

# Índice general

## I. Métodos Generales de la Dinámica

<b>1. Principios de la mecánica</b>	<b>1.1</b>
1.1. La mecánica como teoría científica . . . . .	1.1
1.2. Sistemas de referencia; espacio y tiempo . . . . .	1.5
1.3. Principio de la relatividad de Galileo . . . . .	1.6
1.4. Las leyes de Newton . . . . .	1.8
1.5. Conceptos de masa y fuerza . . . . .	1.11
1.6. La ley de la gravitación universal . . . . .	1.15
1.6.1. Masa gravitatoria y masa inerte. . . . .	1.17
<b>2. Dinámica de la partícula</b>	<b>2.1</b>
2.1. Principios y teoremas generales . . . . .	2.2
2.1.1. Cantidad de movimiento . . . . .	2.2
2.1.2. Momento cinético . . . . .	2.3
2.1.3. Energía cinética . . . . .	2.6
2.2. Expresiones de velocidad y aceleración . . . . .	2.11
2.2.1. Coordenadas cartesianas. . . . .	2.11
2.2.2. Coordenadas cilíndricas y polares. . . . .	2.12
2.2.3. Coordenadas esféricas. . . . .	2.13
2.2.4. Triedro intrínseco . . . . .	2.14
2.3. Movimiento de una partícula libre . . . . .	2.17
2.3.1. proyectil pesado en el vacío. . . . .	2.17
2.3.2. proyectil pesado en medio resistente . . . . .	2.20
2.4. Movimiento de una partícula sobre una curva . . . . .	2.24
2.5. Movimiento de una partícula sobre una superficie . . . . .	2.30
2.6. Problemas propuestos. . . . .	2.33
<b>3. Oscilaciones lineales con 1 grado de libertad</b>	<b>3.1</b>
3.1. El oscilador armónico simple . . . . .	3.2

3.1.1.	Ecuación del movimiento	3.2
3.1.2.	Energía	3.3
3.1.3.	Integración de la ecuación	3.4
3.2.	Oscilaciones en 2 dimensiones	3.6
3.3.	Oscilaciones con amortiguamiento	3.9
3.3.1.	Ecuación del movimiento	3.9
3.3.2.	Integración de la ecuación	3.10
3.4.	Oscilaciones forzadas	3.16
3.4.1.	Ecuación del movimiento	3.16
3.4.2.	Integración de la ecuación	3.16
3.5.	Amplificación dinámica y resonancia	3.20
3.6.	El espacio de las fases	3.26
3.7.	Análisis mediante series de Fourier	3.30
3.7.1.	Carácter lineal de las ecuaciones	3.30
3.7.2.	Análisis de series de armónicos	3.31
3.7.3.	Desarrollo en serie de Fourier	3.32
3.8.	Análisis de transitorios mediante la función de Green	3.34
3.8.1.	Respuesta a una función impulso	3.34
3.8.2.	Análisis de transitorios para una excitación arbitraria	3.36
3.9.	Métodos numéricos para integración directa	3.37
3.9.1.	Método de Euler	3.38
3.9.2.	Método de Runge-Kutta	3.40
3.10.	Problemas propuestos.	3.41
<b>4.</b>	<b>Cinemática de sistemas rígidos</b>	<b>4.1</b>
4.1.	Derivación de vectores en sistemas móviles	4.1
4.2.	Velocidad y aceleración en sistemas móviles	4.6
4.3.	Campo de velocidades del sólido rígido	4.9
4.3.1.	Movimiento helicoidal tangente	4.10
4.3.2.	Axoides del movimiento	4.13
4.4.	Campo de aceleraciones del sólido rígido	4.16
4.5.	Composición de movimientos	4.18
4.5.1.	Composición del movimiento de 2 sistemas	4.18
4.5.2.	Composición del movimiento de $n$ sistemas	4.18
4.5.3.	Movimiento de sólidos tangentes	4.21
4.6.	Movimiento plano	4.25
4.6.1.	Centro instantáneo de rotación	4.26
4.6.2.	Curvas polares	4.26
4.6.3.	Aceleraciones	4.29
4.7.	Problemas propuestos.	4.40

<b>5. Fuerzas centrales y órbitas gravitatorias</b>	<b>5.1</b>
5.1. Reducción del sistema binario . . . . .	5.1
5.1.1. Sistema binario gravitatorio . . . . .	5.4
5.2. Movimiento bajo fuerzas centrales . . . . .	5.6
5.2.1. Propiedades del movimiento . . . . .	5.6
5.2.2. Ecuaciones del movimiento . . . . .	5.7
5.2.3. Fórmula de Binet . . . . .	5.9
5.3. Órbitas gravitatorias . . . . .	5.10
5.4. Energía de las órbitas gravitatorias . . . . .	5.14
5.4.1. Potencial efectivo . . . . .	5.19
5.5. Leyes de Kepler . . . . .	5.21
5.6. Ecuaciones horarias . . . . .	5.23
5.6.1. Trayectoria elíptica . . . . .	5.23
5.6.2. Movimiento hiperbólico . . . . .	5.25
5.6.3. Movimiento parabólico . . . . .	5.26
5.7. Estudio del sistema ternario . . . . .	5.27
5.7.1. Planteamiento de las ecuaciones . . . . .	5.28
5.7.2. Movimiento alineado . . . . .	5.29
5.7.3. Movimiento equilátero . . . . .	5.30
5.8. Problemas propuestos. . . . .	5.32
<b>6. Teoremas generales de dinámica de sistemas.</b>	<b>6.1</b>
6.1. Morfología de los sistemas . . . . .	6.1
6.1.1. Sistema mecánico . . . . .	6.2
6.1.2. Fuerzas . . . . .	6.2
6.1.3. Enlaces . . . . .	6.3
6.2. Principios y teoremas de la dinámica de Newton-Euler . . . . .	6.9
6.2.1. Principio de la cantidad de movimiento . . . . .	6.9
6.2.2. Principio del momento cinético . . . . .	6.12
6.2.3. Teorema de la energía cinética . . . . .	6.15
6.2.4. Teorema del virial . . . . .	6.20
6.3. El sistema del centro de masas . . . . .	6.22
6.3.1. Cantidad de movimiento . . . . .	6.23
6.3.2. Momento cinético . . . . .	6.23
6.3.3. Energía cinética . . . . .	6.26
6.3.4. Aplicación: sólidos rígidos con movimiento plano . . . . .	6.27
6.3.5. Constantes del movimiento en sistemas aislados . . . . .	6.36
6.4. Trabajos virtuales . . . . .	6.37
6.4.1. El principio de los trabajos virtuales . . . . .	6.39
6.4.2. El principio de D'Alembert . . . . .	6.40

6.5.	Dinámica en sistemas no inerciales. . . . .	6.44
6.5.1.	Dinámica de la partícula . . . . .	6.44
6.5.2.	Dinámica de sistemas de varias partículas . . . . .	6.46
6.5.3.	Ejes ligados a la superficie de la tierra . . . . .	6.47
6.6.	Sistemas de masa variable . . . . .	6.53
6.6.1.	Sistema puntual: ecuación fundamental . . . . .	6.53
6.6.2.	Sistema con masa distribuida . . . . .	6.54
6.6.3.	Aplicaciones . . . . .	6.56
6.7.	Problemas propuestos. . . . .	6.59
<b>7.</b>	<b>Dinámica analítica</b> . . . . .	<b>7.1</b>
7.1.	Coordenadas generalizadas . . . . .	7.2
7.2.	Ecuaciones de Lagrange . . . . .	7.7
7.2.1.	El principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas . . . . .	7.7
7.2.2.	Forma básica de las ecuaciones de Lagrange . . . . .	7.9
7.2.3.	Caso en que las fuerzas provienen de un potencial. Función Lagrangiana . . . . .	7.10
7.2.4.	Desarrollo explícito de las ecuaciones del movimiento . . . . .	7.17
7.2.5.	Integrales primeras . . . . .	7.20
7.2.6.	Teorema de Noether . . . . .	7.25
7.2.7.	Sistemas naturales . . . . .	7.26
7.2.8.	Sistemas giroscópicos . . . . .	7.28
7.3.	Potencial dependiente de la velocidad . . . . .	7.31
7.4.	Sistemas con ligaduras . . . . .	7.34
7.4.1.	Método de los multiplicadores de Lagrange . . . . .	7.35
7.5.	Introducción al cálculo de variaciones . . . . .	7.40
7.5.1.	Los principios variacionales . . . . .	7.40
7.5.2.	El problema fundamental del cálculo de variaciones . . . . .	7.41
7.6.	El principio de Hamilton . . . . .	7.45
7.6.1.	Las ecuaciones de lagrange a partir del principio de Hamilton . . . . .	7.46
7.6.2.	Generalización del principio de Hamilton . . . . .	7.47
7.7.	La dinámica a partir del principio de Hamilton . . . . .	7.49
7.7.1.	Estructura de la función Lagrangiana . . . . .	7.50
7.7.2.	Teoremas de conservación . . . . .	7.53
7.8.	Problemas propuestos. . . . .	7.56

## II. Aplicaciones de la Dinámica y Estática

<b>8. Dinámica del sólido rígido</b>	<b>8.1</b>
8.1. Conceptos generales	8.1
8.1.1. Ecuaciones cardinales de la dinámica	8.2
8.2. Expresión de las magnitudes cinéticas	8.4
8.2.1. Movimiento de rotación instantánea	8.4
8.2.2. Movimiento general (rotación y traslación)	8.7
8.2.3. Dinámica del sólido con un eje fijo	8.7
8.3. El tensor de inercia	8.8
8.4. Propiedades del tensor de inercia	8.13
8.4.1. Momentos y productos de inercia	8.13
8.4.2. Elipsoide de inercia	8.15
8.4.3. Ejes principales de inercia	8.16
8.4.4. Simetrías de masas	8.19
8.5. Campo tensorial de inercia	8.22
8.6. Rotación finita del sólido	8.26
8.6.1. Rotaciones infinitesimales y su composición	8.26
8.6.2. Composición de rotaciones finitas	8.29
8.6.3. La Rotación finita como cambio de base	8.30
8.6.4. La Rotación finita como transformación ortogonal	8.32
8.6.5. Teorema de Euler	8.34
8.6.6. Relación entre rotaciones finitas e infinitesimales	8.36
8.6.7. Parametrización de la rotación; fórmula de Rodrigues y parámetros de Euler	8.38
8.6.8. Ángulos de Euler	8.40
8.6.9. Expresiones de la velocidad de rotación	8.44
8.7. Ecuaciones de la dinámica	8.46
8.7.1. Ecuaciones de Euler	8.47
8.7.2. Ecuaciones de Euler derivando respecto al triedro in- termedio	8.48
8.7.3. Ecuaciones de Euler derivando respecto al triedro fijo	8.50
8.7.4. Ecuaciones de Lagrange	8.51
8.7.5. Cálculo de reacciones en los enlaces	8.52
<b>9. Aplicaciones de la dinámica del sólido</b>	<b>9.1</b>
9.1. Movimiento por inercia; descripción de Poinsot.	9.1
9.1.1. Propiedades del movimiento	9.1
9.1.2. Ejes permanentes de rotación	9.6
9.1.3. Ecuaciones del movimiento	9.9

9.2.	Dinámica del sólido en sistemas no inerciales . . . . .	9.12
9.3.	El giróscopo . . . . .	9.16
9.3.1.	Ecuaciones del movimiento de una peonza . . . . .	9.16
9.3.2.	Efecto giroscópico . . . . .	9.20
9.3.3.	Estabilidad de la peonza dormida . . . . .	9.25
9.4.	El péndulo esférico . . . . .	9.26
<b>10.</b>	<b>Dinámica de impulsiones</b>	<b>10.1</b>
10.1.	Introducción . . . . .	10.1
10.2.	Teoría de impulsiones . . . . .	10.2
10.2.1.	Impulsión sobre una partícula . . . . .	10.2
10.2.2.	Fuerzas impulsivas; función delta de Dirac . . . . .	10.3
10.2.3.	Axiomática . . . . .	10.5
10.2.4.	Teorema fundamental . . . . .	10.5
10.2.5.	Aplicación del principio de los trabajos virtuales . . . . .	10.7
10.2.6.	Aplicación del principio de la cantidad de movimiento . . . . .	10.8
10.2.7.	Aplicación del principio del momento cinético . . . . .	10.8
10.3.	Consideraciones energéticas . . . . .	10.9
10.3.1.	Energía cinética . . . . .	10.9
10.3.2.	Coefficiente de restitución . . . . .	10.11
10.3.3.	Teorema de Carnot . . . . .	10.13
10.4.	Choque entre sólidos rígidos . . . . .	10.14
10.4.1.	La deformabilidad de los sólidos . . . . .	10.14
10.4.2.	Caso general de choque entre dos sólidos . . . . .	10.16
10.4.3.	Choque directo . . . . .	10.17
10.4.4.	Impulsiones tangenciales . . . . .	10.19
10.5.	Dinámica analítica de impulsiones . . . . .	10.19
<b>11.</b>	<b>Oscilaciones lineales con varios grados de libertad</b>	<b>11.1</b>
11.1.	Ecuaciones del movimiento . . . . .	11.1
11.1.1.	Linealización de las ecuaciones . . . . .	11.1
11.1.2.	Formulación matricial . . . . .	11.4
11.2.	Oscilaciones libres . . . . .	11.7
11.2.1.	Oscilaciones sin amortiguamiento; problema de autovalores . . . . .	11.7
11.2.2.	Frecuencias propias y modos normales de vibración . . . . .	11.9
11.2.3.	Caso de autovalores múltiples . . . . .	11.15
11.2.4.	Análisis modal; coordenadas normales . . . . .	11.16
11.2.5.	Condiciones iniciales . . . . .	11.20
11.2.6.	Oscilaciones libres con amortiguamiento . . . . .	11.21

11.3. Oscilaciones forzadas . . . . .	11.25
11.3.1. Oscilaciones sin amortiguamiento; Resonancia . . . . .	11.25
11.3.2. Oscilaciones con amortiguamiento; régimen transitorio y permanente . . . . .	11.26
11.4. Métodos para la obtención de modos y frecuencias propias . . . . .	11.28
<b>12. Ecuaciones de Hamilton</b> . . . . .	<b>12.1</b>
12.1. Introducción . . . . .	12.1
12.2. La transformada de Legendre y sus propiedades . . . . .	12.2
12.3. Ecuaciones de Hamilton . . . . .	12.3
12.4. Obtención práctica de las ecuaciones . . . . .	12.6
12.5. Integrales primeras . . . . .	12.7
12.6. Generalización para fuerzas no conservativas . . . . .	12.8
12.7. El método de Routh . . . . .	12.9
12.8. El principio de Hamilton aplicado a la función hamiltoniana . . . . .	12.11
12.9. Estructura de las ecuaciones canónicas . . . . .	12.12
12.9.1. Transformaciones canónicas . . . . .	12.13
12.10. Ejemplos . . . . .	12.15
<b>13. Estática</b> . . . . .	<b>13.1</b>
13.1. Consideraciones generales . . . . .	13.1
13.2. Condiciones analíticas del equilibrio . . . . .	13.4
13.2.1. Unicidad del equilibrio; condición de Lipschitz . . . . .	13.5
13.3. Estabilidad del equilibrio . . . . .	13.6
13.3.1. Concepto de estabilidad . . . . .	13.6
13.3.2. Condiciones de estabilidad: teorema de Lejeune-Dirichlet . . . . .	13.8
13.4. Equilibrio de una partícula . . . . .	13.11
13.4.1. Partícula libre . . . . .	13.11
13.4.2. Partícula ligada a una superficie . . . . .	13.12
13.4.3. Partícula ligada a una curva . . . . .	13.14
13.5. Equilibrio de un sistema de partículas . . . . .	13.16
13.5.1. Ecuaciones cardinales de la estática . . . . .	13.16
13.5.2. Principio de los trabajos virtuales . . . . .	13.18
13.6. Equilibrio del sólido rígido . . . . .	13.20
13.6.1. Aplicación del principio de los trabajos virtuales . . . . .	13.20
13.6.2. Sistemas isostáticos e hiperestáticos . . . . .	13.22
13.7. Reacciones en los enlaces . . . . .	13.24
13.7.1. Enlaces lisos . . . . .	13.25
13.7.2. Enlaces con resistencias pasivas; rozamiento . . . . .	13.29

13.8. Sistemas de barras articuladas . . . . .	13.34
13.8.1. Clasificación . . . . .	13.34
13.8.2. Método de los nudos . . . . .	13.37
13.8.3. Método de las secciones . . . . .	13.38
<b>14. Estática de hilos</b>	<b>14.1</b>
14.1. Consideraciones generales . . . . .	14.1
14.2. Ecuaciones de equilibrio bajo cargas continuas . . . . .	14.2
14.2.1. Ecuación vectorial del equilibrio . . . . .	14.2
14.2.2. Ecuaciones en coordenadas intrínsecas . . . . .	14.4
14.2.3. Ecuaciones en coordenadas cartesianas . . . . .	14.5
14.2.4. Casos de fuerzas conservativas . . . . .	14.6
14.2.5. Casos de fuerzas centrales o paralelas . . . . .	14.7
14.2.6. Analogía dinámica . . . . .	14.10
14.3. Configuraciones de equilibrio de hilos . . . . .	14.10
14.3.1. Hilo homogéneo sometido a peso propio (catenaria) . . . . .	14.10
14.3.2. Hilo sometido a carga constante por unidad de abscisa (parábola) . . . . .	14.15
14.3.3. Efecto de cargas puntuales . . . . .	14.22
14.3.4. Algunos tipos de condiciones de apoyo en los extremos	14.24
14.4. Hilos apoyados sobre superficies . . . . .	14.28
14.4.1. Superficie lisa sin cargas . . . . .	14.28
14.4.2. Superficie lisa con cargas . . . . .	14.28
14.4.3. Enrollamiento sobre tambor rugoso . . . . .	14.31
<b>A. Resumen de álgebra vectorial y tensorial</b>	<b>A.1</b>
A.1. Escalares, puntos y vectores . . . . .	A.1
A.2. Producto escalar y vectorial . . . . .	A.2
A.3. Bases y coordenadas . . . . .	A.2
A.4. Tensores de orden dos . . . . .	A.3
A.5. Cambio de base . . . . .	A.5
A.6. Operaciones y clases especiales de tensores . . . . .	A.7
A.7. Cambio de coordenadas de un tensor . . . . .	A.7
A.8. Coeficientes de permutación . . . . .	A.8
A.9. Forma cuadrática asociada a un tensor . . . . .	A.8
A.10. Vector axial asociado a un tensor hemisimétrico . . . . .	A.9
A.11. Traza y determinante . . . . .	A.10