenadas.

Observamos además que en esta expresión la derivada de  $\boldsymbol{\Omega}$  es indiferente realizarla respecto al triedro fijo (absoluta) o respecto al triedro del cuerpo (relativa):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \left( \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{abs} = \left( \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \\ &= \dot{p}\mathbf{i} + \dot{q}\mathbf{j} + \dot{r}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Desarrollemos ahora las componentes de la expresión vectorial (8.106) en el triedro del cuerpo. Suponiendo que hemos escogido éste según las direcciones principales de inercia,

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = Ap\mathbf{i} + Bq\mathbf{j} + Cr\mathbf{k};$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} \\ &= -(B-C)qr\mathbf{i} - (C-A)pr\mathbf{j} - (A-B)pq\mathbf{k}; \end{aligned}$$

por lo que la expresión en componentes de las *ecuaciones de Euler* resulta:

$$\boxed{\begin{cases} M_x = A\dot{p} - (B - C)qr, \\ M_y = B\dot{q} - (C - A)rp, \\ M_z = C\dot{r} - (A - B)pq. \end{cases}} \quad (8.107)$$

Para desarrollar el planteamiento completo de las ecuaciones dinámicas en función de las coordenadas o grados de libertad que definen la configuración (en este caso, los ángulos de Euler), sería necesario sustituir en la expresión anterior los valores de  $(p, q, r)$  y de sus derivadas en función de los ángulos de Euler (8.102). Se obtendría así un conjunto de 3 ecuaciones diferenciales de 2.º orden en función de los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$ . Sin embargo, resulta más conveniente plantear dos conjuntos de 3 ecuaciones de primer orden de manera simultánea, planteamiento que es equivalente. Así, de la expresión (8.102) de  $(p, q, r)$  podemos despejar  $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ :

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{p \operatorname{sen} \varphi + q \cos \varphi}{\operatorname{sen} \theta}; \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \operatorname{sen} \varphi; \\ \dot{\varphi} &= r - \frac{p \operatorname{sen} \varphi + q \cos \varphi}{\tan \theta}. \end{aligned} \quad (8.108)$$

Por otra parte, de las ecuaciones de Euler (8.107)

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{M_x}{A} + \frac{B - C}{A} q r, \\ \dot{q} &= \frac{M_y}{B} + \frac{C - A}{B} r p, \\ \dot{r} &= \frac{M_z}{C} + \frac{A - B}{C} p q. \end{aligned} \quad (8.109)$$

El conjunto de 6 ecuaciones diferenciales de primer orden (8.108) y (8.109) queda planteado en función de las 6 variables,  $(\psi, \theta, \varphi)$  y  $(p, q, r)$ . Su resolución puede llevarse a cabo por métodos analíticos (en el capítulo 9 se discute la solución para algunas aplicaciones concretas), o bien por métodos numéricos (por ejemplo mediante el método de integración paso a paso en el tiempo de Runge-Kutta).

### 8.7.2. Ecuaciones de Euler derivando respecto al triedro intermedio

Cuando se trata de un sólido de revolución puede ser conveniente expresar las ecuaciones dinámicas realizando la derivada relativa respecto al

triedro intermedio, cuya velocidad de rotación respecto al fijo<sup>20</sup> es  $(\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\mathbf{k})$ :

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{I}_O \cdot \left( \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{rel} + (\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})$$

Al expresar la derivada relativa en la ecuación anterior, que lo es respecto a un observador ligado al triedro intermedio, se ha tenido en cuenta que al ser el sólido de revolución su tensor de inercia permanece inalterado por la rotación propia.

Desarrollando la ecuación en componentes, suponiendo que se ha elegido el triedro principal de inercia con momentos principales  $(A, A, C)$ :

$$\mathbf{I}_O \cdot \left( \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{rel} = A\dot{p}'\mathbf{u} + A\dot{q}'\mathbf{v} + C\dot{r}'\mathbf{k}$$

$$(\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{k} \\ p' & q' & r' - \dot{\varphi} \\ Ap' & Aq' & Cr' \end{vmatrix}$$

resulta:

$$\begin{cases} M_u = A\dot{p}' - (A - C)q'r' + Aq'\dot{\varphi} \\ M_v = A\dot{q}' - (C - A)r'p' - Ap'\dot{\varphi} \\ M_z = C\dot{r}' \end{cases} \quad (8.110)$$

Observamos además que se verifica  $r' = r$ , por lo que no hace falta la distinción entre ambas.

Estas ecuaciones se complementan con las (8.103) para definir el problema en función de los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$ :

$$\begin{cases} M_u = A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta + Cr\dot{\psi} \sin\theta, \\ M_v = A\ddot{\psi} \sin\theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta} \cos\theta - Cr\dot{\theta}, \\ M_z = C\dot{r}. \end{cases} \quad (8.111)$$

De la última ecuación (8.110) se observa que, para sólidos de revolución, si el momento según el eje de revolución se anula, la velocidad de rotación según dicho eje se conserva: si  $M_{z'} = 0 \Rightarrow r = \text{cte.}$ . Conviene notar que esta propiedad sólo se verifica para un eje de revolución en que los momentos de inercia según dos ejes perpendiculares a él son iguales.

<sup>20</sup> No debe confundirse esta velocidad de rotación relativa con la expresión de la velocidad de rotación absoluta en el triedro intermedio explicada en el apartado 8.6.9.

### 8.7.3. Ecuaciones de Euler derivando respecto al triedro fijo

La rotación  $\mathbf{R}$  relaciona los vectores *convectivos* o materiales (los observados desde la referencia del cuerpo,  $\mathbf{x}^\circ, \boldsymbol{\Omega}^\circ, \dots$ ) y sus contrapartidas *espaciales* (los observados desde una referencia fija,  $\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}, \dots$ ) mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ; & \mathbf{x}^\circ &= \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x}; \\ \boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Omega}^\circ; & \boldsymbol{\Omega}^\circ &= \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\Omega}; \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}^\circ; & \dot{\boldsymbol{\Omega}}^\circ &= \mathbf{R}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}.\end{aligned}$$

Derivando el vector posición  $\mathbf{x}$ , y teniendo en cuenta la definición del operador hemisimétrico correspondiente a la velocidad de rotación (8.90):

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x}^\circ = \dot{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x}) = (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{x} = \widehat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}.$$

De forma análoga, pueden establecerse las relaciones entre el tensor de inercia convectivo (constante) y su contrapartida espacial (variable):

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_O^\circ &= \int_{\mathcal{B}^\circ} (\mathbf{x}^\circ \cdot \mathbf{x}^\circ)^2 \mathbf{1} - \mathbf{x}^\circ \otimes \mathbf{x}^\circ \rho dV; \\ \mathbf{I}_O &= \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^2 \mathbf{1} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \rho dV \\ &= \mathbf{R} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot \mathbf{R}^T).\end{aligned}$$

Empleando las relaciones anteriores, pueden desarrollarse las ecuaciones de la dinámica, derivando desde un sistema de referencia fijo el momento cinético:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O &= \frac{d}{dt} (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \frac{d}{dt} ((\mathbf{R} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot \mathbf{R}^T)) \cdot \boldsymbol{\Omega}) \\ &= \frac{d}{dt} (\mathbf{R} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot (\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\Omega}))) = \frac{d}{dt} (\mathbf{R} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot \boldsymbol{\Omega}^\circ)) \\ &= \dot{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot \boldsymbol{\Omega}^\circ) + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}^\circ) \\ &= (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T) \cdot ((\mathbf{R} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot \mathbf{R}^T)) \cdot (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Omega}^\circ)) + (\mathbf{R} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot \mathbf{R}^T)) \cdot (\mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\Omega}}^\circ) \\ &= \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{I}_O \cdot (\mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\Omega}}^\circ) = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}.\end{aligned}$$

Como puede comprobarse, la expresión a la que se llega es la misma ecuación de Euler que se obtuvo anteriormente derivando respecto a un sistema de referencia convectivo (8.106).

Cabe recalcar que este resultado constituye una expresión vectorial intrínseca, es decir independiente de las coordenadas en las que se exprese. Por lo tanto, podrán emplearse tanto las referidas al triedro del cuerpo como las del triedro fijo o cualquier otro sistema.

### 8.7.4. Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de la dinámica (8.107) ó (8.110) se han obtenido antes por los procedimientos vectoriales (Newton-Euler). A partir de la dinámica analítica se podrían haber obtenido también tres ecuaciones dinámicas, equivalentes en su conjunto a las ecuaciones de Euler. Sin embargo, tan sólo una de las ecuaciones así obtenidas coincide con alguna de las ecuaciones de Euler: se trata de la ecuación de Lagrange en  $\varphi$ , que es la misma que la ecuación en (8.107<sub>3</sub>), es decir la ecuación de Euler correspondiente al movimiento de giro alrededor del eje  $Oz$  del triedro móvil.

Obtenemos la ecuación de Lagrange en dirección  $\varphi$  desarrollando los términos de (7.12). Para ello expresamos las derivadas mediante la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial p} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}}}_{=0} + \frac{\partial T}{\partial q} \underbrace{\frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}}}_{=0} + \frac{\partial T}{\partial r} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}}}_{=1} \right] = C\dot{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial r} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}}}_{=0} \\ &= Ap \underbrace{(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)}_q + Bq \underbrace{(-\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi)}_{-p} \\ &= (A - B)pq \end{aligned}$$

siendo por tanto la ecuación resultante

$$Q_\varphi = C\dot{r} - (A - B)pq.$$

Se observa la identidad de ésta con (8.107<sub>3</sub>), teniendo la fuerza generalizada  $Q_\varphi$  la interpretación física de la componente  $M_z$  del momento. Por permutación cíclica, cambiando los papeles de los ejes  $(x, y, z)$ , sería posible deducir las otras dos ecuaciones de Euler expresadas en (8.107).

También se pueden obtener directamente las ecuaciones de Lagrange relativas a las variables  $\psi$  y  $\theta$ . No detallaremos aquí el desarrollo y daremos únicamente el resultado, quedando propuesta la deducción como ejercicio al

lector:

$$\begin{aligned}
 Q_\psi &= A\dot{p}\sin\theta\sin\varphi + Ap(\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi) + B\dot{q}\sin\theta\cos\varphi \\
 &\quad + Bq(\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi) + Cr\dot{\theta}\cos\theta - Cr\dot{\theta}\sin\theta \\
 Q_\theta &= A\dot{p}\cos\varphi - Ap(\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi) - B\dot{q}\sin\varphi \\
 &\quad - Bq(\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi) + Cr\dot{\psi}\sin\theta
 \end{aligned}$$

Conviene recalcar que, aunque las ecuaciones de Lagrange en función de las coordenadas generalizadas  $(\psi, \theta, \varphi)$  no son las mismas ecuaciones que las de Euler (8.107), son combinación lineal de ellas y en conjunto constituyen un sistema equivalente. Es fácil, obteniendo los coeficientes de esta combinación lineal, expresar los momentos generalizados  $(Q_\psi, Q_\theta, Q_\varphi)$  a partir de los momentos «físicos»  $(M_x, M_y, M_z)$ :

$$\begin{aligned}
 Q_\psi &= M_x\sin\theta\sin\varphi + M_y\sin\theta\cos\varphi + M_z\cos\theta \\
 Q_\theta &= M_x\cos\varphi - M_y\sin\varphi \\
 Q_\varphi &= M_z
 \end{aligned}$$

### 8.7.5. Cálculo de reacciones en los enlaces

#### Sólido con un punto fijo

Como es lógico, en la ligadura del punto fijo se produce una fuerza de reacción. Ésta será un vector  $\mathbf{R}$  de dirección en principio arbitraria aplicado en un eje por  $O$ .

La reacción se puede calcular fácilmente a través de la expresión del balance de la cantidad de movimiento (8.7<sub>1</sub>), descomponiendo las fuerzas en activas y reactivas:

$$\mathbf{F}^{\text{act}} + \mathbf{R} = M\mathbf{a}_G$$

siendo  $\mathbf{F}^{\text{act}} = \sum \mathbf{f}^{\text{act}}$  la resultante de las fuerzas externas activas aplicadas al sólido.

Por cinemática sabemos que

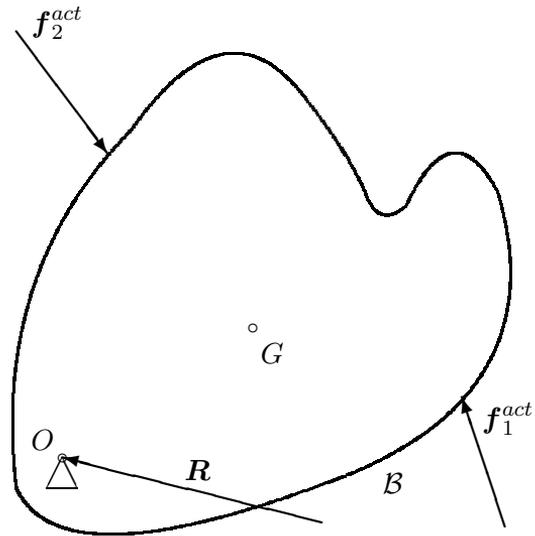
$$\mathbf{a}_G = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{OG} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OG})$$

de donde

$$\boxed{\mathbf{R} = M[\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{OG} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OG})] - \mathbf{F}^{\text{act}}} \quad (8.112)$$

El valor de  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  y  $\boldsymbol{\Omega}$  se obtendría de resolver las ecuaciones de Euler (8.106). En el caso en que el punto fijo sea precisamente  $G$ , la ecuación anterior (8.112) se reduce a la expresión trivial  $\mathbf{R} = -\mathbf{F}^{\text{act}}$ .

Figura 8.15: Fuerza de reacción de un sólido con un punto fijo



### Sólido con un eje fijo (2 puntos fijos)

Suponemos que el eje fijo se materializa mediante un punto fijo ( $O$ ) y otro punto  $A$  que pueda deslizar según el eje  $OA$  pero no en dirección normal a él. El momento de las fuerzas en  $O$  es el de las fuerzas exteriores activas, más el de la reacción en  $A$ ; planteando así las ecuaciones de Euler (8.106)

$$M_O^{\text{act}} + OA \wedge R_A = I_O \cdot \dot{\Omega} + \Omega \wedge (I_O \cdot \Omega)$$

donde  $OA = de$  y al ser  $e$  fijo,

$$\Omega = \Omega e, \quad \dot{\Omega} = \dot{\Omega} e.$$

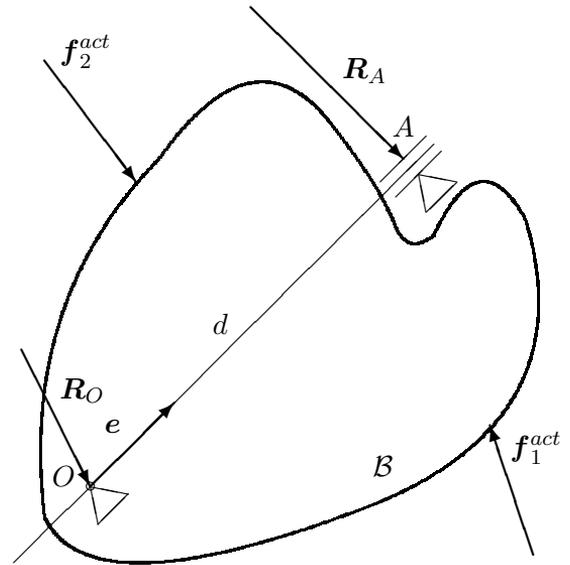
La expresión anterior es una ecuación vectorial que permite calcular  $R_A$ . Recordemos que en el apartado 4.3.1 ya se estudiaron este tipo de ecuaciones, en el contexto de la cinemática. Para que exista solución, la condición de compatibilidad exige que  $e$  sea normal al término independiente:

$$e \cdot [I_O \cdot \dot{\Omega} + \Omega \wedge (I_O \cdot \Omega) - M_O^{\text{act}}] = I_e \dot{\Omega} - M_e = 0,$$

condición que como vemos efectivamente se cumple (recuérdese (8.26)). Despejando pues  $R_A$ ,

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{[I_O \cdot \dot{\Omega} + \Omega \wedge (I_O \cdot \Omega) - M_O^{\text{act}}] \wedge de}{d^2} \\ &= \frac{[\dot{\Omega} I_O \cdot e + \Omega^2 e \wedge (I_O \cdot e) - M_O^{\text{act}}] \wedge e}{d} \end{aligned}$$

Figura 8.16: Fuerzas de reacción de un sólido con un eje fijo, materializado mediante un punto fijo y otro punto que sólo permite movimiento en la dirección del eje.



En el caso particular en que se cumpla  $\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} = I_e \mathbf{e}$  (es decir si  $\mathbf{e}$  es un eje principal), entonces la expresión anterior resulta

$$\mathbf{R}_A = \frac{\mathbf{e} \wedge \mathbf{M}_O^{act}}{d}$$

Es inmediato comprobar que este valor es el mismo que se produciría en situación estática, por lo que en este caso particular no se producen efectos dinámicos sobre la reacción.

Una vez calculada  $\mathbf{R}_A$ , la reacción en el otro punto,  $\mathbf{R}_O$ , se calcula igual que en (8.112):

$$\mathbf{R}_O = M\mathbf{a}_G - \mathbf{F}^{act} - \mathbf{R}_A.$$