

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID  
ESCUELA DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS



# **CURSO DE MECÁNICA**

## **Volúmenes I y II**

José María Goicolea Ruigómez  
septiembre 2021

Segunda edición revisada, noviembre 2001 – septiembre 2021

©2021 por José M.<sup>a</sup> Goicolea Ruigómez.

Este material puede ser distribuido únicamente sujeto a los términos y condiciones definidos en la Licencia de Publicaciones Abiertas (“Open Publication License”), v1.0 o posterior (la última versión está disponible en <http://www.opencontent.org/openpub/>).

Queda prohibida la distribución de versiones de este documento modificadas sustancialmente sin el permiso explícito del propietario del derecho de copia (“copyright”).

La distribución de este trabajo o de derivaciones de este trabajo en cualquier forma de libro estándar (papel) queda prohibida a no ser que se obtenga previamente permiso del propietario del derecho de copia (“copyright”).

ISBN: 84-380-0209-9

Depósito Legal: M.52528-2001



Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Servicio de Publicaciones - Colección Escuelas

## Prólogo

Este *curso de mecánica* tiene por objetivo servir de base para el aprendizaje de los métodos clásicos de la mecánica en las escuelas de ingeniería. El material se ha desarrollado como base del curso de mecánica en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid, sin embargo la orientación es generalista y puede ser de interés en otros centros. Se ha procurado conjugar en el texto el enfoque práctico orientado a la resolución de problemas con una adecuada corrección formal en su desarrollo. Sin embargo, de antemano debe reconocerse que no se pretende ni una originalidad en el tratamiento de una materia que puede considerarse *clásica*, ni un alcance exhaustivo en cuanto a los temas abarcados.

Contrariamente a otros textos de «mecánica para ingenieros», aquí el itinerario comienza en la dinámica, para culminar en la estática como caso particular de la misma, pasando entre medias por la cinemática y diversas aplicaciones o concreciones. La pretensión básica es fundamentar adecuadamente los conceptos generales de la dinámica (y por ende de la mecánica), más que incidir en planteamientos intuitivos de la estática que en las escuelas de ingeniería están por lo general suficientemente tratados por otras asignaturas. Sin embargo, la dinámica constituye un reto de interés creciente para la ingeniería, a veces no adecuadamente cubierto en los planes de estudio. Los nuevos sistemas de transporte ferroviario de alta velocidad, los progresos en aeronáutica o astronáutica, la robótica y muchas otras aplicaciones atestiguan este interés. Por otra parte, la asimilación de los conceptos generales de la dinámica constituirá una base generalista sólida para disciplinas posteriores como la estática o dinámica estructural.

Esta segunda edición incorpora respecto a la primera (de 1995) varias correcciones y ampliaciones. En primer lugar, se subsanan las erratas advertidas y se corrigen y amplían algunos temas, como la dinámica analítica. Por otra parte, se incluye un conjunto seleccionado de ejemplos representativos resueltos dentro de cada capítulo, así como un cierto número de problemas propuestos para resolver al final de cada capítulo. Muchos de estos provienen de exámenes de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid.

Como consecuencia de estas adiciones el texto se ha ampliado y ocupa ahora dos volúmenes. El material contenido en este primer volumen está pensado para cubrirse a lo largo de un semestre, en un curso de 6 créditos (60 horas lectivas incluyendo teoría y problemas). Si fuera necesario, podrían

omitirse algunos apartados considerados opcionales, como 3.7–3.9, 5.6–5.7, 6.6, 7.3 y 7.7.

El segundo volumen, que podría cubrirse en un segundo semestre con igual número de créditos, incluye la dinámica del sólido rígido, la dinámica impulsiva, las ecuaciones de Hamilton, las oscilaciones lineales en sistemas con varios grados de libertad, la estática general y de los cables.

Debo manifestar mi agradecimiento a diversas personas que directa o indirectamente han influido en este texto. Primeramente a José A. Fernández Palacios, mi maestro en estas lides y anterior catedrático en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid, responsable de la concepción actual de la asignatura que me he limitado a continuar. Asimismo, al resto de profesores de la cátedra cuyas discusiones y propuestas de ejercicios han podido ser recogidas en estas líneas: J.J. Arribas, F. Gabaldón, J.C. García, A. Martínez Reyes, F. Martínez Cutillas, J.M. Navas y F. Nieto<sup>1</sup>. Por último, el más cálido agradecimiento debe ser para los alumnos, destinatarios últimos y responsables de mi dedicación a esta apasionante materia.

Para finalizar, asumo de antemano la responsabilidad por las inevitables erratas y errores que puedan existir. Ruego a los lectores que me las comuniquen, para poderlas corregir en próximas ediciones.

NOTA A LA EDICIÓN 2021: En esta edición se han incorporado las correcciones de diversas erratas observadas. Agradezco a las personas que han comunicado dichas erratas.

Jose M.<sup>a</sup> Goicolea Ruigómez.

Madrid, septiembre de 2021.

---

<sup>1</sup>recientemente fallecido, q.e.p.d.; sirvan estas líneas como recuerdo de su abnegada y entusiasta labor docente durante años en la mecánica

# Índice general

## I. Métodos Generales de la Dinámica

<b>1. Principios de la mecánica</b>	<b>1.1</b>
1.1. La mecánica como teoría científica . . . . .	1.1
1.2. Sistemas de referencia; espacio y tiempo . . . . .	1.5
1.3. Principio de la relatividad de Galileo . . . . .	1.6
1.4. Las leyes de Newton . . . . .	1.8
1.5. Conceptos de masa y fuerza . . . . .	1.11
1.6. La ley de la gravitación universal . . . . .	1.15
1.6.1. Masa gravitatoria y masa inerte. . . . .	1.17
<b>2. Dinámica de la partícula</b>	<b>2.1</b>
2.1. Principios y teoremas generales . . . . .	2.2
2.1.1. Cantidad de movimiento . . . . .	2.2
2.1.2. Momento cinético . . . . .	2.3
2.1.3. Energía cinética . . . . .	2.6
2.2. Expresiones de velocidad y aceleración . . . . .	2.11
2.2.1. Coordenadas cartesianas. . . . .	2.11
2.2.2. Coordenadas cilíndricas y polares. . . . .	2.12
2.2.3. Coordenadas esféricas. . . . .	2.13
2.2.4. Triedro intrínseco . . . . .	2.14
2.3. Movimiento de una partícula libre . . . . .	2.17
2.3.1. proyectil pesado en el vacío. . . . .	2.17
2.3.2. proyectil pesado en medio resistente . . . . .	2.20
2.4. Movimiento de una partícula sobre una curva . . . . .	2.24
2.5. Movimiento de una partícula sobre una superficie . . . . .	2.30
2.6. Problemas propuestos. . . . .	2.33
<b>3. Oscilaciones lineales con 1 grado de libertad</b>	<b>3.1</b>
3.1. El oscilador armónico simple . . . . .	3.2

3.1.1.	Ecuación del movimiento	3.2
3.1.2.	Energía	3.3
3.1.3.	Integración de la ecuación	3.4
3.2.	Oscilaciones en 2 dimensiones	3.6
3.3.	Oscilaciones con amortiguamiento	3.9
3.3.1.	Ecuación del movimiento	3.9
3.3.2.	Integración de la ecuación	3.10
3.4.	Oscilaciones forzadas	3.16
3.4.1.	Ecuación del movimiento	3.16
3.4.2.	Integración de la ecuación	3.16
3.5.	Amplificación dinámica y resonancia	3.20
3.6.	El espacio de las fases	3.26
3.7.	Análisis mediante series de Fourier	3.30
3.7.1.	Carácter lineal de las ecuaciones	3.30
3.7.2.	Análisis de series de armónicos	3.31
3.7.3.	Desarrollo en serie de Fourier	3.32
3.8.	Análisis de transitorios mediante la función de Green	3.34
3.8.1.	Respuesta a una función impulso	3.34
3.8.2.	Análisis de transitorios para una excitación arbitraria	3.36
3.9.	Métodos numéricos para integración directa	3.37
3.9.1.	Método de Euler	3.38
3.9.2.	Método de Runge-Kutta	3.40
3.10.	Problemas propuestos.	3.41
<b>4.</b>	<b>Cinemática de sistemas rígidos</b>	<b>4.1</b>
4.1.	Derivación de vectores en sistemas móviles	4.1
4.2.	Velocidad y aceleración en sistemas móviles	4.6
4.3.	Campo de velocidades del sólido rígido	4.9
4.3.1.	Movimiento helicoidal tangente	4.10
4.3.2.	Axoides del movimiento	4.13
4.4.	Campo de aceleraciones del sólido rígido	4.16
4.5.	Composición de movimientos	4.18
4.5.1.	Composición del movimiento de 2 sistemas	4.18
4.5.2.	Composición del movimiento de $n$ sistemas	4.18
4.5.3.	Movimiento de sólidos tangentes	4.21
4.6.	Movimiento plano	4.25
4.6.1.	Centro instantáneo de rotación	4.26
4.6.2.	Curvas polares	4.26
4.6.3.	Aceleraciones	4.29
4.7.	Problemas propuestos.	4.40

<b>5. Fuerzas centrales y órbitas gravitatorias</b>	<b>5.1</b>
5.1. Reducción del sistema binario . . . . .	5.1
5.1.1. Sistema binario gravitatorio . . . . .	5.4
5.2. Movimiento bajo fuerzas centrales . . . . .	5.6
5.2.1. Propiedades del movimiento . . . . .	5.6
5.2.2. Ecuaciones del movimiento . . . . .	5.7
5.2.3. Fórmula de Binet . . . . .	5.9
5.3. Órbitas gravitatorias . . . . .	5.10
5.4. Energía de las órbitas gravitatorias . . . . .	5.14
5.4.1. Potencial efectivo . . . . .	5.19
5.5. Leyes de Kepler . . . . .	5.21
5.6. Ecuaciones horarias . . . . .	5.23
5.6.1. Trayectoria elíptica . . . . .	5.23
5.6.2. Movimiento hiperbólico . . . . .	5.25
5.6.3. Movimiento parabólico . . . . .	5.26
5.7. Estudio del sistema ternario . . . . .	5.27
5.7.1. Planteamiento de las ecuaciones . . . . .	5.28
5.7.2. Movimiento alineado . . . . .	5.29
5.7.3. Movimiento equilátero . . . . .	5.30
5.8. Problemas propuestos. . . . .	5.32
<b>6. Teoremas generales de dinámica de sistemas.</b>	<b>6.1</b>
6.1. Morfología de los sistemas . . . . .	6.1
6.1.1. Sistema mecánico . . . . .	6.2
6.1.2. Fuerzas . . . . .	6.2
6.1.3. Enlaces . . . . .	6.3
6.2. Principios y teoremas de la dinámica de Newton-Euler . . . . .	6.9
6.2.1. Principio de la cantidad de movimiento . . . . .	6.9
6.2.2. Principio del momento cinético . . . . .	6.12
6.2.3. Teorema de la energía cinética . . . . .	6.15
6.2.4. Teorema del virial . . . . .	6.20
6.3. El sistema del centro de masas . . . . .	6.22
6.3.1. Cantidad de movimiento . . . . .	6.23
6.3.2. Momento cinético . . . . .	6.23
6.3.3. Energía cinética . . . . .	6.26
6.3.4. Aplicación: sólidos rígidos con movimiento plano . . . . .	6.27
6.3.5. Constantes del movimiento en sistemas aislados . . . . .	6.36
6.4. Trabajos virtuales . . . . .	6.37
6.4.1. El principio de los trabajos virtuales . . . . .	6.39
6.4.2. El principio de D'Alembert . . . . .	6.40

6.5.	Dinámica en sistemas no inerciales. . . . .	6.44
6.5.1.	Dinámica de la partícula . . . . .	6.44
6.5.2.	Dinámica de sistemas de varias partículas . . . . .	6.46
6.5.3.	Ejes ligados a la superficie de la tierra . . . . .	6.47
6.6.	Sistemas de masa variable . . . . .	6.53
6.6.1.	Sistema puntual: ecuación fundamental . . . . .	6.53
6.6.2.	Sistema con masa distribuida . . . . .	6.54
6.6.3.	Aplicaciones . . . . .	6.56
6.7.	Problemas propuestos. . . . .	6.59
<b>7.</b>	<b>Dinámica analítica</b> . . . . .	<b>7.1</b>
7.1.	Coordenadas generalizadas . . . . .	7.2
7.2.	Ecuaciones de Lagrange . . . . .	7.7
7.2.1.	El principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas . . . . .	7.7
7.2.2.	Forma básica de las ecuaciones de Lagrange . . . . .	7.9
7.2.3.	Caso en que las fuerzas provienen de un potencial. Función Lagrangiana . . . . .	7.10
7.2.4.	Desarrollo explícito de las ecuaciones del movimiento . . . . .	7.17
7.2.5.	Integrales primeras . . . . .	7.20
7.2.6.	Teorema de Noether . . . . .	7.25
7.2.7.	Sistemas naturales . . . . .	7.26
7.2.8.	Sistemas giroscópicos . . . . .	7.28
7.3.	Potencial dependiente de la velocidad . . . . .	7.31
7.4.	Sistemas con ligaduras . . . . .	7.34
7.4.1.	Método de los mUltiplicadores de Lagrange . . . . .	7.35
7.5.	Introducción al cálculo de variaciones . . . . .	7.40
7.5.1.	Los principios variacionales . . . . .	7.40
7.5.2.	El problema fundamental del cálculo de variaciones . . . . .	7.41
7.6.	El principio de Hamilton . . . . .	7.45
7.6.1.	Las ecuaciones de lagrange a partir del principio de Hamilton . . . . .	7.46
7.6.2.	Generalización del principio de Hamilton . . . . .	7.47
7.7.	La dinámica a partir del principio de Hamilton . . . . .	7.49
7.7.1.	Estructura de la función Lagrangiana . . . . .	7.50
7.7.2.	Teoremas de conservación . . . . .	7.53
7.8.	Problemas propuestos. . . . .	7.56



## II. Aplicaciones de la Dinámica y Estática

<b>8. Dinámica del sólido rígido</b>	<b>8.1</b>
8.1. Conceptos generales	8.1
8.1.1. Ecuaciones cardinales de la dinámica	8.2
8.2. Expresión de las magnitudes cinéticas	8.4
8.2.1. Movimiento de rotación instantánea	8.4
8.2.2. Movimiento general (rotación y traslación)	8.7
8.2.3. Dinámica del sólido con un eje fijo	8.7
8.3. El tensor de inercia	8.8
8.4. Propiedades del tensor de inercia	8.13
8.4.1. Momentos y productos de inercia	8.13
8.4.2. Elipsoide de inercia	8.15
8.4.3. Ejes principales de inercia	8.16
8.4.4. Simetrías de masas	8.19
8.5. Campo tensorial de inercia	8.22
8.6. Rotación finita del sólido	8.26
8.6.1. Rotaciones infinitesimales y su composición	8.26
8.6.2. Composición de rotaciones finitas	8.29
8.6.3. La Rotación finita como cambio de base	8.30
8.6.4. La Rotación finita como transformación ortogonal	8.32
8.6.5. Teorema de Euler	8.34
8.6.6. Relación entre rotaciones finitas e infinitesimales	8.36
8.6.7. Parametrización de la rotación; fórmula de Rodrigues y parámetros de Euler	8.38
8.6.8. Ángulos de Euler	8.40
8.6.9. Expresiones de la velocidad de rotación	8.44
8.7. Ecuaciones de la dinámica	8.46
8.7.1. Ecuaciones de Euler	8.47
8.7.2. Ecuaciones de Euler derivando respecto al triedro in- termedio	8.48
8.7.3. Ecuaciones de Euler derivando respecto al triedro fijo	8.50
8.7.4. Ecuaciones de Lagrange	8.51
8.7.5. Cálculo de reacciones en los enlaces	8.52
<b>9. Aplicaciones de la dinámica del sólido</b>	<b>9.1</b>
9.1. Movimiento por inercia; descripción de Poincot.	9.1
9.1.1. Propiedades del movimiento	9.1
9.1.2. Ejes permanentes de rotación	9.6
9.1.3. Ecuaciones del movimiento	9.9

9.2. Dinámica del sólido en sistemas no inerciales . . . . .	9.12
9.3. El giróscopo . . . . .	9.16
9.3.1. Ecuaciones del movimiento de una peonza . . . . .	9.16
9.3.2. Efecto giroscópico . . . . .	9.20
9.3.3. Estabilidad de la peonza dormida . . . . .	9.25
9.4. El péndulo esférico . . . . .	9.26
<b>10. Dinámica de impulsiones</b>	<b>10.1</b>
10.1. Introducción . . . . .	10.1
10.2. Teoría de impulsiones . . . . .	10.2
10.2.1. Impulsión sobre una partícula . . . . .	10.2
10.2.2. Fuerzas impulsivas; función delta de Dirac . . . . .	10.3
10.2.3. Axiomática . . . . .	10.5
10.2.4. Teorema fundamental . . . . .	10.5
10.2.5. Aplicación del principio de los trabajos virtuales . . . . .	10.7
10.2.6. Aplicación del principio de la cantidad de movimiento . . . . .	10.8
10.2.7. Aplicación del principio del momento cinético . . . . .	10.8
10.3. Consideraciones energéticas . . . . .	10.9
10.3.1. Energía cinética . . . . .	10.9
10.3.2. Coeficiente de restitución . . . . .	10.11
10.3.3. Teorema de Carnot . . . . .	10.13
10.4. Choque entre sólidos rígidos . . . . .	10.14
10.4.1. La deformabilidad de los sólidos . . . . .	10.14
10.4.2. Caso general de choque entre dos sólidos . . . . .	10.16
10.4.3. Choque directo . . . . .	10.17
10.4.4. Impulsiones tangenciales . . . . .	10.19
10.5. Dinámica analítica de impulsiones . . . . .	10.19
<b>11. Oscilaciones lineales con varios grados de libertad</b>	<b>11.1</b>
11.1. Ecuaciones del movimiento . . . . .	11.1
11.1.1. Linealización de las ecuaciones . . . . .	11.1
11.1.2. Formulación matricial . . . . .	11.4
11.2. Oscilaciones libres . . . . .	11.7
11.2.1. Oscilaciones sin amortiguamiento; problema de autovalores . . . . .	11.7
11.2.2. Frecuencias propias y modos normales de vibración . . . . .	11.9
11.2.3. Caso de autovalores múltiples . . . . .	11.15
11.2.4. Análisis modal; coordenadas normales . . . . .	11.16
11.2.5. Condiciones iniciales . . . . .	11.20
11.2.6. Oscilaciones libres con amortiguamiento . . . . .	11.21

11.3. Oscilaciones forzadas . . . . .	11.25
11.3.1. Oscilaciones sin amortiguamiento; Resonancia . . . . .	11.25
11.3.2. Oscilaciones con amortiguamiento; régimen transitorio y permanente . . . . .	11.26
11.4. Métodos para la obtención de modos y frecuencias propias . . . . .	11.28
<b>12. Ecuaciones de Hamilton . . . . .</b>	<b>12.1</b>
12.1. Introducción . . . . .	12.1
12.2. La transformada de Legendre y sus propiedades . . . . .	12.2
12.3. Ecuaciones de Hamilton . . . . .	12.3
12.4. Obtención práctica de las ecuaciones . . . . .	12.6
12.5. Integrales primeras . . . . .	12.7
12.6. Generalización para fuerzas no conservativas . . . . .	12.8
12.7. El método de Routh . . . . .	12.9
12.8. El principio de Hamilton aplicado a la función hamiltoniana . . . . .	12.11
12.9. Estructura de las ecuaciones canónicas . . . . .	12.12
12.9.1. Transformaciones canónicas . . . . .	12.13
12.10. Ejemplos . . . . .	12.15
<b>13. Estática . . . . .</b>	<b>13.1</b>
13.1. Consideraciones generales . . . . .	13.1
13.2. Condiciones analíticas del equilibrio . . . . .	13.4
13.2.1. Unicidad del equilibrio; condición de Lipschitz . . . . .	13.5
13.3. Estabilidad del equilibrio . . . . .	13.6
13.3.1. Concepto de estabilidad . . . . .	13.6
13.3.2. Condiciones de estabilidad: teorema de Lejeune-Dirichlet . . . . .	13.8
13.4. Equilibrio de una partícula . . . . .	13.11
13.4.1. Partícula libre . . . . .	13.11
13.4.2. Partícula ligada a una superficie . . . . .	13.12
13.4.3. Partícula ligada a una curva . . . . .	13.14
13.5. Equilibrio de un sistema de partículas . . . . .	13.16
13.5.1. Ecuaciones cardinales de la estática . . . . .	13.16
13.5.2. Principio de los trabajos virtuales . . . . .	13.18
13.6. Equilibrio del sólido rígido . . . . .	13.20
13.6.1. Aplicación del principio de los trabajos virtuales . . . . .	13.20
13.6.2. Sistemas isostáticos e hiperestáticos . . . . .	13.22
13.7. Reacciones en los enlaces . . . . .	13.24
13.7.1. Enlaces lisos . . . . .	13.25
13.7.2. Enlaces con resistencias pasivas; rozamiento . . . . .	13.29

13.8. Sistemas de barras articuladas . . . . .	13.34
13.8.1. Clasificación . . . . .	13.34
13.8.2. Método de los nudos . . . . .	13.37
13.8.3. Método de las secciones . . . . .	13.38
<b>14. Estática de hilos</b>	<b>14.1</b>
14.1. Consideraciones generales . . . . .	14.1
14.2. Ecuaciones de equilibrio bajo cargas continuas . . . . .	14.2
14.2.1. Ecuación vectorial del equilibrio . . . . .	14.2
14.2.2. Ecuaciones en coordenadas intrínsecas . . . . .	14.4
14.2.3. Ecuaciones en coordenadas cartesianas . . . . .	14.5
14.2.4. Casos de fuerzas conservativas . . . . .	14.6
14.2.5. Casos de fuerzas centrales o paralelas . . . . .	14.7
14.2.6. Analogía dinámica . . . . .	14.10
14.3. Configuraciones de equilibrio de hilos . . . . .	14.10
14.3.1. Hilo homogéneo sometido a peso propio (catenaria) . . . . .	14.10
14.3.2. Hilo sometido a carga constante por unidad de abscisa (parábola) . . . . .	14.15
14.3.3. Efecto de cargas puntuales . . . . .	14.22
14.3.4. Algunos tipos de condiciones de apoyo en los extremos . . . . .	14.24
14.4. Hilos apoyados sobre superficies . . . . .	14.28
14.4.1. Superficie lisa sin cargas . . . . .	14.28
14.4.2. Superficie lisa con cargas . . . . .	14.28
14.4.3. Enrollamiento sobre tambor rugoso . . . . .	14.31
<b>A. Resumen de álgebra vectorial y tensorial</b>	<b>A.1</b>
A.1. Escalares, puntos y vectores . . . . .	A.1
A.2. Producto escalar y vectorial . . . . .	A.2
A.3. Bases y coordenadas . . . . .	A.2
A.4. Tensores de orden dos . . . . .	A.3
A.5. Cambio de base . . . . .	A.5
A.6. Operaciones y clases especiales de tensores . . . . .	A.7
A.7. Cambio de coordenadas de un tensor . . . . .	A.7
A.8. Coeficientes de permutación . . . . .	A.8
A.9. Forma cuadrática asociada a un tensor . . . . .	A.8
A.10. Vector axial asociado a un tensor hemisimétrico . . . . .	A.9
A.11. Traza y determinante . . . . .	A.10

# Capítulo 1

## Principios de la mecánica

Este capítulo desarrolla algunos principios fundamentales sobre los que se basa la teoría de la *mecánica clásica*, en la que se centra este curso. Conocer dicho punto de partida, así como las limitaciones de la teoría empleada, resulta imprescindible para una asimilación adecuada de la materia.

### 1.1. La mecánica como teoría científica

**DEFINICIÓN:** *La mecánica es una teoría científica que estudia el movimiento de los cuerpos y sus causas, o bien el equilibrio, es decir, la falta de movimiento.*

Se trata de una *teoría científica* porque pretende interpretar fenómenos físicos que se observan experimentalmente. Para ello la mecánica parte de unos postulados o principios fundamentales, sobre los que se basa una teoría a través de modelos matemáticos, dando así una interpretación coherente a las observaciones experimentales. En la actualidad existen diversas teorías de la mecánica, y a lo largo del tiempo han existido muchas más que han quedado obsoletas bien por no ser prácticas en su aplicación, o bien por no adecuarse sus predicciones a la realidad física observada.

Para juzgar las teorías científicas, y en concreto la mecánica, no tiene sentido emplear criterios de «veracidad absoluta.» A pesar de que la mecánica tenga un elevado contenido de modelos matemáticos, habiendo sido a lo largo de la historia una de las motivaciones principales para el desarrollo de las matemáticas, no es la elegancia ni el rigor formal de estos modelos matemáticos un criterio adecuado para valorar una teoría de la mecánica. Cada teoría (y sus principios subyacentes) es tan buena como la interpretación que realiza de las observaciones experimentales de la realidad física.

Si las predicciones teóricas se corresponden adecuadamente con las observaciones experimentales, la teoría será adecuada, independientemente de su «elegancia» matemática. Por el contrario, si los resultados no se corresponden con las observaciones, llegaremos a la conclusión de que se precisa otra teoría distinta para el fenómeno en cuestión.

Así, las tres teorías principales de la mecánica existentes en la actualidad son:

**La Mecánica Clásica**, cuyo desarrollo moderno se considera generalmente iniciado por Newton (1686: «*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*») y continuado hasta nuestros días por diversos matemáticos y científicos: Juan, Daniel y Jacobo Bernouilli, L. Euler, J. D'Alembert, J.L. Lagrange, W. Hamilton, etc. Los modelos newtonianos, enunciados por Isaac Newton, y desarrollados algo más tarde por Euler, fueron los primeros que lograron explicar satisfactoriamente al mismo tiempo el movimiento de los cuerpos celestes (observaciones de Kepler y otros sobre el movimiento de los planetas) y el de los cuerpos a escala humana (observaciones de Galileo sobre la caída de los cuerpos).

**La Mecánica Relativista**, que suple la inexactitud de la mecánica clásica para velocidades próximas a la de la luz (teoría de la relatividad restringida) o para campos gravitatorios muy intensos (teoría de la relatividad generalizada). Ha sido propuesta por Albert Einstein en el siglo XX, e involucra una complejidad matemática notablemente mayor.

**La Mecánica Cuántica**, que surge de las observaciones de las partículas elementales, en las que intervienen acciones —productos de energía por tiempo— tan pequeñas que son comparables a la constante de Planck ( $E t \sim h$ ). En estos casos se aplica el principio de indeterminación de Heisenberg, que establece la imposibilidad de medir de manera precisa la posición y velocidad de la partícula al mismo tiempo, valores que conocemos tan sólo de manera probabilista. También ha sido propuesta en el siglo XX (Congreso de Solvay de Bruselas en 1927), por un grupo de científicos entre los que destacan L. de Broglie, E. Schrödinger y P. Dirac.

A pesar de las nuevas teorías de la mecánica surgidas recientemente, se puede afirmar que la *mecánica clásica* constituye una teoría coherente, capaz de proporcionar interpretaciones suficientemente precisas para la mayoría de los fenómenos que observamos.

La teoría de la relatividad es de un orden más general que la mecánica clásica. Cuando la velocidad es pequeña en relación con la de la luz y los campos gravitatorios no son muy intensos, sus predicciones corresponden con las de la mecánica clásica. Sin embargo, es capaz interpretar correctamente otros fenómenos que la mecánica clásica no explica de manera adecuada<sup>1</sup>. Sería posible por tanto estudiar el movimiento de los objetos cotidianos como un automóvil o un balón, por ejemplo, mediante la teoría de la relatividad. Sin embargo, los modelos y los desarrollos matemáticos resultarían de una complejidad extraordinaria, por lo que este método es prácticamente inviable.

La mecánica clásica, a pesar de lo que su nombre parece indicar, no constituye una teoría muerta ni agotada en su desarrollo. En nuestros días se continúa investigando, especialmente en campos como la mecánica de medios continuos, o en los métodos cualitativos para el estudio de sistemas dinámicos complejos (estabilidad de sistemas dinámicos no lineales y movimientos de tipo caótico).

La *Mecánica de Medios Continuos* es un subconjunto especializado de la mecánica clásica. En ella se estudia el movimiento y la deformación de los medios continuos (es decir, aquéllos que no se pueden representar mediante idealizaciones discretas con un número finito de grados de libertad, como el punto material o el sólido rígido). Los modelos más simples de la mecánica de medios continuos son la teoría de la elasticidad lineal y la de los fluidos newtonianos, permitiendo estudiar respectivamente la deformación de los sólidos elásticos y las estructuras en régimen lineal y el flujo de los fluidos. Recientemente, se han propuesto modelos más generales para comportamientos no lineales, así como métodos y algoritmos muy potentes para su resolución numérica mediante el ordenador (método de los elementos finitos). Es necesario también una investigación experimental constante para conocer las propiedades mecánicas de los nuevos materiales (o incluso de los tradicionales, ya que algunos como el hormigón o los suelos son todavía insuficientemente conocidos).

La *Dinámica de sistemas no lineales complejos* permite estudiar el comportamiento de sistemas que no pueden ser caracterizados de manera de-

---

<sup>1</sup>Un ejemplo lo constituye el corrimiento del perihelio (punto de la órbita más cercano al Sol) observado para algunos planetas, especialmente el de Mercurio, el planeta más cercano al Sol y cuya órbita es la más excéntrica (salvo la de Plutón). En efecto, se observa un avance de su perihelio de unos 574 segundos de arco por siglo, y considerando el efecto gravitacional de los restantes planetas, la dinámica clásica sólo predice unos 531 segundos por siglo. Los restantes 43 segundos son obtenidos de manera muy precisa por la teoría de la relatividad, lo que constituye una contundente confirmación de la misma.

terminista. La aparente falta absoluta de orden en su respuesta es debida a menudo a una sensibilidad extrema a la variación de las condiciones iniciales u otros parámetros del sistema, lo que conduce a la denominación de «*sistemas caóticos*». Estos sistemas precisan ser analizados mediante métodos cualitativos, propuestos a final del siglo XIX por H. Poincaré y Liapounov, en lugar de los métodos cuantitativos y deterministas habituales. También en este caso el ordenador es una herramienta de gran utilidad.

Este curso está basado en la *Mecánica Clásica*, desarrollada a partir de los principios y teoremas newtonianos. Esta se aplicará fundamentalmente a sistemas discretos formados por partículas o masas puntuales, sólidos rígidos, resortes, etc., aunque se hará alguna incursión en medios deformables, como por ejemplo los cables. La mecánica de medios continuos se tratará en otras asignaturas de cursos posteriores, como la resistencia de materiales, elasticidad y plasticidad, la geotecnia, el cálculo de estructuras, la hidráulica, etc. Sin embargo los conceptos básicos para todas estas asignaturas son los mismos que se estudian en este curso de mecánica.

Como se ha dicho, en la mecánica juegan un papel importante las matemáticas, ya que se basa en modelos matemáticos que interpreten las observaciones experimentales. El aparato matemático en algunos casos puede resultar de cierta complejidad. Es importante no perder de vista, sin embargo, el sentido físico de los conceptos: Las matemáticas no son un fin en sí, sino un medio para interpretar conceptos y fenómenos físicos. Aunque los modelos matemáticos empleados aquí puedan ser más generales (y más complejos por tanto) que los estudiados en cursos anteriores, no conviene que oscurezcan nunca la interpretación física intuitiva de los conceptos.

Uno de los postulados esenciales de la mecánica es la causalidad determinista, lo que ha permitido superar interpretaciones mágicas o religiosas existentes antaño para algunos fenómenos, como el movimiento de los astros y otros fenómenos del firmamento celeste. Aún en nuestros días existen personas que creen en dicho tipo de interpretaciones (por ejemplo los astrólogos y sus seguidores), fruto por lo general de la ignorancia o del miedo a la verdad científica. Sin embargo, conviene admitir que, en ciertas situaciones, el postulado de la causalidad determinista en sentido estricto es cuestionable, siendo necesario acudir a métodos probabilistas para describir los fenómenos (como en la mecánica estadística, basada en la causalidad probabilista) o a métodos cualitativos de análisis (por ejemplo en los sistemas caóticos, en los que no es posible predecir el movimiento como ecuaciones horarias, ya que cualquier pequeña perturbación inicial lo modifica). En cualquier caso, es conveniente evitar un exceso de celo en la aplicación de los modelos deterministas de la mecánica, ya que no debemos olvidar que nuestra percepción



de la «realidad física» es necesariamente subjetiva.

Por otra parte, se postula también la capacidad de definir un conjunto de causas suficientemente reducido para explicar los fenómenos. Las causas muy alejadas en el espacio o en el tiempo no tienen efecto sobre las observaciones de fenómenos presentes. Esto también es cuestionable para interpretaciones muy generales: No es posible prescindir de la estructura del cosmos en el instante posterior a la primera gran explosión (big-bang) para explicar la existencia de las galaxias, estrellas y planetas actuales; asimismo parece que algunos fenómenos cosmológicos no se pueden interpretar sin recurrir a la materia oscura existente en el universo, de naturaleza aún desconocida (agujeros negros, neutrinos, ...).

## 1.2. Sistemas de Referencia; Espacio y Tiempo

Los fenómenos mecánicos se describen mediante «sistemas de referencia<sup>2</sup>,» basados en los conceptos de espacio y tiempo. Por su importancia conviene enunciar los postulados que asume la mecánica clásica para estos conceptos.

El *espacio*, y por tanto su métrica, tiene las propiedades siguientes.

1. *Independencia* de los objetos en él inmersos. (La métrica del espacio no se ve afectada por los mismos.)
2. *Constancia* a lo largo del tiempo.
3. *Homogeneidad*: es igual en todos los puntos, no existiendo puntos privilegiados.
4. *Isotropía*: es igual en todas las direcciones, no existiendo direcciones privilegiadas.

El espacio se caracteriza por una métrica Euclídea<sup>3</sup>, lo que lo convierte en un espacio puntual Euclídeo en 3 dimensiones,  $\mathbb{R}^3$ .

El *tiempo* se caracteriza a su vez por las siguientes propiedades.

1. *Homogeneidad*, al no existir instantes privilegiados.

---

» <sup>2</sup>No se debe confundir el término *sistema mecánico* (conjunto de partículas o cuerpos cuyo movimiento se desea estudiar) con *sistema de referencia* (triedro de ejes, coordenadas o parámetros que sirven para describir dicho movimiento).

<sup>3</sup>La distancia entre dos puntos definidos por sus coordenadas cartesianas rectangulares  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2)$  viene dada por  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

2. Fluye *constantemente en un sentido*, por lo que no se puede retroceder ni volver al pasado (desgraciadamente para algunos). Asimismo, los fenómenos futuros no pueden condicionar los presentes. No se cumple por tanto la isotropía, existiendo un único sentido en el que puede discurrir el tiempo.
3. *Simultaneidad absoluta*: Los fenómenos considerados simultáneos para dos observadores en sendos sistemas de referencia, lo son asimismo para cualquier otro observador ligado a cualquier otro sistema de referencia.

En mecánica clásica, el tiempo se considera una variable de naturaleza distinta de las variables espaciales, y la métrica euclídea no está influenciada por él.

Algunos de estos postulados básicos no son aceptados por la mecánica relativista. La teoría de la relatividad restringida establece una referencia en cuatro dimensiones espacio-tiempo. La teoría de la relatividad general establece un espacio curvado, con métrica Riemanniana no Euclídea, debido a la presencia de masas que condicionan dicha métrica. De esta forma el espacio no sería independiente de los objetos en él inmersos.

### 1.3. Principio de la relatividad de Galileo

El principio de la relatividad galileana<sup>4</sup> establece que:

*‘Dos sistemas de referencia en movimiento relativo de traslación rectilínea uniforme son equivalentes desde el punto de vista mecánico; es decir, los experimentos mecánicos se desarrollan de igual manera en ambos, y las leyes de la mecánica son las mismas.’*

Uno de los ejemplos puestos por Galileo es el de un observador viajando en un barco que navega plácidamente sobre un río, en contraste con un observador fijo en la orilla. Ambos interpretan de la misma manera la caída de un cuerpo hacia el suelo en su propio sistema, que como sabemos sigue un movimiento vertical uniformemente acelerado.

---

<sup>4</sup>Galileo Galilei, *Discursos y demostraciones en torno a dos ciencias nuevas relacionadas con la mecánica*, 1602. Galileo, que vivió entre 1564 y 1642, realizó contribuciones importantes a la mecánica y a la astronomía, estudiando por primera vez los cielos mediante el telescopio que diseñó él mismo. Fue condenado como hereje por la inquisición católica, que no aceptaba su teoría según la cual la tierra gira alrededor del sol.

**Transformación de Galileo**<sup>5</sup>.— Sea un sistema móvil  $(O'x'y'z')$ , que se traslada respecto a otro fijo  $(Oxyz)$  con velocidad  $\mathbf{v}$ , manteniéndose paralelos los ejes de ambos. Puesto que podemos elegir las direcciones del triedro

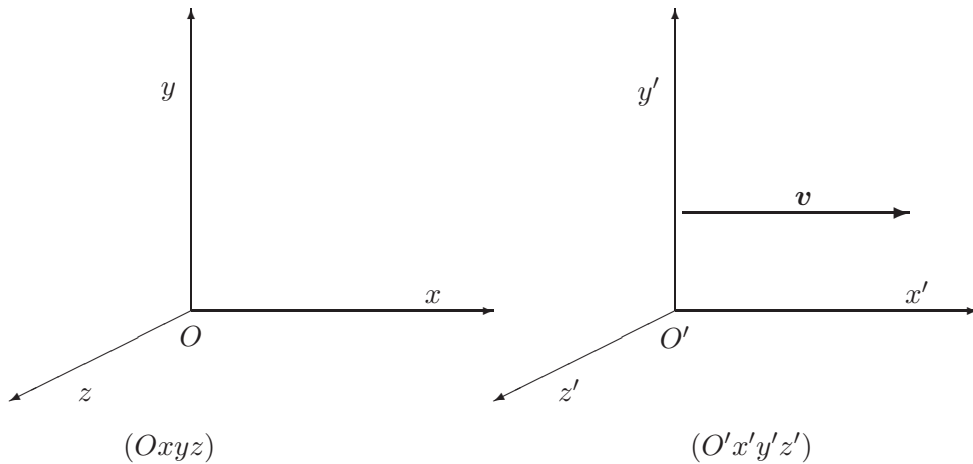


Figura 1.1: *Sistemas de referencia en movimiento relativo rectilíneo y uniforme, con velocidad  $v$  en la dirección de  $Ox$*

de referencia, elegimos la dirección  $Ox$  según la dirección de la velocidad de traslación (recordemos que el espacio es isotrópico, por lo que es lícito elegir una orientación arbitraria para los ejes, sin pérdida de generalidad). Consideraremos también que Inicialmente (para  $t = 0$ )  $O$  y  $O'$  coinciden.

Sean  $(x, y, z)$  las coordenadas de un punto en el sistema fijo,  $(x', y', z')$  en el móvil y  $v$  el módulo de la velocidad. Las ecuaciones de transformación para las coordenadas son:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (1.1)$$

Derivando sucesivamente<sup>6</sup>, obtenemos las velocidades y aceleraciones en

<sup>5</sup>En el apartado 6.3.5 se ofrece una generalización de esta transformación y se discute la relación de las simetrías que expresa (invariancias cuando se produce la transformación) con las constantes del movimiento y los principios de conservación.

<sup>6</sup>En lo sucesivo se empleará la notación de uno o dos puntos superpuestos para indicar derivadas (totales) respecto al tiempo:  $\dot{x} \stackrel{\text{def}}{=} dx/dt$ ,  $\ddot{x} \stackrel{\text{def}}{=} d^2x/dt^2$ . También emplearemos la notación mediante negritas para identificar vectores o tensores:  $\mathbf{a} \equiv \{a_i\}$ ,  $\mathbf{I} \equiv [I_{kl}]$ .

ambos sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}' = \dot{x} - v \\ \dot{y}' = \dot{y} \\ \dot{z}' = \dot{z} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}' = \ddot{x} \\ \ddot{y}' = \ddot{y} \\ \ddot{z}' = \ddot{z} \end{array} \right.$$

Se observa por tanto que las derivadas segundas (aceleraciones) coinciden. Esto nos permite intuir —admitiendo como postulado el principio de la relatividad galileana— que las leyes de la dinámica están basadas en las derivadas segundas respecto al tiempo, única forma de que las leyes sean invariantes cumpliéndose dicho principio. En efecto, según sabemos, el estado de un sistema formado por un partícula en movimiento según una dirección fija se caracteriza en un instante dado por su posición y su velocidad  $(x, \dot{x})$ . La evolución del movimiento viene gobernada por la ecuación dinámica ( $F = m\ddot{x}$ ).

## 1.4. Las leyes de Newton

Formuladas por Isaac Newton en su obra «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» (1686), constituyen el primer intento de formular una base axiomática para una teoría científica de la mecánica. Debe aclararse que no fueron formuladas por Newton de forma precisa como se suelen recoger hoy en día en los libros de texto. También debe advertirse que en sentido riguroso no recogen de forma completa toda la axiomática necesaria para la mecánica clásica, siendo necesario incorporar aportaciones adicionales de Euler, Cauchy y otros. A pesar de esto, la publicación de los «principia» constituye un hito monumental de enorme valor, sobre el que se cimienta la mecánica clásica.

Para aclarar el modelo axiomático de Newton citaremos aquí textualmente de los «Principia»<sup>7</sup>. Newton parte en primer lugar de cuatro definiciones:

*‘DEFINICION PRIMERA. La cantidad de materia es la medida de la misma originada de su densidad y volumen conjuntamente.’*

*‘DEFINICION II. La cantidad de movimiento es la medida del mismo obtenida de la velocidad y de la cantidad de materia conjuntamente.’*

*‘DEFINICION III. La fuerza ínsita de la materia es una capacidad de resistir por la que cualquier cuerpo, por cuanto de él*

---

<sup>7</sup>Las citas han sido extraídas de Isaac Newton, *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* (2 tomos), traducción española de Eloy Rada, Alianza Editorial, 1987.

*depende, perservera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo.'*

*'DEFINICION IV. La fuerza impresa es la acción ejercida sobre un cuerpo para cambiar su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo.'*

La definición primera (cantidad de materia de un cuerpo) equivale a lo que conocemos por *masa*. La tercera caracteriza las denominadas *fuerzas de inercia*, mientras que la cuarta se refiere a las *fuerzas* propiamente dichas.

Realizadas estas definiciones, Newton enuncia sus conocidas tres leyes o principios fundamentales:

*'LEY PRIMERA. Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento rectilíneo y uniforme a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado.'*

Esta ley constituye el llamado principio de la inercia. Admitiendo también el principio de Galileo, nos permite definir los llamados *sistemas inerciales*, como aquellos en los que se cumple dicho principio. Las leyes de la mecánica se formulan en un sistema inercial de referencia. Por el principio de Galileo, admitiendo que existe al menos un tal sistema inercial, existirán infinitos sistemas inerciales en los que se cumplen las mismas leyes mecánicas y en concreto la ley primera de Newton: todos aquellos relacionados entre sí mediante transformaciones de Galileo (1.1), es decir, que se mueven con velocidad rectilínea y uniforme respecto al primero.

Este principio nos permite también definir, como condiciones iniciales del movimiento, las que caracterizan a un movimiento estacionario o constante: la posición  $\mathbf{r}$  y la velocidad  $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{r}}$ .

Conviene observar también que Newton emplea el término «cuerpo» para referirse en realidad a una partícula, o punto material, caracterizada por la posición y velocidad de un solo punto<sup>8</sup>.

*'LEY II. El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.'*

Esta ley indica claramente una relación lineal («proporcional») entre fuerzas y variaciones de la cantidad de movimiento, de tipo vectorial («según

---

<sup>8</sup>El tratamiento de los sólidos rígidos, así como el de sistemas generales formados por varias partículas, requiere de diversos principios y teoremas adicionales que fueron propuestos por L. Euler. De esto se tratará en los capítulos 6 y 8.

la línea recta»). Se denomina en ocasiones *ley fundamental de la dinámica*, permitiendo obtener las ecuaciones básicas de la misma. Expresada como ecuación, equivale a:

$$\Delta \underbrace{(m\mathbf{v})}_{\substack{\text{cant. de} \\ \text{movto.}}} = \underbrace{\mathbf{F}\Delta t}_{\text{impulsión}} .$$

Pasando al límite, para un incremento infinitesimal de tiempo, obtenemos la relación diferencial siguiente:

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}dt.$$

O bien, llamando *cantidad de movimiento* a  $\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{v}$ ,

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Admitiremos en principio que la masa de un cuerpo se conserva. Así pues, se llega a la conocida expresión que define la ley del movimiento de una partícula:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}}, \quad (1.2)$$

donde  $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt$ . Cabe realizar en relación con esta fórmula las siguientes

OBSERVACIONES:

- La aceleración, derivada segunda del vector posición, es asimismo un vector. La ecuación (1.2) tiene por tanto carácter vectorial, lo que identifica a las fuerzas como vectores, e implícitamente supone la aditividad vectorial para las mismas (ley del paralelogramo de fuerzas).
- La expresión (1.2) da lugar a ecuaciones diferenciales de segundo orden, ya que intervienen derivadas segundas de la incógnita  $\mathbf{r}$  respecto al tiempo.

*‘LEY III. Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria. O sea, las acciones mutuas de los cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.’*

Se trata del llamado principio de acción y reacción. Todas las fuerzas deben de tener contrapartida, siendo imposible ejercer una fuerza desde el vacío, sin apoyo. Es siempre necesario apoyarse en algún cuerpo o medio material que absorba la reacción (modificando a su vez el movimiento de este otro cuerpo, según la segunda ley).

EJEMPLO 1.1: *Fuerza ejercida desde la superficie de la Tierra.* Todo cuerpo cercano a la tierra, tanto en estado de movimiento (caída libre) o en reposo sobre el suelo, *recibe* una fuerza (denominada peso) ejercida por la tierra, que lo mueve en el primer caso o lo mantiene inmóvil en el segundo. El cuerpo a su vez ejerce sobre la tierra una fuerza igual y contraria, aunque esta última, debido a la gran masa de la tierra, produce un efecto muy pequeño sobre nuestro planeta.

EJEMPLO 1.2: *Movimiento de un cohete en el vacío.* Una fuerza no se puede ejercer sobre el vacío, necesitando siempre aplicarse sobre otro cuerpo (que a su vez producirá una reacción igual sobre el primero). Para moverse — o más bien acelerar o frenar, es decir, variar el movimiento— en el vacío, un cohete o sonda espacial necesita apoyarse sobre algún medio. Esto se consigue mediante masa expulsada por la tobera, medio en el cual se *apoya* el cohete, a través de la expulsión de los gases del combustible quemado, propulsión iónica, plasma, u otros medios. De este tema se tratará en el capítulo 6.6.

## 1.5. Conceptos de masa y fuerza; discusión de las leyes de Newton

Las leyes de Newton reposan sobre las definiciones básicas de masa y fuerza. Sin embargo, examinando dichas leyes con espíritu crítico, es fácil ver que las definiciones realizadas por Newton de estos conceptos adolecen de algunas deficiencias.

La definición de fuerza (definición IV, pág. 1.9) es claramente circular con la primera ley. En efecto, se podría entender ésta como una definición de fuerza, obviando la definición anterior dada por Newton. Aún aceptando esto, tampoco se puede considerar esta ley como una definición precisa de fuerza, ya que no proporciona una manera de medir su valor de forma cuantitativa. En realidad tan sólo se podría deducir de la primera ley cuándo la fuerza es nula o cuándo no lo es. La segunda ley sin embargo sí se puede interpretar como una definición cuantitativa de fuerza, pero ésto la privaría a su vez de su consideración como principio.

En cuanto a la definición de masa (definición I, pág 1.8), Newton la refiere a la densidad ( $\rho$ ) y volumen ( $V$ ) que integran un cuerpo ( $M = \rho V$ ). ¿Cuál sería entonces la definición de densidad? Es difícil aceptar que la densidad sea un concepto más fundamental que el de masa.

Un procedimiento aparentemente más riguroso para definir la masa es

el debido a E. Mach<sup>9</sup> (1858-1916), que resumimos a continuación.

Sean dos partículas,  $a$  y  $b$ , formando un sistema binario aislado. Expresando la segunda ley de Newton para la partícula  $a$ :

$$m_a \mathbf{a}_a = \mathbf{F}_{ab},$$

donde  $\mathbf{F}_{ab}$  es la fuerza ejercida sobre  $a$  por  $b$ . Análogamente para  $b$ ,

$$m_b \mathbf{a}_b = \mathbf{F}_{ba} = -\mathbf{F}_{ab},$$

por la 3.<sup>a</sup> ley de Newton. Así,

$$m_a \mathbf{a}_a = -m_b \mathbf{a}_b,$$

y empleando los módulos de las aceleraciones  $a_a$  y  $a_b$ ,

$$\frac{m_b}{m_a} = -\frac{a_a}{a_b}.$$

Suponiendo la masa  $m_a$  como valor de referencia o definición de unidad de masa, este procedimiento nos permite medir la masa de cualquier partícula  $b$  a partir de la medición de las aceleraciones  $a_b$  y  $a_a$ .

Aunque aquí, por clarificar la explicación, se ha llegado a esta definición partiendo de las leyes de Newton, sería posible considerarla como definición básica de masa, para comprobar posteriormente que, efectivamente, es consistente con las leyes de Newton.

De esta forma, con el espíritu crítico mencionado, cabría considerar las leyes primera y segunda de Newton como definiciones de fuerza, con lo que la única ley que expresa un postulado básico de la mecánica sería la ley tercera. Según Mach por tanto, es la ley tercera de Newton (principio de acción y reacción) la que reviste mayor importancia en la axiomática de la mecánica clásica.

En relación con esta última ley, puede ser objeto de cierta polémica la consecuencia implícita de existencia de *acciones a distancia*, es decir acciones que se propagan de manera instantánea (con velocidad infinita). En efecto, si se suponen dos cuerpos alejados entre sí con fuerzas de interacción centrales (dirigidas según la recta que las une), y uno de ellos sufre un cambio de posición, la ley de acción y reacción obligaría a que la fuerza de reacción sobre la otra partícula modificase su dirección de manera instantánea<sup>10</sup>.

<sup>9</sup>E. Mach, *The science of mechanics*, traducción al inglés, Open Court, 1902.

<sup>10</sup>Históricamente ha existido siempre, antes y después de Newton, una contestación a la posibilidad de tales acciones a distancia. Antiguamente se defendía que todo el espacio estaba lleno de una sustancia invisible, llamada «Éter,» vehículo transmisor de las fuerzas. Este concepto sobrevivió a Newton, alcanzando su mayor predicamento dos siglos después para explicar el campo electromagnético, siendo la Teoría de la Relatividad la que acabó de desterrarlo.



En la realidad física parece que no existen tales interacciones instantáneas; respondiendo a ello la teoría de la relatividad restringida establece un límite a la velocidad de propagación de las interacciones, que es la velocidad de la luz en el vacío ( $c$ ). Esto origina una cierta inexactitud de la mecánica clásica, error que sin embargo es muy pequeño para las fuerzas gravitatorias o elásticas en objetos «cotidianos.»

Conviene observar también que de la tercera ley se pueden hacer dos enunciados. En su *forma débil*, ciñéndose estrictamente al enunciado Newtoniano, establece que las fuerzas son iguales en magnitud y dirección y de sentido opuesto. Sin embargo, no presupone que tengan la misma dirección que la recta que une a las dos partículas sobre las que actúan. En el caso en que sí se verifique esta última hipótesis más restrictiva, se dice que se cumple el principio de acción y reacción en su *forma fuerte*, siendo las fuerzas centrales. En numerosos casos prácticos se verifican ambos enunciados del principio de acción y reacción, como son las fuerzas gravitatorias, elásticas, o electrostáticas. Sin embargo, existen fenómenos importantes en los que no se verifica en ninguna de sus dos formas. Estos casos corresponden a fuerzas que dependen de la velocidad, ligadas por lo general a campos que se propagan con velocidad finita, como son las fuerzas electrodinámicas debidas a cargas en movimiento.

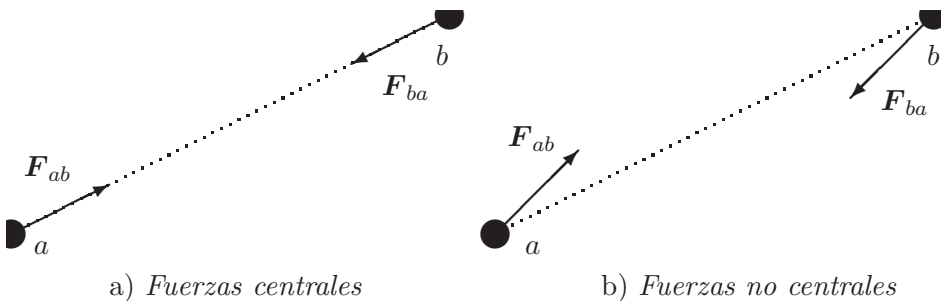


Figura 1.2: Las fuerzas centrales están dirigidas según la recta que une los cuerpos, mientras que las fuerzas no centrales no verifican esta hipótesis, aún siendo iguales en magnitud y dirección y de sentido opuesto.

En resumen, podemos clasificar las fuerzas citadas esquemáticamente como sigue.

- *Fuerzas centrales*: Están asociadas a campos que suponen una acción a distancia, propagándose por tanto de manera instantánea. Se trata de fuerzas dirigidas hacia las partículas que las originan, cumpliendo la tercera ley de Newton en su *forma fuerte*. En mecánica clásica se

admite esta hipótesis como adecuada para algunos de los tipos más usuales de fuerzas:

- *Fuerzas gravitatorias.* La hipótesis de fuerza central e instantánea se considera adecuada para las mediciones en escalas usuales. Sin embargo, para mediciones a escalas astronómicas o cosmológicas se trata de una hipótesis cuestionable. Sería más correcto interpretarlas mediante ondas de gravedad, que se propagan con la velocidad de la luz.
  - *Fuerzas electrostáticas o magnetostáticas,* de atracción o repulsión debidas a cargas eléctricas o magnéticas en reposo. Al igual que en el caso gravitatorio, de forma rigurosa para escalas astronómicas puede ser necesario considerar la transmisión de dichas fuerzas a través de ondas electromagnéticas.
  - *Fuerzas elásticas,* ejercidas entre las partículas en contacto de un medio continuo. Por lo general, podría admitirse que son manifestaciones macroscópicas de las fuerzas electrostáticas entre las moléculas.
- *Fuerzas no centrales:* ocurren, por lo general, cuando las interacciones dependen de la velocidad, estando asociadas a campos que se propagan con velocidad finita. Es el caso, por ejemplo, de las *Fuerzas electromagnéticas,* que cuando son debidas a cargas móviles pueden no cumplir tampoco el principio de acción y reacción en su forma débil.

Debe quedar claro que en este curso admitiremos la hipótesis de *fuerzas centrales,* por lo que será válido el principio de acción y reacción en su forma fuerte.

La definición de masa según el procedimiento de Mach arriba descrito no proporciona sin embargo un método viable para medirla. Sería prácticamente imposible aislar completamente un sistema binario y al mismo tiempo realizar mediciones. Una forma más práctica de medir la masa, aunque de forma indirecta, es con una balanza de resorte. En ésta lo que se mide directamente es el peso, o atracción gravitatoria hacia el centro de la Tierra. Basta dividir el peso ( $w$ ) por la aceleración de la gravedad en la superficie

de la Tierra ( $g$ ) para obtener la masa<sup>11</sup>:

$$w = mg \quad \Rightarrow \quad m = \frac{w}{g}.$$

## 1.6. La ley de la gravitación universal

Newton fue el primero en explicar el movimiento, tanto de los cuerpos celestes —proporcionando la explicación matemática de las leyes observadas por Kepler para el movimiento de los planetas en órbitas elípticas—, como de los «terrestres» —la famosa caída de la manzana—, a partir de una única ley para las fuerzas: la ley de la gravitación universal. Anteriormente, los estudios y teorías de la mecánica habían buscado explicaciones separadas para ambos fenómenos. Kepler había deducido del análisis minucioso de las observaciones experimentales que los planetas describían elipses con foco en el Sol, así como la constancia de la velocidad areolar y el período de estos movimientos orbitales (aptdo. 5.5). A su vez, Galileo había caracterizado el movimiento de caída uniformemente acelerado de los graves, por —según la leyenda— experimentos desde la torre inclinada de Pisa. Todas estas descripciones eran empíricas, sin una justificación basada en modelos matemáticos coherentes.

La ley de la gravitación universal propuesta por Newton establece que entre dos cuerpos<sup>12</sup> cualesquiera se produce una fuerza gravitatoria de atracción, proporcional al producto de las masas respectivas y al inverso del cuadrado de la distancia entre los mismos. La expresión de esta fuerza, en módulo, es

$$F = G \frac{Mm}{r^2},$$

y en forma vectorial

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1.3)$$

---

<sup>11</sup>No debe originar confusión la existencia de dos unidades con el mismo nombre para caracterizar magnitudes distintas: el kg de masa, y el kg de fuerza o kilopondio (kp), definido como el peso de 1 kg de masa en la superficie de la tierra, considerando un valor medio constante de la aceleración de la gravedad (1 kg fuerza  $\simeq$  9,81 N). Ello permite hablar —afortunadamente para los tenderos, fruteros, pescaderos y demás gremios poco interesados en la filosofía de la mecánica durante su quehacer cotidiano— simplemente de kg, sin necesitar especificar si se trata de masa o de peso, ya que en la superficie de la tierra ambos son equivalentes, al menos en una primera aproximación en que  $g$  se suponga constante.

<sup>12</sup>Debe entenderse «cuerpo» en el sentido de partícula, tal y como emplea Newton este término (pág. 1.9).

donde  $\mathbf{F}$  representa la fuerza ejercida por la masa  $M$  sobre  $m$ , y  $\mathbf{r}$  es el vector que las une, con origen en  $M$  y extremo en  $m$ .

En la mecánica clásica, la fuerza gravitatoria es una acción a distancia que, de manera muy aproximada, podemos suponer se transmite de forma instantánea, sin necesitar de ningún medio material para ello. Así, cada masa  $M$  crea un campo de fuerzas gravitatorio, campo vectorial caracterizado en cada punto por una intensidad  $\mathbf{i}$ :

$$\mathbf{i} \stackrel{\text{def}}{=} -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r};$$

La fuerza ejercida sobre un cuerpo de masa  $m$  será el producto de ésta por la intensidad del campo,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{i} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}.$$

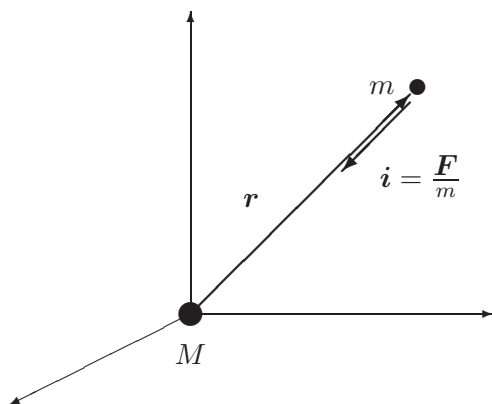


Figura 1.3: *Atracción gravitatoria entre dos masas  $M$  y  $m$ , situadas a distancia  $r$*

La teoría de la relatividad general elimina las fuerzas gravitatorias; para ello, interpreta el efecto de las masas como una modificación a la métrica espacio-tiempo, que resulta ser Riemanniana en lugar de Euclídea. Así, en esta nueva métrica, las trayectorias de las partículas corresponden a las geodésicas del espacio-tiempo, que vendrían a ser las ecuaciones horarias del movimiento<sup>13</sup>.

<sup>13</sup>En la mecánica clásica la trayectoria seguida por una partícula sometida a la acción gravitatoria de otra es una cónica, como se verá en el capítulo 5. Podríamos plantearnos, en la teoría de la relatividad general, qué trayectoria seguiría un cuerpo en un universo homogéneo, pero en cualquier caso no resulta ser una cónica. En un caso sencillo, con una única masa aislada, la métrica de Schwarzschild creada por ésta conduce a órbitas que no se cierran, lo que puede explicar algunos fenómenos bien conocidos como el corrimiento del perihelio de Mercurio.

### 1.6.1. Masa gravitatoria y masa inerte.

En principio, el concepto de masa que interviene en la ley de la gravitación no tendría porqué coincidir con la masa empleada para la ley II de Newton; en el primer caso sirve para definir la fuerza gravitatoria, mientras que en el segundo define la fuerza de inercia. Podemos distinguirlas por tanto denominándolas  $m_g$  (masa gravitatoria) y  $m_i$  (masa inerte).

Existe, sin embargo, una observación experimental: en la superficie de la tierra todos los cuerpos caen en el vacío hacia el suelo con la misma aceleración ( $g$ ). Sea un cuerpo cualquiera en la superficie de la tierra; su peso es

$$w = G \frac{M_g m_g}{R^2},$$

donde  $M_g$  y  $m_g$  son las masas respectivas (gravitatorias) de la Tierra y del cuerpo,  $R$  es el radio de la tierra (suponemos el cuerpo a una altura  $h$  pequeña, por lo que  $R + h \approx R$ ), y  $G$  es la constante de la gravitación universal.

Empleando la segunda ley de Newton, se puede relacionar el peso con la aceleración que experimenta el cuerpo:

$$w = m_i g,$$

siendo  $m_i$  la masa (inercial) del mismo. Igualando ambas expresiones de  $w$  se obtiene:

$$\frac{m_i}{m_g} = \frac{M_g G}{\underbrace{g R^2}_{\text{constante}}}.$$

Así, el cociente  $m_i/m_g$  permanece constante. Ya que  $G$  es una constante cuyo valor puede ser cualquiera, es posible elegir el mismo de forma que este cociente sea la unidad. De esta forma, ambas masas tendrían siempre igual valor:

$$m_i \equiv m_g.$$

Para ello, el valor de la constante de la gravitación universal ha de ser

$$G = \frac{g R^2}{M}.$$

**Consideraciones sobre el universo.**— Supongamos que el universo tiene un tamaño finito, y que, de forma aproximada, se puede idealizar como una esfera, con una distribución de masa de densidad media  $\rho$ . Sea un

cuerpo de masa  $m$ , situado a una distancia  $R$  del centro de dicha esfera; este experimentaría una fuerza atractiva hacia el centro del universo de valor:

$$F = \underbrace{\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right)}_{\text{masa esfera}} \frac{mG}{R^2} = \frac{4}{3}\pi \rho mGR.$$

Así, todos los cuerpos del universo experimentarían una aceleración hacia el centro de aquél de valor creciente proporcionalmente a su distancia  $R$ . Si esto fuese así, desde un punto distinto del centro del universo se observaría un movimiento diferente de las estrellas y galaxias según las distintas direcciones de observación; en la dirección del radio creciente, la aceleración sería mayor, mientras que en la opuesta disminuiría. Sin embargo, esto no parece concordar con las observaciones experimentales medidas desde la Tierra.

¿Cómo se puede explicar esto, admitiendo que el universo es finito? Una posible explicación sería una teoría «antropocéntrica», según la que el planeta Tierra tendría el inmenso privilegio de estar situado justo en el centro del universo. De esta forma, nuestras observaciones deberían ser iguales en cualquier dirección, ya que todas serían radiales. Sin embargo, fuera de creencias pseudo-religiosas, la teoría antropocéntrica parece poco probable. Más bien, la observación anterior podría explicarse por una de las siguientes dos hipótesis:

1. El universo es homogéneo, isótropo e infinito. Sin embargo, esta suposición es incompatible con la teoría, generalmente aceptada en la actualidad, del «Big-Bang» como origen del universo. Esta primera explosión primigenia ocurrió al parecer hace unos diez mil millones de años, lo que establece un límite para el tamaño del universo.
2. El universo es finito, pero con una métrica no euclídea, en la que todos los puntos pueden considerarse el centro de los demás. Esta última hipótesis es la que parece más plausible, quedando por discutir el tipo de métrica, para lo cual existen a su vez distintas teorías.

E. Mach interpretó la acción gravitatoria del resto del universo como responsable de la inercia de los cuerpos. Así, sería la masa del universo lejano la encargada de mantener un cuerpo con velocidad uniforme y rectilínea o en reposo ante la ausencia de otras fuerzas cercanas. Esto podría ser una bonita teoría, pero Mach lo dejó planteado tan sólo como una especulación, que carece de una justificación rigurosa.

**Tipos de fuerzas en el universo.**— Las fuerzas gravitatorias no son las únicas que existen en el universo físico. De forma esquemática se pueden distinguir cuatro tipos fundamentales de fuerzas, siendo las demás manifestaciones macroscópicas de éstas.

1. *Fuerzas gravitatorias.* Aunque en la mecánica clásica se consideran como acciones a distancia, de propagación instantánea, en la realidad parece que se propagan con velocidad finita. Esta propagación se realiza mediante las llamadas ondas gravitatorias. En la interpretación dual onda/corpúsculo equivalen a las partículas llamadas Gravitones<sup>14</sup>.
2. *Fuerzas electromagnéticas.* Están gobernadas por las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético. Se propagan mediante las Ondas electromagnéticas, que incluyen la luz, ondas de radio, etc. Las partículas equivalentes son los Fotones.
3. *Fuerzas nucleares fuertes.* Son las fuerzas que unen a las partículas en el núcleo atómico. Intervienen únicamente en la mecánica cuántica. Están asociadas a las partículas denominadas Gluones.
4. *Fuerzas nucleares débiles.* Son las fuerzas que intervienen en la desintegración nuclear. Asimismo intervienen en la mecánica cuántica, y las partículas asociadas son los Bosones.

La publicación por Newton de los «Principia» con la teoría de la gravitación universal supuso en su tiempo un avance importante para la mecánica y para las matemáticas, al interpretar de forma coherente y unificada dos tipos de fenómenos que antes se consideraban obedecientes a leyes distintas: el movimiento de los objetos terrestres y el de los objetos celestes. De manera similar, se busca hoy en día, por parte de los físicos teóricos y matemáticos, una *teoría unificada* que permita explicar, a partir de una causa común, los cuatro tipos de fuerzas que se observan en el universo. Sin embargo, es de prever que esta teoría, aún en el improbable caso de poderse obtener, sería mucho más compleja y engorrosa de utilizar que la mecánica clásica o los métodos newtonianos. Por ello, aún en la hipótesis de que se logre algún avance importante en esta línea, es improbable que tenga repercusiones prácticas en la mecánica aplicada a la ingeniería, campo que nos ocupa y en el cual la mecánica clásica seguirá teniendo plena vigencia.

---

<sup>14</sup>Aunque se han establecido diversos experimentos para detectar las ondas gravitatorias, aún no se han llegado a medir de forma fehaciente, debido a su intensidad extremadamente baja.





## Capítulo 2

# Dinámica de la partícula

La *partícula*, o punto material, es la idealización más simple de la mecánica, definiéndose como un punto dotado de masa. Por lo general se puede emplear este modelo cuando las dimensiones de un cuerpo sean lo suficientemente pequeñas como para suponer toda su masa concentrada en un punto.

Sin embargo, el criterio del tamaño pequeño no es siempre suficiente para establecer la validez de esta idealización. El modelo del punto material puede ser inadecuado en algunas situaciones, aunque las dimensiones del cuerpo sean pequeñas. Para ilustrar esta afirmación, supongamos como ejemplo la caída de una bolita pequeña por un plano inclinado bajo dos hipótesis distintas:

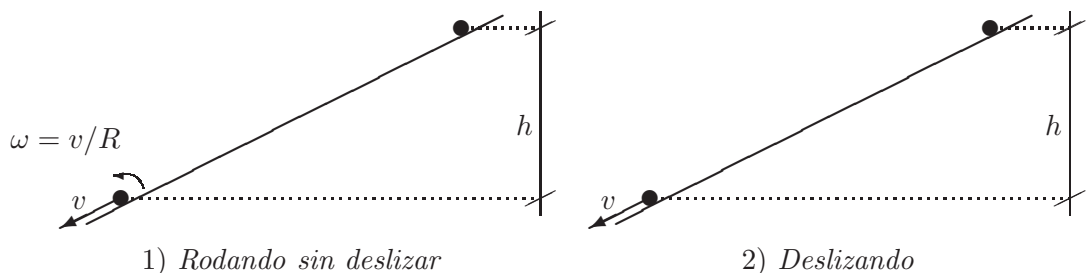


Figura 2.1: Bolita cayendo por un plano inclinado, en las hipótesis de rodadura perfecta o deslizamiento sin rodadura

**1) Rodando sin deslizar.**— Planteamos la conservación de la energía al bajar una altura  $h$ . Para ello se tiene en cuenta la energía cinética correspondiente a una esfera rodando, sumando el término correspondiente

a la traslación del centro de masa, y el de rotación como sólido rígido:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5}mR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 1,195\sqrt{gh}$$

**2) Deslizado.**— En esta hipótesis sólo hay energía cinética de traslación:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = 1,414\sqrt{gh}$$

En este segundo caso, que sería el correspondiente a la idealización como partícula, la velocidad de caída resulta ser un 18,32 % mayor. Esta diferencia se manifiesta *independientemente del tamaño de la bolita*, por pequeña que ésta sea. Baste este ejemplo para hacer notar que el concepto de partícula es una idealización, no necesariamente válida en todos los casos aunque el cuerpo sea pequeño.

Sin embargo, el modelo del punto material es una idealización sumamente útil, ya que en muchos casos se pueden estudiar independientemente el movimiento de traslación de un cuerpo (traslación del centro de masas), y el movimiento de rotación del mismo (alrededor del centro de masas). También es útil para aplicar los métodos de la mecánica a partes elementales de sistemas mayores (partículas de un sistema, elementos diferenciales de volumen en un medio continuo, etc.). Así, en este capítulo se exponen los teoremas generales y se desarrollan los métodos de cálculo que más tarde se generalizarán a sistemas de varias partículas.

## 2.1. Principios y teoremas generales

### 2.1.1. Cantidad de movimiento

Se llama *cantidad de movimiento*<sup>1</sup> de una partícula a

$$\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{v}.$$

<sup>1</sup>En Inglés se emplea el término «linear momentum» o simplemente «momentum», por lo que algunos autores emplean el término *momento lineal* (traducción literal del inglés) en lugar de *cantidad de movimiento*.

El principio de la cantidad de movimiento se deduce como consecuencia directa de la segunda ley de Newton (apto 1.4):

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{p}}. \quad (2.1)$$

En el caso usual de que la masa de la partícula no varíe<sup>2</sup>, se obtiene la expresión clásica de la ley fundamental de la dinámica (1.2), *Fuerza = masa × aceleración*:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}}.} \quad (2.2)$$

Conviene recordar que, en esta expresión,  $\mathbf{F}$  representa la resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre la partícula. Se deben incluir, mediante suma vectorial, tanto las fuerzas activas como las reacciones de apoyo o reacciones del medio.

Cuando la fuerza total se anula, se obtiene el correspondiente teorema de conservación:

$$\boxed{\text{si } \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} = \text{cte.}} \quad (2.3)$$

Por lo tanto, el movimiento de una partícula aislada es tal que se conserva su cantidad de movimiento; es decir, su velocidad se mantiene constante, describiendo un movimiento rectilíneo uniforme.

### 2.1.2. Momento cinético

Sea una partícula  $m$ , dotada de una velocidad  $\mathbf{v}$  y situada en un punto  $P$ . El *momento cinético*<sup>3</sup> respecto a un punto fijo  $O$ ,  $\mathbf{H}_O$ <sup>4</sup>, se define como el momento de la cantidad de movimiento respecto a dicho punto. Tomando  $O$  como origen del sistema de referencia (inercial)  $Oxyz$ ,

$$\mathbf{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v};$$

derivando respecto del tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}_O}{dt} &= \dot{\mathbf{r}} \wedge m\mathbf{v} + \mathbf{r} \wedge m\dot{\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{0} + \underbrace{\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}}_{\mathbf{M}_O} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Estrictamente hablando, la masa de una partícula es siempre invariable; al hablar de casos en los que  $m$  sea variable, nos referimos a cuerpos que pierdan o ganen partículas de masa (ver capítulo 6.6).

<sup>3</sup>En las traducciones literales de la terminología anglosajona se emplea el término *momento angular*.

<sup>4</sup>Otros autores emplean notaciones distintas para referirse al momento cinético:  $\mathbf{OK}$  (M. Roy, Fernández Palacios),  $\mathbf{L}_O$  (Marion, Goldstein, Griffiths)

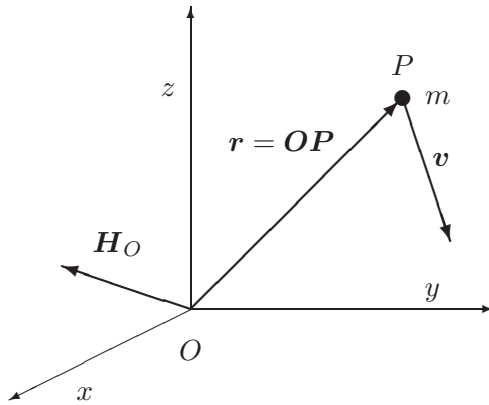


Figura 2.2: *Momento cinético de una partícula respecto al punto O.*

siendo  $\mathbf{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$  el momento de la fuerza  $\mathbf{F}$  respecto a  $O$ . Resulta por tanto la ecuación:

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{H}_O}{dt}.} \quad (2.4)$$

El correspondiente teorema de conservación que se deduce de (2.4) es:

$$\boxed{\text{si } \mathbf{M}_O = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}_O = \text{cte.}} \quad (2.5)$$

Esta conservación se verificará en el caso de la partícula aislada, y también en el caso de fuerzas centrales que se describe más abajo.

**Momento áxico.**—

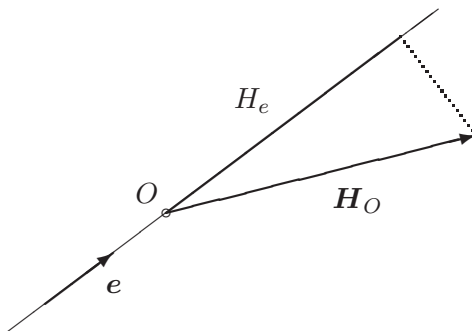


Figura 2.3: *Momento áxico respecto a un eje  $(O, e)$*

Sea un eje de dirección fija  $e$ , pasando por el punto  $O$ . Se define como momento áxico respecto de este eje la proyección del momento cinético

respecto de un punto cualquiera del eje sobre la dirección del mismo. Empleando la notación

$$M_e \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}, \quad H_e \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e},$$

multiplicando escalarmente ambos miembros de (2.4) por  $\mathbf{e}$  se deduce directamente la igualdad:

$$M_e = \frac{dH_e}{dt}.$$

Esta fórmula se puede aplicar entre otros casos al movimiento plano de rotación alrededor de un eje fijo.

### Fuerzas centrales.—

Se denominan centrales a las fuerzas que pasan constantemente por un punto dado, «centro» de las fuerzas. Es evidente que respecto de este punto el momento de las fuerzas es nulo, por lo que aplicando (2.5) se deduce que el momento cinético se conserva:

$$\mathbf{H}_O = \text{cte.}$$

Se obtienen inmediatamente 2 características importantes del movimiento:

1. La *trayectoria es plana*;  
ya que al ser  $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{r}$  es constantemente perpendicular a una dirección  $\mathbf{H}_O$  fija, definiendo por tanto un plano.
2. La *velocidad areolar es constante*;  
puesto que el área barrida por unidad de tiempo (figura 2.4) es:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\frac{1}{2}|\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}| = \frac{1}{2m}|\mathbf{H}_O| \quad \text{cte.}$$

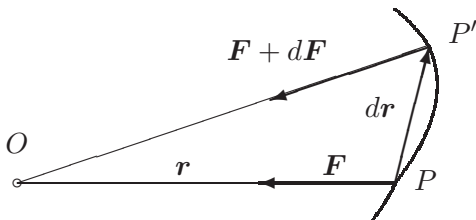


Figura 2.4: *Fuerzas centrales, dirigidas hacia un centro de fuerzas O. El área barrida en el intervalo infinitesimal dt es  $dS = OPP' = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}|$ .*

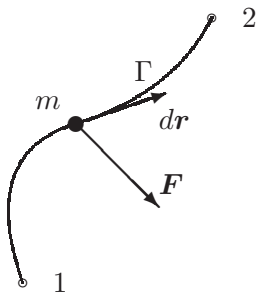


Figura 2.5: Trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  al recorrer la curva  $\Gamma$  entre 1 y 2.

### 2.1.3. Energía cinética

Sea una partícula de masa  $m$ , que se mueve según una trayectoria  $\Gamma$ , bajo la acción de fuerzas con resultante  $\mathbf{F}$  (recordemos que ésta incluye todas las fuerzas, activas y pasivas). El trabajo elemental realizado por  $\mathbf{F}$  en un desplazamiento infinitesimal  $d\mathbf{r}$  se define por el producto escalar siguiente<sup>5</sup>

$$dW \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r};$$

considerando que  $\mathbf{F} = m \, d\mathbf{v}/dt$  y  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ ,

$$dW = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \quad (2.6)$$

El trabajo realizado al recorrer  $\Gamma$  entre los dos puntos extremos 1 y 2 resulta de la integral curvilínea:

$$W_{12} = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv^2 \Big|_1^2.$$

Se define como energía cinética  $T$  de la partícula:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2;$$

así, la expresión anterior equivale a

$$\boxed{W_{12} = T_2 - T_1} \quad (2.7)$$

Podemos enunciar entonces:

*‘El trabajo realizado por la resultante de las fuerzas sobre una partícula es igual al incremento de su energía cinética.’*

Este resultado se suele llamar también el *teorema de las fuerzas vivas*.

<sup>5</sup>La notación empleada, « $dW$ », no indica aquí una diferencial exacta de una determinada función  $W$ , sino únicamente un incremento infinitesimal de trabajo producido por  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $d\mathbf{r}$ . Tan sólo resulta ser una diferencial exacta cuando las fuerzas son conservativas.

**Caso de fuerzas conservativas.—**

Se denomina campo de fuerzas conservativas aquél en el que el trabajo realizado por la fuerza, para recorrer el camino entre dos puntos dados, es independiente de la trayectoria seguida  $\Gamma$  para ir de uno al otro. Así para distintos caminos  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  que tengan en común el origen (1) y el final (2),

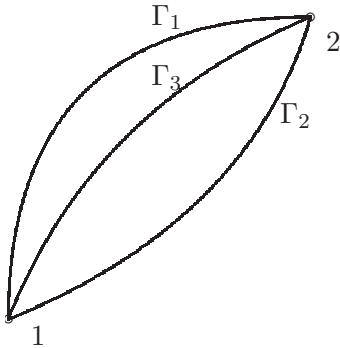


Figura 2.6: Trayectorias distintas en un campo conservativo para ir de 1 a 2.

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Es fácil ver que esta condición es equivalente a que el trabajo realizado para recorrer cualquier trayectoria cerrada sea nulo. En efecto, sea una curva cerrada cualquiera  $\Gamma$ , a la que pertenecen los puntos 1 y 2. Ésta puede descomponerse en dos curvas abiertas con extremos en 1 y 2:  $\Gamma = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^-$ , teniendo  $\Gamma_1^+$  el sentido de 1 a 2 y  $\Gamma_2^-$  el sentido de 2 a 1. La integral curvilínea sobre  $\Gamma$  es pues

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\Gamma_2^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (2.8)$$

como queríamos demostrar.

No son conservativas las fuerzas debidas a resistencias pasivas, como el rozamiento o las fuerzas de tipo viscoso. En éstas el integrando ( $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ) es siempre negativo, puesto que la fuerza de resistencia ( $\mathbf{F}$ ) se opone al movimiento ( $d\mathbf{r}$ ), por lo que la integral (2.8) no se puede anular nunca. Se produce necesariamente una disipación de energía, no pudiendo recobrase el nivel energético inicial después de un trayecto cerrado.

Un teorema básico del cálculo vectorial establece que la condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial  $\mathbf{F}$  tenga circulación nula para cualquier curva cerrada es que sea un campo de gradientes. Recordemos en

primer lugar la definición de gradiente de un campo escalar; en un sistema de coordenadas cartesianas ortonormal con versores  $\{\mathbf{e}_i\} \equiv \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  la expresión es<sup>6</sup>

$$\mathbf{grad} V \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}$$

La afirmación anterior quiere decir que existirá un campo escalar  $V(\mathbf{r})$ , función de la posición, tal que:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad} V.$$

Al campo escalar  $V$  se le denomina potencial de las fuerzas, energía potencial, o simplemente *potencial*.

Una tercera forma de caracterizar un campo  $\mathbf{F}$  como conservativo, admitiendo las exigencias adicionales de que  $\mathbf{F}$  tenga derivada continua y que el dominio sea simplemente conexo, es que sea irrotacional. Esta condición es equivalente a su vez a las dos anteriores. Recordemos la definición de rotacional de un campo vectorial<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k \\ &= \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Por lo que la condición para que el campo  $\mathbf{F}$  sea conservativo es

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

En este caso, la función potencial  $V(\mathbf{r})$  de la que proviene  $\mathbf{F}$  debe ser al menos  $C^2$ .

Al expresarse  $\mathbf{F}$  como un gradiente, el trabajo elemental resulta ser una diferencial exacta:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{grad} V \cdot d\mathbf{r} = -dV$$

<sup>6</sup>En cuanto a notación, emplearemos indistintamente los índices o los «nombres propios» de vectores ( $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ ) y coordenadas ( $x \equiv x_1$ ,  $y \equiv x_2$ ,  $z \equiv x_3$ ). Asimismo, a veces emplearemos también notaciones alternativas para el gradiente,  $\mathbf{grad} V = dV/d\mathbf{r} = \nabla V$ , empleando el operador  $\nabla = \sum_{i=1}^3 \partial/\partial x_i \mathbf{e}_i = \partial/\partial x \mathbf{i} + \partial/\partial y \mathbf{j} + \partial/\partial z \mathbf{k}$ .

<sup>7</sup>Empleando el operador  $\nabla$ , el rotacional se puede expresar también mediante la notación  $\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F}$ .



Si integramos para obtener el trabajo realizado entre dos puntos 1 y 2, y empleando el principio de la energía cinética (2.7):

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V_1 - V_2 \\ &= T_2 - T_1, \end{aligned}$$

es decir, se conserva la suma de la energía cinética más la potencial:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2.$$

o bien, definiendo como *energía total*<sup>8</sup> a la suma de energía cinética y potencial,

$$E \stackrel{\text{def}}{=} T + V,$$

se obtiene la siguiente expresión para el teorema de conservación de la energía:

$$\boxed{\text{si } \mathbf{F} = -\mathbf{grad} V \text{ (conservativa), } E = T + V = \text{cte.}} \quad (2.10)$$

En lo anterior se ha supuesto que el potencial  $V(\mathbf{r})$  es constante. Pudiera darse el caso de que  $\mathbf{F}$  provenga de una función potencial no constante, es decir que dependa explícitamente del tiempo,  $V(\mathbf{r}, t)$ :

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}, \quad \text{con} \quad \frac{\partial V}{\partial t} \neq 0.$$

En este caso, no se conservaría la energía total  $E$ , puesto que el trabajo elemental ya no sería una diferencial exacta del potencial:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial V}{\partial t} dt, \\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \neq -dV. \end{aligned}$$

Estaríamos, pues, ante un campo de fuerzas no conservativas a pesar de que provengan de un potencial.

**Integración de la ecuación fundamental de la dinámica.**— Parte de lo expuesto arriba se puede interpretar como distintos procedimientos de integración de la ecuación fundamental de la dinámica (2.2). Señalemos tres procedimientos generales para ello, que permiten obtener los teoremas de conservación (2.3), (2.5) y (2.10) como casos particulares.

<sup>8</sup>Se sobreentiende que ésta es únicamente la energía mecánica, excluyendo a otros tipos de energía como la calorífica, química, ...

**a) Integración directa en el tiempo.**— Integrando entre dos instantes  $t_1$  y  $t_2$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{r}} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}|_1^2$$

se obtiene la ecuación del balance de la cantidad de movimiento,

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{p}|_1^2.}$$

Como caso particular de esta ecuación de balance se desprende el teorema de conservación de la cantidad de movimiento (2.3)

**b) Integración directa según la trayectoria.**— Realizando ahora la integral curvilínea entre dos puntos de la trayectoria  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ ,

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 m\ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2\Big|_1^2$$

de donde se obtiene la ecuación del balance de la energía,

$$\boxed{\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv^2\Big|_1^2.}$$

Análogamente, para el caso de fuerzas conservativas ( $\mathbf{F} = -\text{grad}V$ ), se desprende el teorema de conservación (2.10).

**c) Integración del momento en el tiempo.**— Integrando el momento de  $\mathbf{F}$  entre dos instantes  $t_1$  y  $t_2$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \wedge m\ddot{\mathbf{r}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \underbrace{(\mathbf{r} \wedge m\dot{\mathbf{r}})}_{\mathbf{H}_O} dt = \mathbf{H}_O|_1^2$$

se obtiene la ecuación del balance del momento cinético,

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} dt = \mathbf{H}_O|_1^2.}$$

Si las fuerzas son centrales o se trata de una partícula aislada, análogamente a los dos casos anteriores se desprende el teorema de conservación (2.5).

## 2.2. Expresiones de velocidad y aceleración

Antes de proseguir en la aplicación de los principios y teoremas generales expuestos para ejemplos concretos de dinámica de la partícula, conviene detenerse en el desarrollo de las expresiones de la velocidad y aceleración que habrán de emplearse.

Según las características geométricas de cada problema, será conveniente en cada caso escoger uno u otro sistema de coordenadas. La elección obvia en el caso más general será un sistema de coordenadas cartesianas ortonormal; sin embargo en ocasiones es ventajoso emplear otras coordenadas, como las coordenadas cilíndricas (o polares en el caso plano), esféricas, o el triedro intrínseco a la trayectoria.

En cada uno de estos casos, el aspecto que nos ocupa es obtener las componentes de los vectores velocidad,  $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$  y aceleración,  $\ddot{\mathbf{r}} = d^2\mathbf{r}/dt^2$ .

### 2.2.1. Coordenadas cartesianas.

El triedro  $Oxyz$  está asociado a los versores  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  según cada dirección coordenada (figura 2.7). Puesto que los versores del triedro son constantes, para obtener la velocidad y aceleración basta derivar directamente las coordenadas:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

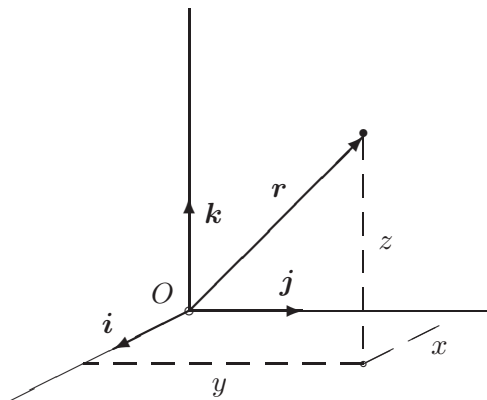


Figura 2.7: *Coordenadas cartesianas*

### 2.2.2. Coordenadas cilíndricas y polares.

En este caso, las coordenadas que definen la posición son  $(\rho, \theta, z)$ , siendo  $\rho$  la distancia desde un punto fijo  $O$ ,  $\theta$  el ángulo que forma la proyección del radio vector sobre un plano fijo con una dirección dada del mismo, y  $z$  la altura del punto sobre dicho plano (figura 2.8).

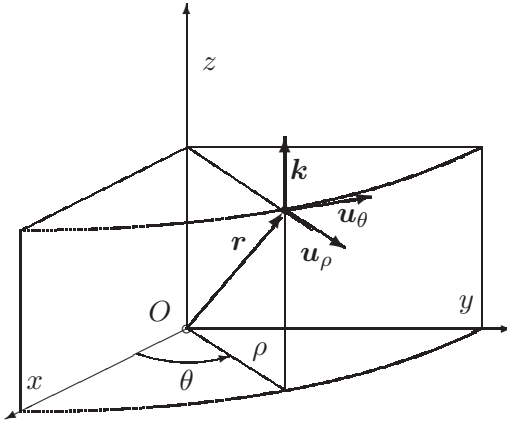


Figura 2.8: *Coordenadas cilíndricas*

El triedro de vectores unitarios asociado (o base física) es  $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k})$ . El versor  $\mathbf{u}_\rho$  queda definido como un vector unitario en la dirección de la proyección de  $\mathbf{r}$  sobre el plano;  $\mathbf{k}$  es el versor perpendicular al mismo, y  $\mathbf{u}_\theta$  es perpendicular a los dos anteriores. En este triedro tanto  $\mathbf{u}_\rho$  como  $\mathbf{u}_\theta$  varían de punto a punto, constituyendo un sistema de coordenadas *curvilíneas*.

La posición de un punto queda definida mediante

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{u}_\rho + z \mathbf{k} \quad (2.11)$$

expresión que engloba también a las coordenadas polares para el movimiento plano, sin más que hacer  $z = 0$ .

Es inmediato establecer las relaciones con las coordenadas cartesianas, tomando el plano de referencia  $Oxy$  de forma que se comparte la coordenada  $z$ :

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

Mientras que entre los versores de ambos triedros la relación es

$$\mathbf{u}_\rho = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

Derivando estas expresiones respecto del tiempo se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_\rho &= -\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{j} \\ &= \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \\ \dot{\mathbf{u}}_\theta &= -\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{i} - \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} \\ &= -\dot{\theta} \mathbf{u}_\rho \\ \dot{\mathbf{k}} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Empleando estas igualdades y derivando el vector posición (2.11) se obtiene la velocidad,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + \dot{z} \mathbf{k};$$

repitiendo la operación, se obtiene la aceleración:

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \mathbf{u}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta + \ddot{z} \mathbf{k}.$$

### 2.2.3. Coordenadas esféricas.

La posición de un punto queda ahora referida a las dos coordenadas angulares en una esfera de radio  $r$ : la longitud  $\varphi$  y la latitud  $\theta$  (figura 2.9).

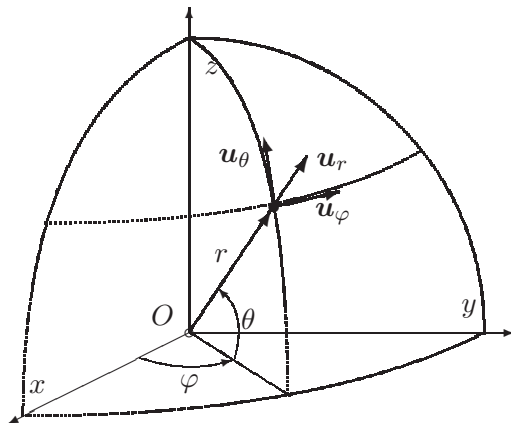


Figura 2.9: *Coordenadas esféricas*

El triedro físico es ahora  $(\mathbf{u}_\varphi, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_r)$ . La línea coordenada de longitud  $\varphi$  constante define el meridiano, al cual es tangente el vector  $\mathbf{u}_\theta$ . Asimismo la línea de latitud  $\theta$  constante define un paralelo, al cual es tangente el vector  $\mathbf{u}_\varphi$ . Por último, el vector  $\mathbf{u}_r$  lleva la dirección y sentido del radio vector  $\mathbf{r}$ .

Proyectando sobre las direcciones del triedro cartesiano se obtienen las relaciones con los versores del mismo:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_r &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \sin \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{u}_\theta &= -\sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} - \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{u}_\varphi &= \mathbf{u}_\theta \wedge \mathbf{u}_r = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}\end{aligned}$$

En este caso los tres versores son variables, función del punto. Para obtener sus derivadas temporales, expresaremos primero sus derivadas parciales respecto de las coordenadas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r} &= \mathbf{0}; & \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \theta} &= \mathbf{u}_\theta; & \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \varphi} &= \cos \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial r} &= \mathbf{0}; & \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial \theta} &= -\mathbf{u}_r; & \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial \varphi} &= -\sin \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial r} &= \mathbf{0}; & \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial \theta} &= \mathbf{0}; & \frac{\partial \mathbf{u}_\varphi}{\partial \varphi} &= \sin \theta \mathbf{u}_\theta - \cos \theta \mathbf{u}_r\end{aligned}$$

Empleando estas relaciones, se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_r &= \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\ &= \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \dot{\mathbf{u}}_\theta &= -\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{u}_\varphi - \dot{\theta} \mathbf{u}_r \\ \dot{\mathbf{u}}_\varphi &= \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{u}_\theta - \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{u}_r\end{aligned}$$

Por último, utilizamos estas expresiones en las derivadas temporales de  $\mathbf{r}$ , para obtener:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{u}_\varphi \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta - r \dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + r \ddot{\theta}) \mathbf{u}_\theta \\ &\quad + (2\dot{r} \dot{\varphi} \cos \theta - 2r \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta + r \ddot{\varphi} \cos \theta) \mathbf{u}_\varphi\end{aligned}$$

#### 2.2.4. Triedro intrínseco

La propia curva definida por la trayectoria dinámica,  $\mathbf{r}(t)$ , permite definir un triedro denominado «intrínseco», que a menudo resulta de gran utilidad para describir el movimiento. Se resumen aquí algunas definiciones y propiedades fundamentales de dicho triedro. Para un mayor detalle puede consultarse algún texto de geometría diferencial<sup>9</sup>.

<sup>9</sup>D.J. Struik: *Geometría Diferencial Clásica*, Aguilar 1973; J.A. Fernández Palacios: *Mecánica Teórica de los Sistemas de Sólidos Rígidos*, (Anejo 1A), 1989.

**Vectores y planos del triedro.**— Los versores que constituyen el triedro intrínseco están definidos por la trayectoria misma. Ésta puede considerarse parametrizada bien por el tiempo ( $\mathbf{r}(t)$ , con derivada  $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$ ), bien por la longitud del arco de curva  $s$ , sabiendo que  $ds = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}$ . El sentido positivo del arco coincide con el avance real sobre la curva a lo largo del tiempo.

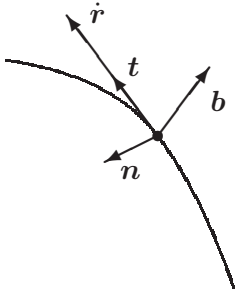


Figura 2.10: *Vectores del triedro intrínseco*

- *tangente*  $\mathbf{t} \stackrel{\text{def}}{=} d\mathbf{r}/ds$ , vector unitario con igual dirección y sentido que la velocidad  $\dot{\mathbf{r}}$ .
- *normal principal*  $\mathbf{n}$ , vector unitario normal a la curva ( $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0$ ), y perteneciente al plano osculador (plano definido por dos tangentes sucesivas a la curva,  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{t} + d\mathbf{t}$ ). Su dirección y sentido lo tomaremos por tanto según  $d\mathbf{t}$ , es decir, hacia el lado cóncavo de la misma.
- *binormal*  $\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ , perpendicular por tanto a la curva ( $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = 0$ ), y también a la normal principal ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0$ ).

Los versores  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{b}$  definen el plano normal, cualquier recta contenida en este plano es normal a la curva. Por otra parte, el plano osculador queda definido por  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ , siendo la binormal perpendicular al mismo.

**Fórmulas de Frenet.**— Al ser un versor de módulo unidad, la derivada del vector tangente es normal al mismo:

$$\frac{d}{ds} (\underbrace{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}}_{=1}) = 2\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0. \quad (2.12)$$

Por la definición hecha de  $\mathbf{n}$ , la derivada  $d\mathbf{t}/ds$  lleva la dirección de  $\mathbf{n}$ , y el módulo se denomina *curvatura*:

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|.$$

Se puede interpretar de forma intuitiva razonando que cuanto más se «doble» la curva (por unidad de arco), mayor es su curvatura  $\kappa$ . Dada la definición realizada de  $\mathbf{n}$ , por la que su sentido es siempre hacia el lado cóncavo, dicha curvatura resulta siempre positiva. Asimismo, se define el radio de curvatura como su inversa:  $R \stackrel{\text{def}}{=} 1/\kappa$ . Así,

$$\boxed{\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n} = \frac{1}{R} \mathbf{n}} \quad (1.ª \text{ fórmula de Frenet}). \quad (2.13)$$

Veamos ahora la variación de la binormal  $\mathbf{b}$ . Si la curva es plana, el plano osculador es fijo y  $d\mathbf{b}/ds = 0$ . En un caso general, esta derivada constituye una medida del alabeo de la curva que denominaremos *torsión*. En cuanto a la dirección de esta derivada, razonamos en primer lugar, por los mismos argumentos esgrimidos en (2.12), que es normal al propio  $\mathbf{b}$ . Por otra parte,

$$\frac{d}{ds} (\underbrace{\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}}_{=0}) = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \underbrace{\mathbf{b} \cdot (\kappa \mathbf{n})}_{=0} = 0.$$

Deducimos pues que  $d\mathbf{b}/ds = 0$  es normal a  $\mathbf{b}$  y a  $\mathbf{t}$ , es decir, lleva la dirección de  $\mathbf{n}$ , mientras que su módulo lo llamaremos torsión  $\tau$ . Estableciendo de forma convencional el signo negativo en esta relación, puede escribirse

$$\boxed{\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n} = -\frac{1}{T} \mathbf{n}} \quad (2.ª \text{ fórmula de Frenet}). \quad (2.14)$$

(El radio de torsión resulta, análogamente al de curvatura,  $T \stackrel{\text{def}}{=} 1/\tau$ .)

Por último, derivando la normal principal,

$$\frac{d}{ds} \mathbf{n} = \frac{d}{ds} (\mathbf{b} \wedge \mathbf{t}) = (-\tau \mathbf{n}) \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge (\kappa \mathbf{n}),$$

es decir:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}} \quad (3.ª \text{ fórmula de Frenet}). \quad (2.15)$$

**Expresiones de la velocidad y aceleración.**— Empleando las fórmulas de Frenet es inmediato deducir las siguientes expresiones para velocidad y aceleración:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{ds}{dt} \mathbf{t} = v \mathbf{t},$$



relación que expresa simplemente que la velocidad es tangente a la trayectoria. Derivando de nuevo,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{v} \mathbf{t} + v \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{v} \mathbf{t} + \frac{v^2}{R} \mathbf{n}$$

Se identifican en esta expresión claramente dos términos de la aceleración:

$$\begin{cases} \dot{v} \mathbf{t} & \text{aceleración tangencial} \\ \frac{v^2}{R} \mathbf{n} & \text{aceleración normal (centrípeta)} \end{cases}$$

## 2.3. Movimiento de una partícula libre

El principio de la cantidad de movimiento o 2.<sup>a</sup> ley de Newton (2.2) proporciona una ecuación vectorial, que equivale a 3 ecuaciones escalares. Llamando  $(X, Y, Z)$  a las componentes cartesianas de la fuerza  $\mathbf{F}$ ,

$$\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{r}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X = m\ddot{x} \\ Y = m\ddot{y} \\ Z = m\ddot{z} \end{cases}$$

Integrando estas 3 ecuaciones, será posible obtener las 3 incógnitas  $(x, y, z)$  que definen la posición de la partícula en cada instante. Las dificultades que puedan surgir para esta integración resultarán de las expresiones de  $(X, Y, Z)$  que por lo general no tienen porqué ser constantes.

Consideraremos como aplicación dos casos particulares relacionados con el movimiento de proyectiles.

### 2.3.1. Proyectil pesado en el vacío.

Admitimos en este caso que no existen resistencias del medio, por lo que la única fuerza actuante sobre la partícula es la gravedad terrestre, que suponemos definida por el campo gravitatorio simplificado  $(-mg\mathbf{k})$ . Las ecuaciones son:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = 0; \quad m\ddot{z} = -mg.$$

Si tomamos unos ejes en los que el plano vertical  $Oxz$  contenga a la velocidad inicial  $\mathbf{v}_0$ , es fácil comprobar que el movimiento se desarrollará dentro del mismo plano vertical:

$$\dot{y} = \ddot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

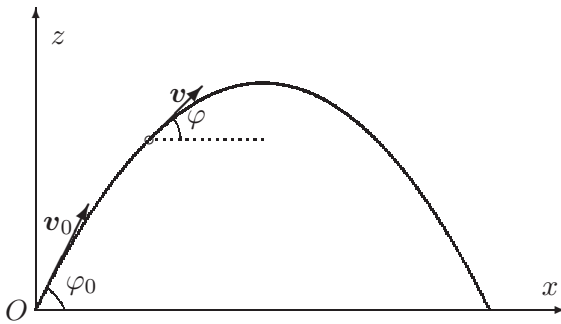


Figura 2.11: *trayectoria parabólica de un proyectil pesado en el vacío*

Denominando  $\varphi_0$  el ángulo de la velocidad en el lanzamiento con la horizontal (figura 2.11) las ecuaciones en  $x$  y  $z$  se integran de manera trivial:

$$\dot{x} = v_0 \cos \varphi_0, \quad \dot{z} = -gt + v_0 \operatorname{sen} \varphi_0; \quad (2.16)$$

$$x = v_0 \cos \varphi_0 t, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \operatorname{sen} \varphi_0 t. \quad (2.17)$$

Las expresiones (2.17) son las llamadas *ecuaciones horarias* de la trayectoria, es decir, las ecuaciones que permiten obtener la posición en función del tiempo.

La *trayectoria* descrita por la partícula queda definida por las ecuaciones horarias de forma paramétrica, mediante el parámetro  $t$ . Se puede obtener la ecuación implícita de la trayectoria eliminando el parámetro  $t$  de las ecuaciones horarias: despejando  $t$  en (2.17<sub>1</sub>) y sustituyendo en la expresión (2.17<sub>2</sub>) de  $z$ :

$$z = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{(v_0 \cos \varphi_0)^2} + x \operatorname{tg} \varphi_0, \quad (2.18)$$

ecuación que representa una parábola de eje vertical (*movimiento parabólico*).

El alcance horizontal se obtiene haciendo  $z = 0$  en (2.18),

$$L = \operatorname{sen}(2\varphi_0) \frac{v_0^2}{g},$$

de donde se deduce inmediatamente que el alcance máximo se produce para  $\varphi_0 = \pi/4$ , valiendo  $L_{max} = v_0^2/g$ . Por otra parte, para distancias inferiores, existen dos soluciones posibles de tiro para obtener un mismo alcance: tiro directo y por elevación:

$$1 > \frac{L}{L_{max}} = \operatorname{sen} 2\varphi_0 \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ soluciones } \begin{cases} \varphi_1 < \pi/4 & (\text{tiro directo}), \\ \varphi_2 > \pi/4 & (\text{tiro por elevación}). \end{cases}$$

El tiro por elevación es el característico de los morteros, mientras que el tiro directo es el normal de los proyectiles denominados balísticos.

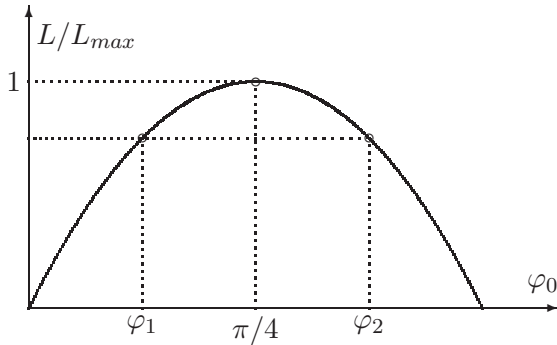


Figura 2.12: Alcance del tiro parabólico en función del ángulo inicial  $\varphi_0$ :  $L = \frac{v_0^2}{2g} \text{sen } 2\varphi_0$ . Para distancias inferiores al alcance máximo ( $L_{max} = v_0^2/g$ , para  $\varphi_0 = \pi/4$ ), existen dos posibilidades, el tiro directo ( $\varphi_0 = \varphi_1$ ), y por elevación ( $\varphi_0 = \varphi_2$ ).

La envolvente de las posibles parábolas de tiro para  $v_0$  dada, es decir para una energía dada, es otra parábola, denominada parábola de seguridad. Para determinarla, expresamos la condición de que la trayectoria (2.18) pase

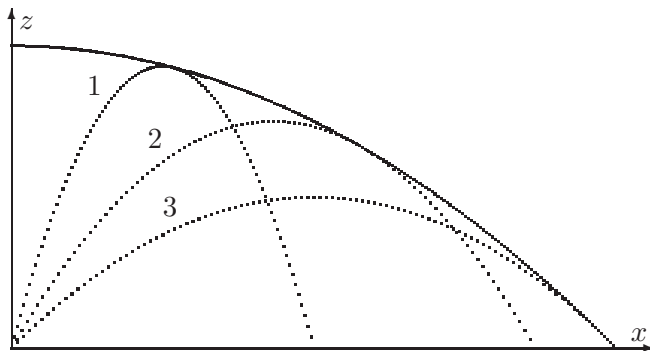


Figura 2.13: Parábola de seguridad, envolvente de las diversas trayectorias (1, 2, 3) para una energía de lanzamiento dada

por un punto  $(a, b)$  dado:

$$b = -\frac{1}{2}g \frac{a^2}{(v_0 \cos \varphi_0)^2} + a \text{tg } \varphi_0;$$

haciendo  $\text{tg } \varphi_0 = u$ , obtenemos la ecuación:

$$u^2 - \frac{2v_0^2}{ag}u + 1 + \frac{2bv_0^2}{a^2g} = 0;$$

para que tenga solución real en  $u$ , ha de ser  $b < v_0^2/2g - ga^2/2v_0^2$ . Por tanto, la ecuación de la parábola de seguridad es

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

La altura máxima en una trayectoria se obtiene haciendo  $\dot{z} = 0$  en (2.16):

$$0 = -gt + v_0 \operatorname{sen} \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \varphi_0}{g},$$

y entrando con este valor de  $t$  en (2.17),

$$z_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0}{g}.$$

Es obvio que la máxima altura de todas las trayectorias posibles se obtiene para  $\varphi_0 = \pi/2$ , es decir para tiro vertical:

$$z_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}.$$

Mediante *consideraciones energéticas* se podrían haber obtenido algunos de estos mismos resultados de forma muy sencilla. Por ejemplo, la altura máxima para un tiro vertical resulta de igualar la energía total en el punto de altura máxima con la inicial:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = 0 + m g z_{max} \quad \Rightarrow \quad z_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}.$$

Asimismo, para una trayectoria inclinada, podemos obtener la velocidad en el punto de máxima altura igualando la energía con la del instante inicial:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m v^2 + m g \left( \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0}{g} \right)$$

De donde  $v = v_0 \cos \varphi_0$ , deducción que podríamos haber realizado también al considerar que, al ser  $\dot{z} = 0$  en ese instante, la velocidad no tiene componente vertical, reduciéndose a la velocidad horizontal que es constante.

### 2.3.2. proyectil pesado en medio resistente

Complicamos ahora el problema anterior al considerar una resistencia del medio, cuya dirección es la de la velocidad y cuya magnitud depende del módulo de la misma de forma monótonamente creciente (es decir, a mayor velocidad, mayor resistencia):

$$\mathbf{R} = -R(v) \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

La función de resistencia  $R(v)$  tiene por lo general una caracterización compleja, habiendo de determinarse mediante ensayos aerodinámicos en túneles de viento o simulaciones en el ordenador. Como simplificación se suele

aceptar la aproximación como una función proporcional al cuadrado de la velocidad,  $R(v) = \alpha v^2$ , o para velocidades muy bajas, proporcional a la velocidad,  $R(v) = \alpha v$ .

En un caso general, llamando  $(R_x, R_y, R_z)$  a las componentes cartesianas de  $\mathbf{R}$ , las ecuaciones son:

$$m\ddot{x} = R_x; \quad m\ddot{y} = R_y; \quad m\ddot{z} = R_z - mg. \quad (2.19)$$

En primer lugar, demostraremos que la trayectoria es plana, manteniéndose dentro de un plano vertical. En efecto, puesto que  $\mathbf{R} \parallel \mathbf{v}$ ,

$$R_x = -\frac{R}{v}\dot{x}; \quad R_y = -\frac{R}{v}\dot{y}; \quad R_z = -\frac{R}{v}\dot{z}$$

Eliminando  $R_x$  y  $R_y$  con las ecuaciones (2.19) resulta

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}}{\dot{y}} = -\frac{R}{mv}.$$

Integrando cada miembro de esta ecuación en variables separadas se obtiene

$$\log \dot{y} = \log C\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = C\dot{x} \quad \Rightarrow \quad y = Cx + D,$$

ecuación que define un plano vertical.

A continuación expondremos un método de solución general, para una resistencia  $R(v)$  cualquiera. Para ello, expresemos las ecuaciones en las direcciones tangencial y normal a la trayectoria:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \operatorname{sen} \varphi - R(v) \quad (2.20)$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \varphi \quad (2.21)$$

donde  $\rho$  es el radio de curvatura de la misma. La relación de éste con los incrementos infinitesimales de arco ( $ds$ ) y ángulo girado ( $d\varphi$ ) es

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\varphi}{ds},$$

donde se toma convencionalmente el signo negativo, lo que equivale a establecer que  $\varphi$  decrece al crecer  $s$ , siendo  $\rho$  siempre positivo.

Queremos obtener la ecuación que relaciona el módulo de la velocidad con el ángulo de la trayectoria,  $v(\varphi)$ , llamada «hodógrafa». Para ello, eliminamos  $\rho$  de la ecuación (2.21), quedando:

$$-mv^2 \frac{d\varphi}{ds} = mg \cos \varphi \quad (2.22)$$

Dividiendo (2.20) y (2.22) término a término, y considerando que

$$\frac{dv}{dt} \frac{ds}{d\varphi} = v \frac{dv}{d\varphi}$$

se obtiene:

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\varphi} = \frac{mg \operatorname{sen} \varphi + R(v)}{mg \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi + \frac{R(v)}{mg \cos \varphi} \quad (2.23)$$

Se trata de una ecuación diferencial de primer orden que, integrada, proporcionaría la solución  $v(\varphi)$  buscada. Esta integración puede no ser inmediata, al menos por métodos analíticos, habiendo de recurrir entonces a procedimientos numéricos. Una vez calculada esta solución de la hodógrafa  $v(\varphi)$ , la ecuación de la trayectoria en función de  $t$  se hallaría mediante una simple cuadratura. En efecto, de (2.22):

$$-mv^2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{ds} = mg \cos \varphi$$

por lo que

$$dt = -\frac{v(\varphi)d\varphi}{g \cos \varphi} \Rightarrow t = -\frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v(\varphi)}{\cos \varphi} d\varphi \quad (2.24)$$

obteniéndose así  $t(\varphi)$ , e invirtiendo ésta,  $\varphi(t)$ . Las ecuaciones paramétricas de  $x(t)$ ,  $z(t)$ , se obtendrían mediante nuevas cuadraturas:

$$dx = v \cos \varphi dt = -\frac{v^2}{g} d\varphi \Rightarrow x = -\frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} v^2(\varphi) d\varphi \quad (2.25)$$

$$dz = v \operatorname{sen} \varphi dt = -\frac{v^2}{g} \operatorname{tg} \varphi d\varphi \Rightarrow z = -\frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} v^2(\varphi) \operatorname{tg} \varphi d\varphi \quad (2.26)$$

Aún sin solucionar explícitamente las ecuaciones anteriores, se puede extraer de ellas algunas conclusiones cualitativas. De (2.20) se deduce que *la velocidad permanece acotada*. En efecto, si no fuera así, la resistencia  $R(v)$  que es una función monótona tampoco estaría acotada, llegándose a una aceleración negativa infinita:

$$v \rightarrow \infty \Rightarrow R(v) \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{dv}{dt} \rightarrow -\infty$$

Por otra parte, de (2.24), si  $v$  está acotado, para  $t \rightarrow \infty$  será  $\varphi \rightarrow -\pi/2$ , por lo que la trayectoria tiene una *asíntota vertical*.

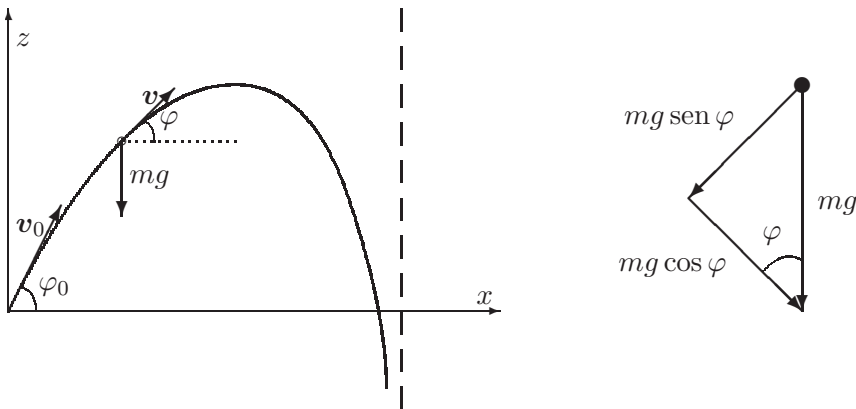


Figura 2.14: *Trayectoria de un proyectil en medio resistente. Descomposición del peso en dirección normal y tangencial.*

Existe una solución analítica debida a Legendre<sup>10</sup>, reduciendo el problema a cuadraturas sucesivas, si la función resistente toma la forma:

$$R(v) = mg(b + cv^n)$$

Como aplicación, consideremos el caso particular de resistencia del medio proporcional a la velocidad, ( $b = 0, n = 1$ ), es decir:  $R(v) = mgcv$ . En este caso la ecuación (2.23) resulta:

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\varphi} = \operatorname{tg} \varphi + \frac{cv}{\cos \varphi}$$

La integración de esta ecuación arroja:

$$v = \frac{v_0 \cos \varphi_0}{\cos \varphi - cv_0 \operatorname{sen}(\varphi \pm \varphi_0)}.$$

Aunque no demostraremos la deducción de esta expresión, es fácil comprobar que cumple la ecuación diferencial (2.23).

Para este caso de resistencia viscosa otra forma de resolver el problema es integrando directamente las ecuaciones en componentes cartesianas, procedimiento que queda descrito en el siguiente

**EJEMPLO 2.1:** Una partícula se mueve en un medio viscoso, con resistencia proporcional a la velocidad,  $R(v) = mgcv$ . Obtener la trayectoria.

<sup>10</sup>ver p.ej. P. Appel y S. Dautheville, *Précis de Mécanique Rationnelle*, Gauthier-Villars, 1952

*Solución.* Particularizamos las ecuaciones diferenciales (2.19) que resultan

$$\ddot{x} = -gc\dot{x}, \quad (2.27)$$

$$\ddot{z} = -gc\dot{z} - g. \quad (2.28)$$

La ecuación (2.27) es de variables separadas, por lo que se integra directamente:

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = -gc \Rightarrow \ln \frac{\dot{x}}{v_{0x}} = -gct;$$

e integrando de nuevo y teniendo en cuenta que  $x(0) = 0$ ,

$$\dot{x} = v_{0x}e^{-gct} \Rightarrow \boxed{x = \frac{v_{0x}}{gc}(1 - e^{-gct})}.$$

Por su parte, en la ecuación (2.28) se pueden separar variables de forma similar e integrar una primera vez:

$$\frac{\ddot{z}}{\dot{z} + 1/c} = -gc \Rightarrow \ln \frac{\dot{z} + 1/c}{v_{0z} + 1/c} = -gct;$$

e integrando de nuevo, con la condición inicial  $z(0) = 0$ ,

$$\dot{z} = -\frac{1}{c} + \left(v_{0z} + \frac{1}{c}\right)e^{-gct} \Rightarrow \boxed{z = -\frac{t}{c} + \left(\frac{v_{0z}}{gc} + \frac{1}{gc^2}\right)(1 - e^{-gct})}. \quad \square$$

## 2.4. Movimiento de una partícula sobre una curva

Sea una curva  $\Gamma$  definida como la intersección de dos superficies  $f$  y  $g$ :

$$f(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.29)$$

$$g(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.30)$$

Una normal a la curva viene dada, en función de 2 parámetros  $\lambda$  y  $\mu$  arbitrarios, por:

$$\mathbf{N} = \lambda \mathbf{grad} f + \mu \mathbf{grad} g.$$

Decimos que la curva es lisa si la fuerza de reacción que se produce sobre la partícula es normal a la misma. Además de esta reacción, pueden existir unas fuerzas aplicadas o activas  $\mathbf{f}$ , por lo que la ecuación dinámica es:

$$\mathbf{f} + \underbrace{\lambda \mathbf{grad} f + \mu \mathbf{grad} g}_{\mathbf{N}, \text{ reacción normal}} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (2.31)$$



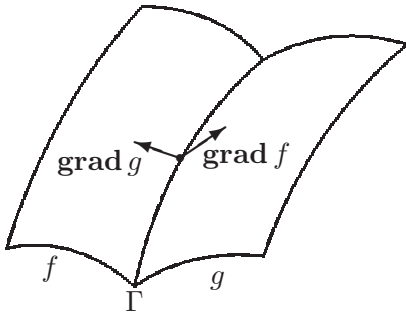


Figura 2.15: Partícula sobre una curva  $\Gamma$ , definida como intersección de dos superficies, con normales  $\mathbf{grad} f$  y  $\mathbf{grad} g$ .

El problema queda planteado con cinco ecuaciones ((2.29), (2.30), y tres ecuaciones escalares de (2.31)) para cinco incógnitas ( $x, y, z, \lambda, \mu$ ).

Multiplicando (2.31) por  $d\mathbf{r}$ , y suponiendo que se trata de una curva fija (es decir,  $\partial f/\partial t = 0$ ,  $\partial g/\partial t = 0$ ):

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = m\ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \quad (2.32)$$

(puesto que  $\mathbf{grad} f \cdot d\mathbf{r} = df = 0$ , e igual para  $g$ ).

El trabajo elemental de las fuerzas aplicadas  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$  lo podemos poner en función de un parámetro que define la posición en la curva (por ejemplo, el arco recorrido), que llamaremos  $q$ :

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = f_x dx + f_y dy + f_z dz = f_x \frac{dx}{dq} dq + f_y \frac{dy}{dq} dq + f_z \frac{dz}{dq} dq = Q dq$$

definiéndose la «fuerza generalizada» como el producto escalar de la fuerza (física) aplicada por la derivada de la curva respecto del parámetro,  $Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}/dq = f_x dx/dq + f_y dy/dq + f_z dz/dq$ . Así,

$$Q dq = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{q_0}^q Q(q) dq,$$

con lo que el problema queda reducido a una cuadratura. Si fuera  $\partial f/\partial t \neq 0$  ó  $\partial g/\partial t \neq 0$  (caso de una curva móvil), obtendríamos:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} - \lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt - \mu \frac{\partial g}{\partial t} dt. \quad (2.33)$$

El término adicional respecto a (2.32) corresponde al trabajo realizado por la fuerza de reacción,  $(\lambda \mathbf{grad} f + \mu \mathbf{grad} g) \cdot d\mathbf{r} = (-\lambda \partial f/\partial t - \mu \partial g/\partial t) dt$ , debido a que el desplazamiento real ( $d\mathbf{r}$ ) no sigue la tangente a la curva en un instante  $t$ , por ser ésta móvil.

Si  $\mathbf{f}$  proviene de un potencial,  $\mathbf{f} = -dV/dr$ , entonces  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$  es un diferencial exacto:

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = Q dq = -dV,$$

pudiéndose integrar (2.32) para obtener

$$\frac{mv^2}{2} + V(\mathbf{r}) = h,$$

siendo  $h$  una constante de integración (energía mecánica total constante).

Una vez obtenida  $v$ , se introduciría en las ecuaciones de equilibrio, formuladas en el triedro intrínseco, para calcular la reacción normal  $\mathbf{N}$ :

$$f_t = m \frac{dv}{dt}; \quad f_n + N_n = m \frac{v^2}{\rho}; \quad f_b + N_b = 0$$

Señalemos por último que en un caso general  $\mathbf{N}$  es normal a la curva  $\Gamma$ , aunque no necesariamente coincide con la normal principal. Esto último sí se cumple si no hay fuerzas aplicadas ( $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ), pues al particularizar las ecuaciones anteriores se obtiene  $N_n = mv^2/\rho$  y  $N_b = 0$ .

**EJEMPLO 2.2:** Una partícula de masa  $m$  está ligada a una circunferencia lisa de radio  $R$  sobre la que puede deslizarse libremente. A su vez la circunferencia se mueve en un plano horizontal, girando con velocidad de rotación uniforme (impuesta)  $\omega$ , alrededor de un punto  $O$  de su perímetro. Se pide:

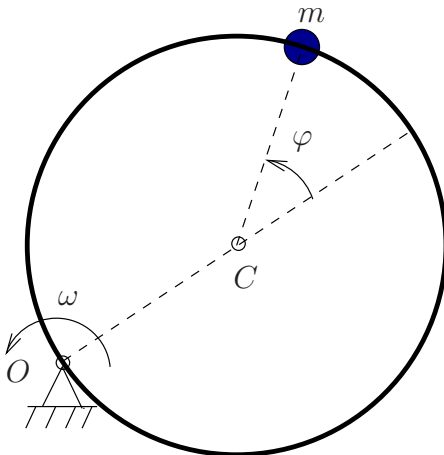


Figura 2.16: *Ejemplo 2.2* - partícula que se mueve sobre una circunferencia lisa, con un punto ( $O$ ) fijo de su perímetro y velocidad de rotación impuesta  $\omega$ .

- Empleando como parámetro el ángulo  $\varphi$  (figura 2.2), determinar la aceleración (absoluta) de la partícula en un instante genérico.
- Obtener la ecuación diferencial del movimiento.

- c. Obtener la expresión de la reacción de la circunferencia sobre la partícula.
- d. ¿Se conserva la energía total ( $T + V$ )? (responder razonadamente).
- e. Obtener una integral primera del sistema (constante del movimiento, igual a una expresión función de las derivadas primeras, en este caso  $\dot{\varphi}$ ). Tomar como condiciones iniciales  $\varphi_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi}_0 = \omega$ .

*Solución.*

a.— El procedimiento más directo es emplear coordenadas cartesianas para la posición de la partícula (figura 2.17):

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\omega t) + R \cos(\varphi + \omega t); \\ y &= R \operatorname{sen}(\omega t) + R \operatorname{sen}(\varphi + \omega t). \end{aligned} \tag{2.34}$$

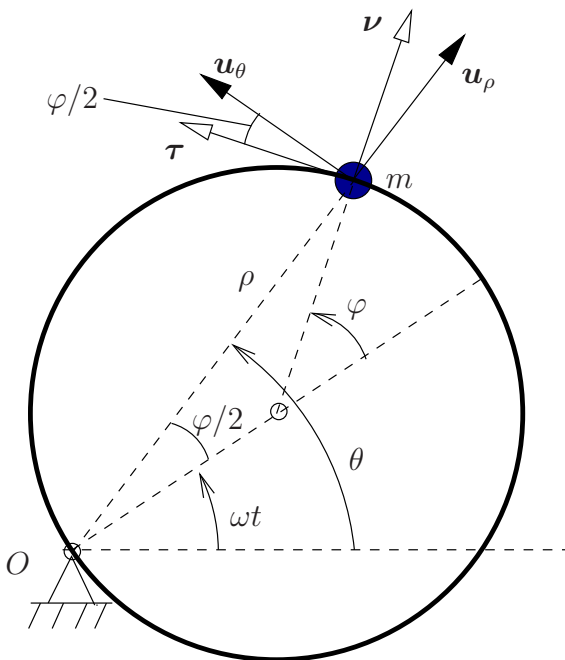


Figura 2.17: *Coordenadas y vectores básicos para el ejemplo 2.2; ( $\tau, \nu$ ) son los versores tangente y normal respectivamente a la circunferencia móvil, mientras que ( $\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\theta$ ) son los versores de las coordenadas polares. La velocidad de la partícula se puede interpretar como suma de una componente de arrastre  $\rho\omega$  debida al movimiento del aro, según  $\mathbf{u}_\theta$ , y otra componente  $R\dot{\varphi}$  relativa al aro, según  $\tau$ .*

A partir de aquí, derivando:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\omega \operatorname{sen}(\omega t) - R(\dot{\varphi} + \omega) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi); \\ \dot{y} &= R\omega \cos(\omega t) + R(\dot{\varphi} + \omega) \cos(\omega t + \varphi); \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -R\omega^2 \cos(\omega t) - R\ddot{\varphi} \sin(\omega t + \varphi) - R(\dot{\varphi} + \omega)^2 \cos(\omega t + \varphi); \\ \ddot{y} &= -R\omega^2 \sin(\omega t) + R\ddot{\varphi} \cos(\omega t + \varphi) - R(\dot{\varphi} + \omega)^2 \sin(\omega t + \varphi).\end{aligned}\quad (2.36)$$

Las direcciones en que interesa proyectar la aceleración son (lógicamente) la tangente y la normal a la circunferencia. Estas resultan:

$$\begin{aligned}a_\tau &= -\ddot{x} \sin(\varphi + \omega t) + \ddot{y} \cos(\varphi + \omega t) = R\omega^2 \sin \varphi + R\ddot{\varphi}; \\ a_\nu &= \ddot{x} \cos(\varphi + \omega t) + \ddot{y} \sin(\varphi + \omega t) = -R\omega^2 \cos \varphi - R(\dot{\varphi} + \omega)^2.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Otra manera<sup>11</sup> de calcular sería utilizando las coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  (figura 2.17):

$$\theta = \omega t + (\varphi/2); \quad \rho = 2R \cos(\varphi/2); \quad (2.38)$$

La aceleración es  $\mathbf{a} \equiv (a_\rho, a_\theta)$ :

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2; \quad a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta},$$

con lo que:

$$\begin{aligned}a_\rho &= -R\ddot{\varphi} \sin(\varphi/2) - R\dot{\varphi}^2/2 \cos(\varphi/2) - 2R \cos(\varphi/2)(\omega + \dot{\varphi}/2)^2, \\ a_\theta &= -2R\dot{\varphi} \sin(\varphi/2)(\omega + \dot{\varphi}/2) + R \cos(\varphi/2)\ddot{\varphi}/2.\end{aligned}\quad (2.39)$$

Finalmente, proyectando sobre tangente y normal al aro:

$$\begin{aligned}a_\tau &= -a_\rho \sin(\varphi/2) + a_\theta \cos(\varphi/2) = R\omega^2 \sin \varphi + R\ddot{\varphi}; \\ a_\nu &= a_\rho \cos(\varphi/2) + a_\theta \sin(\varphi/2) = -R\omega^2 \cos \varphi - R(\dot{\varphi} + \omega)^2.\end{aligned}\quad (2.40)$$

Se obtienen los mismos valores que antes (2.37), como era de esperar.

b.— La única fuerza sobre la partícula es la reacción de la circunferencia, que lleva la dirección de  $\nu$ . La componente de la aceleración según  $\tau$  será por tanto nula, lo que proporciona la ecuación del movimiento buscada. A partir de (2.37)<sub>1</sub>:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0 \quad (2.41)$$

Por similitud con la ecuación del péndulo simple ( $l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$ ), esta ecuación indica que se produce un movimiento pendular alrededor del punto diametralmente opuesto al punto  $O$ , con longitud de péndulo equivalente  $l_{\text{equiv}} = g/\omega^2$ .

<sup>11</sup>Un tercer procedimiento recomendable para este caso sería la descomposición del movimiento en el arrastre del aro y el de la partícula relativo al aro, originando la descomposición del campo de aceleraciones  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$ , como se verá en el apartado 4.2, ecuación (4.9).

c.— Sea la reacción  $\mathbf{N} = N\nu$ . Obtenemos el valor de  $N$  mediante la aceleración  $a_\nu$ , ecuación (2.37)<sub>2</sub>, expresando la ecuación dinámica según esta dirección:

$$N = ma_\nu = -mR [(\omega + \dot{\varphi})^2 + \omega^2 \cos \varphi]. \quad (2.42)$$

d.— *No se conserva la energía*, ya que se trata de una curva móvil, en la que la fuerza de reacción desarrolla un trabajo. Es necesario aplicar un momento al sistema para conseguir la rotación uniforme  $\omega$ , momento que no es una fuerza conservativa.

Aunque a primera vista pudiera parecer que la reacción de la circunferencia, al ser lisa la ligadura, no desarrolla trabajo alguno, esto no es así, ya que la reacción es normal a la circunferencia pero no a la trayectoria (absoluta) de la partícula.

e.— Ya que no resulta posible aplicar directamente un teorema de conservación, integraremos directamente la ecuación de la dinámica (2.41). Para ello, multiplicamos primero por  $\dot{\varphi}$ :

$$\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \omega^2\dot{\varphi} \sin \varphi = 0; \quad (2.43)$$

esta ecuación tiene integral inmediata:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \varphi = C \quad (2.44)$$

Aplicando las condiciones iniciales, resulta  $C = -\omega^2$ . La integral primera es por tanto:

$$\dot{\varphi}^2 + \omega^2(1 - 2 \cos \varphi) = 0 \quad (2.45)$$

Puede comprobarse que la expresión de la energía total del sistema es:

$$T + V = \frac{1}{2}mR^2 [\dot{\varphi}^2 + 2(1 + \cos \varphi)(\omega^2 + \omega\dot{\varphi})] \quad (2.46)$$

por lo que, comparándola con (2.45), se deduce que la energía total no puede ser constante, ya que ambas expresiones no coinciden.  $\square$

## 2.5. Movimiento de una partícula sobre una superficie

Sea una superficie lisa, definida en forma implícita por una ecuación escalar

$$f(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.47)$$

cuya normal viene dada por  $\mathbf{grad} f = \partial f / \partial \mathbf{r}$ . Si existen otras fuerzas aplica-

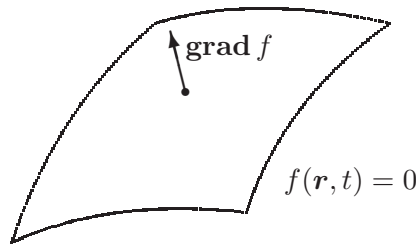


Figura 2.18: Partícula sobre una superficie lisa  $f$ , con normal  $\mathbf{grad} f$ .

das  $\mathbf{f}$  —además de la reacción normal  $\mathbf{N} = \lambda \mathbf{grad} f$ — la ecuación dinámica será:

$$\mathbf{f} + \lambda \mathbf{grad} f = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (2.48)$$

El problema queda planteado con las tres ecuaciones escalares (2.48) y la propia de la superficie (2.47), para las cuatro incógnitas  $(x, y, z, \lambda)$ .

Multiplicando escalarmente (2.48) por  $\mathbf{r}$ , y suponiendo que la superficie es fija ( $\partial f / \partial t = 0$ ),

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \quad (2.49)$$

Para definir la posición sobre la superficie son necesarios dos parámetros  $(u, v)$ , coordenadas de la superficie. Así:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \\ \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \\ &= Q_u du + Q_v dv \\ &= d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \end{aligned}$$

donde  $Q_u \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f} \cdot \partial \mathbf{r} / \partial u$ ,  $Q_v \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f} \cdot \partial \mathbf{r} / \partial v$ . Es necesario integrar esta ecuación diferencial para resolver el problema.

Si la superficie es móvil ( $\partial f / \partial t \neq 0$ ), en la ecuación anterior debe incluirse el trabajo de la reacción normal ( $\lambda \mathbf{grad} f \cdot d\mathbf{r} = -\lambda (\partial f / \partial t) dt \neq 0$ ), resultando la expresión

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = Q_u du + Q_v dv - \lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt = d \left( \frac{mv^2}{2} \right).$$

Si  $\mathbf{f}$  proviene de un potencial,  $\mathbf{f} = -dV/d\mathbf{r}$ , por lo que  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$  es diferencial exacto, y de la integración de (2.49) se obtiene

$$\frac{mv^2}{2} + V(\mathbf{r}) = h.$$

Una vez calculada la velocidad  $v$ , hallaríamos  $\lambda$  y  $\mathbf{N}$  (reacción normal), aplicando las ecuaciones en el triedro intrínseco, de manera similar al caso anterior. En este caso emplearemos el triedro intrínseco de la superficie, formado por (figura 2.19):

- $\mathbf{N}$ , según la dirección de la recta  $MC$  en la figura 2.19, normal a la superficie.
- $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ , tangente a la trayectoria.
- $\mathbf{B} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{N}$ , según la recta  $MP$  (figura 2.19), contenido en el plano tangente  $\Pi_t$  y normal a los anteriores.

El punto  $C$  es el centro de curvatura de la sección normal (definida como la intersección de la superficie con el plano definido por  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{N}$ ), y  $C'$  el centro de curvatura de la trayectoria  $\Gamma$ . Por tanto, la normal principal a la curva lleva la dirección de  $MC'$ :  $\mathbf{n} \parallel MC'$ . Los segmentos que definen ambos radios de curvatura ( $MC$  y  $MC'$ ) forman entre sí un ángulo  $\theta$ . Las ecuaciones en las direcciones del triedro intrínseco son

$$\begin{aligned} f_t &= m \frac{dv}{dt}, \\ f_n + N_n &= \frac{mv^2}{\rho}, \\ f_b + N_b &= 0, \end{aligned}$$

siendo  $\rho$  el radio de curvatura de la trayectoria. Proyectando sobre la dirección  $\mathbf{N}$  (normal a la superficie), las componentes de la fuerza aplicada y de la reacción son respectivamente

$$f_N = f_n \cos \theta + f_b \sen \theta; \quad N = N_n \cos \theta + N_b \sen \theta.$$

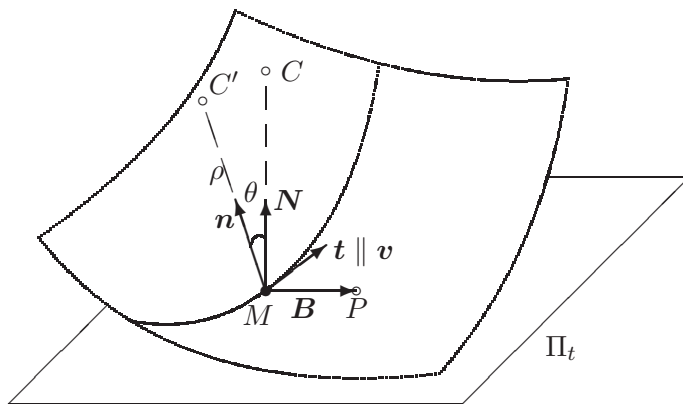


Figura 2.19: *Triedro intrínseco de la superficie.*

La ecuación dinámica según esta dirección es

$$f_N + N = \frac{mv^2}{\rho} \cos \theta.$$

El radio de curvatura de la sección normal es  $R_N = \overline{MC} = \rho / \cos \theta$ , por el *teorema de Meusnier*<sup>12</sup>. Por tanto, la ecuación anterior puede escribirse como

$$f_N + N = \frac{mv^2}{R_N}.$$

Proyectando sobre  $\mathbf{B}$  (normal a la trayectoria y  $\in \Pi_t$ ), la componente de la reacción normal es naturalmente nula, mientras que la fuerza aplicada es

$$f_B = -f_n \sin \theta + f_b \cos \theta,$$

y la ecuación es

$$f_B = -\frac{mv^2}{\rho} \sin \theta.$$

Se pueden definir las *geodésicas* de la superficie como aquellas curvas en las que el radio de curvatura y el de la sección normal de la superficie coinciden ( $\theta = 0$ ). En ellas el plano osculador contiene constantemente

<sup>12</sup>cf. D.J. Struik: *Geometría Diferencial Clásica*, Aguilar 1973, (apartado 2.5).



a la normal a la superficie  $\mathbf{N}$ . Si no actúan fuerzas exteriores ( $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ), una partícula ligada a la superficie recorre una geodésica con velocidad constante. En efecto:

$$\begin{cases} f_t = 0 & \Rightarrow v = v_0 \\ f_B = 0 & \Rightarrow \theta = 0 \text{ (Geodésica)} \\ N = mv^2/R_N \end{cases}$$

## 2.6. Problemas propuestos.

**Problema 2.1.** Una varilla  $AB$  de longitud  $2a$  se mueve de forma que su extremo  $A$  recorre el eje  $Oz$  de un sistema de referencia  $Oxyz$  ortogonal. El extremo  $B$  recorre la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0, z = 0$$

con velocidad angular constante  $\omega$ . Inicialmente  $B$  está en el origen de coordenadas. Se pide:

- Ecuaciones horarias del movimiento del punto medio  $M$  de la varilla.
- Caracterizar geoméricamente la trayectoria.
- Velocidad de  $M$ .
- Valores máximos o mínimos de la velocidad de  $M$  y posiciones en que se presentan.
- Caracterizar el movimiento de  $A$ .
- Aceleración de  $M$ .
- Aceleraciones tangencial y normal en los instantes de los máximos y mínimos de la velocidad.
- Radio de curvatura de la trayectoria en esos instantes.

**Problema 2.2.** Un punto  $M$  describe la cardioide

$$\rho = a(1 + \cos \theta)$$

de modo que su aceleración pasa continuamente por el polo  $O$ . Inicialmente el punto se encuentra en  $(2a, 0)$  con una velocidad  $v_0$ . Se pide:

- Velocidad del punto en función de  $\rho$ .
- Aceleraciones total, tangencial y normal en función de  $\rho$ .
- Radio de curvatura de la trayectoria.

d. Tiempo que tarda en llegar al polo  $O$ .

**Problema 2.3.** Un punto se mueve en un plano alrededor de un punto fijo  $O$ , de modo que su aceleración  $\gamma$  es siempre normal al radio vector  $\rho$ , y este último gira alrededor de  $O$  con velocidad angular constante  $\omega$ . Hallar la ecuación de la trayectoria y el valor de  $\gamma$ , sabiendo que en el instante inicial  $\rho = r_0, \theta = 0$ , y  $v_0$  es perpendicular a  $r_0$ .

**Problema 2.4.** Un punto  $M$  se mueve con velocidad constante  $c$  sobre la catenaria  $y = a \cosh(x/a) = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a})$ . Hallar la aceleración del punto  $M$  en función de  $x$  e  $y$  y la dirección de la misma.

**Problema 2.5.** Un punto material  $M$  pesado y de masa  $m$  está obligado a moverse sin rozamiento sobre una circunferencia vertical de radio  $a$ . Dicha circunferencia gira con velocidad angular constante  $\omega$  alrededor del diámetro vertical  $AB$ . En el instante inicial el punto se sitúa en el punto más bajo y tiene una velocidad inicial relativa a la circunferencia  $V_0 = \sqrt{2ga}$ . Se pide:

- Ecuación diferencial del movimiento de  $M$ ;
- Dejar el movimiento reducido a una cuadratura;
- Reacción de la circunferencia sobre el punto  $M$  en función de la posición.

**Problema 2.6.** Una partícula material pesada  $M$ , de masa  $m$ , se mueve sobre una hélice cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$\begin{aligned}x &= R \cos \theta, \\y &= R \operatorname{sen} \theta, \\z &= R \theta.\end{aligned}$$

Sobre el punto actúa además de la gravedad una fuerza de resistencia proporcional y opuesta a la velocidad tal que cuando la velocidad del punto es  $\sqrt{gR}$ , la fuerza de resistencia es igual al peso  $mg$  de la partícula. En el instante inicial ( $t = 0$ ) la partícula se encuentra en la posición definida por las coordenadas  $(R, 0, 0)$  y se lanza con una velocidad  $V_0\sqrt{2}/2(\mathbf{j} + \mathbf{k})$ . Se pide:

- demostrar que existe un valor de la velocidad inicial  $V_0$  para el cual la aceleración total de la partícula en el instante inicial es mínima.
- Plantear las ecuaciones que determinan el movimiento de la partícula  $M$  y la reacción de la hélice.
- Calcular la posición más alta alcanzada por la partícula, suponiendo que el valor algebraico de la velocidad inicial es:  $V_0 = \sqrt{2gR}$ .

**Problema 2.7.** Se considera un punto material pesado  $M$ , de masa  $m$ , que puede deslizar sin rozamiento y con ligadura bilateral, sobre un cono de revolución de eje vertical y semiángulo  $30^\circ$ . Sobre el punto actúa, además del peso, una repulsión desde el vértice del cono, de valor:

$$F = \frac{\sqrt{3}}{2}mg \left[ 1 - \frac{a^4}{r^4} \right]$$

donde  $r$  es la distancia del punto  $M$  al vértice del cono. En el instante inicial se lanza el punto  $M$ , tangente al paralelo local, a una distancia  $a$  del vértice y con velocidad inicial  $V_0 = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}}ga}$ . Se pide:

- Determinar completamente la trayectoria y ley horaria del movimiento del punto  $M$ , indicando el tiempo que tarda en alcanzar la cota más baja.
- Reacción normal del cono sobre el punto.

**Problema 2.8.** Una bolita pesada de masa  $m$  desliza sobre sin rozamiento sobre la trayectoria de la figura, cuyo lazo es circular de radio  $R$ , siendo el enlace unilateral. ¿A qué altura  $H$  es necesario soltar la bolita, sin velocidad inicial, para que recorra el lazo sin desprenderse? ¿y para que se desprenda y pase por el centro del lazo?

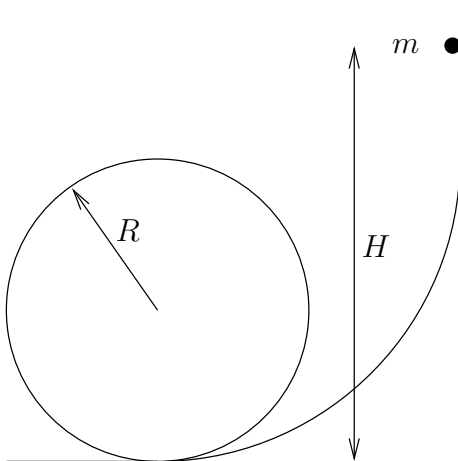


Figura 2.20: Problema 2.8

**Problema 2.9.** Una partícula que se mueve sobre una circunferencia es atraída por un punto de su perímetro, con una fuerza función de la distancia. Determinar esta función de modo que la reacción que ejerza la circunferencia sobre la partícula sea constante, y calcúlese la reacción en función de las condiciones iniciales.

**Problema 2.10.** Un punto material de masa  $m$  se mueve sin rozamiento sobre la superficie de revolución engendrada por una catenaria al girar alrededor de su eje de simetría, cuya ecuación es

$$z = a \cosh \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}.$$

Sobre el punto actúa únicamente una fuerza atractiva hacia el eje  $Oz$  cuya expresión vectorial es:

$$\mathbf{F} = -m\omega^2 a^4 \frac{r^2 + 2a^2}{r^5} \mathbf{u}_r$$

donde  $\omega$  es una constante conocida. En el instante inicial el punto material se encuentra en una posición situada a distancia  $a$  del eje  $Oz$  y está dotado de una velocidad  $v_0 = \sqrt{2}\omega a$ , formando un ángulo de  $45^\circ$  con la tangente al meridiano correspondiente. El sentido de la velocidad es tal que el punto tiende a alejarse del eje  $Oz$ . Se pide:

- Calcular la velocidad del punto en función de su posición.
- Calcular la proyección del punto sobre el plano  $Oxy$ , a lo largo del movimiento.
- Determinar la ley horaria del movimiento.
- Calcular la reacción normal de la superficie.

**Problema 2.11.** Un punto pesado  $M$  de masa  $m$  se mueve por la cicloide

$$\begin{aligned} x &= R\varphi - R \operatorname{sen} \varphi, \\ y &= R - R \operatorname{cos} \varphi, \end{aligned}$$

a la que puede abandonar por el lado convexo. Sabiendo que el eje  $Oy$  es la vertical ascendente, se lanza el punto desde la posición más alta de la cicloide con una velocidad inicial  $v_0$ . Se pide:

- Ecuación del movimiento.
- Reacción normal.
- Punto en que  $M$  se despega de la cicloide.
- Valor máximo de  $v_0$  para que el punto no se despegue inmediatamente de la cicloide.

**Problema 2.12.** Un cuadrado indeformable  $OABC$ , formado por 4 varillas huecas de longitud  $l$  cada una, se mueve en un plano horizontal alrededor del vértice fijo  $O$  con velocidad de giro constante  $\omega$ . En el lado  $AB$ , según

indica la figura, puede moverse sin rozamiento una partícula  $P$  de masa  $m$ , unida al vértice  $A$  mediante un resorte de constante  $k$  y longitud nula sin tensión. Se pide:

- Aceleración absoluta de  $P$ , en sus componentes normal y tangencial a  $AB$ , para un instante genérico. Se tomará como parámetro  $u = \overline{AP}$ .
  - Ecuación diferencial del movimiento de  $P$  relativo a  $AB$ .
  - Suponiendo que inicialmente  $u(0) = u_0$  y  $\dot{u}(0) = 0$ , estudiar la posibilidad de equilibrio relativo estable, en función de la relación entre  $\omega$  y  $k$ .
  - Reacción de la varilla  $AB$  sobre  $P$ .
- (Examen parcial, 9/2/1996)

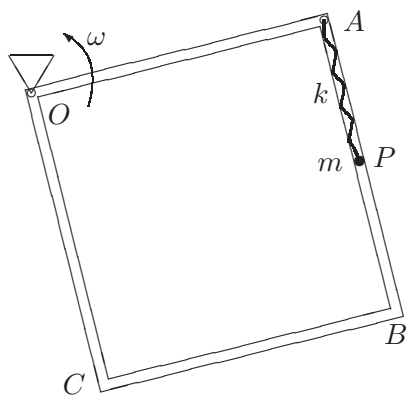


Figura 2.21: *Problema 2.12*

**Problema 2.13.** Bajo la acción de la gravedad, una partícula  $m$  se mueve sin rozamiento sobre la cicloide (ver figura adjunta) definida en forma paramétrica por las expresiones:

$$x = R(\theta - \operatorname{sen} \theta); \quad y = -R(1 - \cos \theta),$$

con  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

- Obtener la relación  $s(\theta)$ , siendo  $s$  la longitud de arco medido desde el punto más bajo de la cicloide ( $\theta = \pi$ ).
- Obtener la ecuación dinámica del movimiento (ecuación diferencial de orden 2 en  $s(t)$ ).
- Si la partícula se libera partiendo del reposo, desde la posición  $\theta = \pi/2$ , obtener el tiempo que tarda en llegar al punto más bajo de la cicloide. Misma cuestión si parte del punto más alto ( $\theta = 0$ ).

(Examen parcial, 26/1/1998)

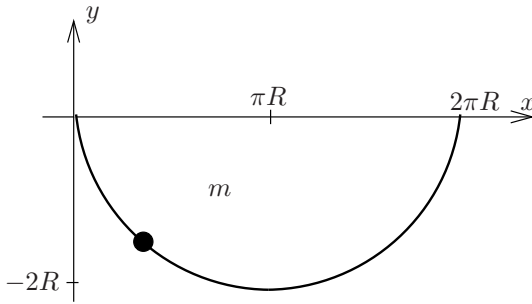


Figura 2.22: *Problema 2.13*

**Problema 2.14.** Una partícula de masa  $m$  se mueve libremente sobre un aro circular liso y rígido, de radio  $R$ , que tiene un movimiento de rotación impuesto con velocidad angular  $\omega$  constante alrededor de un diámetro vertical fijo. Además del peso, sobre la partícula actúa un resorte lineal de constante  $k$  y longitud natural nula, cuyo otro extremo desliza libremente sobre el diámetro horizontal del aro. Se pide:

- Componentes de la aceleración (absoluta) de la partícula en las direcciones tangencial al aro, normal al mismo según la dirección radial y normal al plano del mismo, en función de  $\theta$  y sus derivadas.
- Ecuación diferencial del movimiento.
- Expresión general de la reacción del aro sobre la partícula, así como el momento que se necesita aplicar al aro para obtener el movimiento impuesto (se supondrá masa nula para el aro).
- Si en el instante inicial la partícula parte de una posición sobre el diámetro horizontal con velocidad relativa nula, deducir razonadamente el máximo y mínimo de la inclinación  $\theta$  en el movimiento subsiguiente.

(Examen parcial, 27/11/1999)

**Problema 2.15.** Un disco de radio  $R$  se mueve en todo momento en un plano vertical de forma que gira con velocidad angular  $\omega$  constante. El disco además rueda sin deslizar sobre una recta horizontal que se mueve con una velocidad constante  $v$ . En el disco existe una ranura radial lisa en la que se mueve una partícula de masa  $m$ , que está unida además al centro ( $C$ ) del disco mediante un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural nula. Se pide:

- Expresar la ecuación diferencial del movimiento de la partícula en la ranura.
- Obtener el valor mínimo de  $k$  para que el movimiento de la partícula respecto de la ranura sea de tipo oscilatorio.

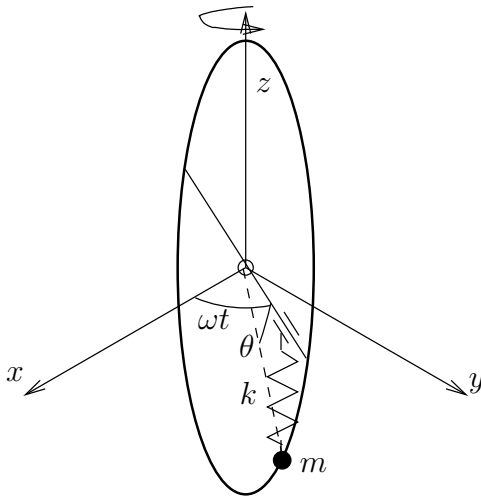


Figura 2.23: Problema 2.14

- c. Expresar la reacción que ejerce la ranura sobre la partícula.
- d. Suponiendo que en el instante inicial la ranura está horizontal y la partícula se encuentra en el borde derecho del disco y en reposo respecto de éste, calcular el trabajo de la reacción entre  $t = 0$  y un instante en que la ranura ha girado un cuarto de vuelta ( $t = \pi/(2\omega)$ ). Particularizar este cálculo para  $k = 10mg/R$ ,  $\omega = \sqrt{g/R}$  y  $v = (5/6)\omega R$ .  
(Examen parcial, 25/11/2000)

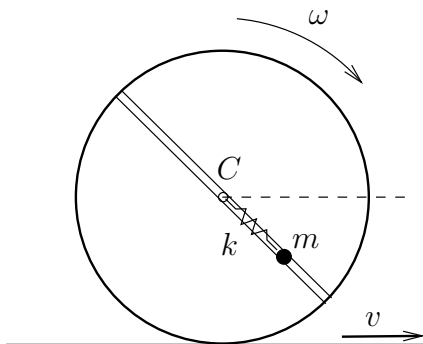


Figura 2.24: Problema 2.15





## Capítulo 3

# Oscilaciones lineales con 1 grado de libertad

Es muy común que el objetivo de un diseño mecánico sea una estructura o un mecanismo que permanezca cerca de una posición de equilibrio estable, pudiendo realizar sin embargo pequeños movimientos u oscilaciones alrededor de esa posición. Una variante sería un sistema cuyo movimiento objetivo sea una trayectoria determinada, admitiendo pequeñas oscilaciones o variaciones acotadas respecto de la misma.

Las sollicitaciones y la respuesta de un sistema debido a cargas dinámicas pueden superar notablemente los efectos de las mismas cargas en condiciones estáticas, aplicadas de forma suficientemente lenta. Los diseños de ingeniería cada vez requieren más una adecuada respuesta dinámica. Esto puede deberse a que las cargas realmente se apliquen de forma muy rápida, como a asignar una mayor importancia a aspectos como el mantenimiento de la funcionalidad, la resistencia, y el confort ante las vibraciones. Estas condiciones de diseño a menudo se añaden a las puramente estáticas, de estabilidad y resistencia en la posición de equilibrio.

En la mayoría de los casos prácticos, estas pequeñas oscilaciones se pueden considerar como «lineales» (más adelante se precisa el significado de este término) pudiéndose analizar mediante la teoría que se expone en este capítulo y en el capítulo 11 para sistemas con varios grados de libertad.

Comenzamos aquí por los casos más simples de oscilaciones, los de sistemas con 1 grado de libertad. Aunque en la realidad casi todos los casos tienen varios grados de libertad, en numerosas situaciones existe un grado de libertad predominante, pudiéndose despreciar los otros «modos de vibración» en una primera aproximación. Será válido en estos casos el estudio

mediante las técnicas que presentamos en este capítulo; en cualquier caso, serán la base para el estudio de las oscilaciones con varios grados de libertad que se tratan más adelante (capítulo 11).

### 3.1. El oscilador armónico simple

#### 3.1.1. Ecuación del movimiento

Sea una masa puntual,  $m$ , obligada a moverse según una recta fija, sujeta a un punto dado de la misma por medio de un resorte elástico (es decir, un muelle que ejerce una fuerza proporcional a su elongación), de constante  $k$ , sin que existan otras fuerzas aplicadas. Si se denomina  $x$  la coordenada de  $m$  a lo largo de la recta, el resorte elástico ejerce una fuerza recuperadora, que se opone a la elongación, de valor

$$F = -k(x - x_0),$$

siendo  $x_0$  la que se denomina *longitud natural* del resorte, para la cual éste quedaría sin tensión. El signo ha de ser negativo puesto que la fuerza del resorte tiene sentido contrario a la elongación, es decir, es una resistencia interna que se opone a ella.

Decimos que se trata de un resorte lineal, porque la fuerza desarrollada en el mismo depende linealmente de la elongación: a doble elongación, doble fuerza, y a elongación mitad, la fuerza se divide por dos.

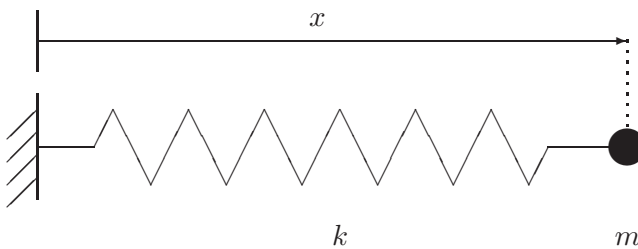


Figura 3.1:  
Oscilador armónico simple

Como podemos elegir el origen de coordenadas donde nos plazca, lo haremos en el punto  $x_0$ , de forma que la expresión de la fuerza del muelle sea

$$F = -kx.$$

Aplicando el principio de la cantidad de movimiento (2.2), obtenemos la ecuación dinámica de este sistema:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + kx = 0} \quad (3.1)$$

Se trata de una ecuación diferencial ordinaria con las siguientes características:

- de *segundo orden*, ya que intervienen derivadas segundas;
- *lineal*, ya que así es la dependencia en relación con la variable  $x$  y sus derivadas;
- de *coeficientes constantes*, pues supondremos fijos  $m$  (masa del sistema) y  $k$  (rigidez del resorte);
- *homogénea*, pues la ecuación está igualada a cero, sin término independiente a la derecha del signo igual.

### 3.1.2. Energía

Antes de proceder a integrar la ecuación, conviene analizar la energía asociada al resorte. La fuerza del muelle es conservativa, asociada a un potencial  $V(x)$ . Éste se calcula inmediatamente integrando el trabajo realizado por aquélla entre la posición natural y una posición genérica:

$$V = - \int_0^x F \, dx = - \int_0^x (-kx) \, dx = \frac{1}{2}kx^2.$$

Al ser la fuerza conservativa, la energía total se conserva, siendo su valor en un instante genérico

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (\text{cte.}) \quad (3.2)$$

Si el movimiento es oscilatorio y acotado, la elongación  $x(t)$  tendrá máximos en los que la derivada es nula ( $\dot{x} = 0$ ). Particularizando para uno de estos instantes, podemos escribir la ecuación (3.2) en función de una nueva constante  $A$  cuya interpretación es la elongación máxima:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad (3.3)$$

Físicamente, podemos interpretar la ecuación anterior observando que en los puntos de elongación máxima toda la energía es potencial ( $V_{\max} = \frac{1}{2}kA^2$ ), mientras que en los puntos de elongación nula toda la energía es cinética ( $T_{\max} = \frac{1}{2}kA^2$ ). A lo largo del movimiento, la energía total se conserva, oscilando entre estas dos formas.

### 3.1.3. Integración de la ecuación

El objetivo es resolver la ecuación (3.1), integrándola para obtener el movimiento  $x(t)$ . No se pretende aquí explicar con carácter general los procedimientos de integración de ecuaciones diferenciales con una variable, por lo que nos ceñiremos a los detalles de la solución de ecuaciones del tipo de (3.1), que por otra parte reviste considerable importancia en la física y en la mecánica.

La forma más sencilla es partir de la ecuación (3.3), despejando en ella y separando variables:

$$\dot{x}^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{k}{m}} dt = \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

La integración se puede hacer para cada miembro de esta ecuación de forma independiente, resultando

$$\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi = \arcsen \frac{x}{A},$$

donde  $\varphi$  es una constante de integración. Definimos ahora un nuevo parámetro  $\omega_0$  como

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.4)$$

con lo cual despejando el valor de  $x$  resulta la ecuación del movimiento buscada:

$$x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.5)$$

Esta ecuación define una ondulación armónica (es decir, sinusoidal). Se trata de un movimiento periódico, puesto que se repite idénticamente cada cierto intervalo de tiempo, denominado periodo, de manera indefinida. En este caso el periodo es  $T = 2\pi/\omega_0$ .

El parámetro  $\omega_0$  recibe el nombre de *pulsación* o *frecuencia angular natural* del sistema; representa la frecuencia angular con la que éste oscila cuando se le separa de su posición de equilibrio y se le libera para que se mueva libremente<sup>1</sup>. La constante  $A$  es la *amplitud* de la oscilación (módulo de la elongación máxima) y por último  $\varphi$  es el *ángulo de fase*, ya que indica la fase de la senoide en que se sitúa el origen de tiempo.

<sup>1</sup>En contra de lo que pudiera parecer, la notación  $\omega_0$  no indica «valor inicial de  $\omega$ », tratándose de un valor característico del sistema que se mantiene *constante*. El subíndice en  $\omega_0$  se refiere a que el sistema no tiene amortiguamiento, en comparación con la frecuencia característica  $\omega$  que obtendremos para los sistemas con amortiguamiento, ver ecuación (3.13).

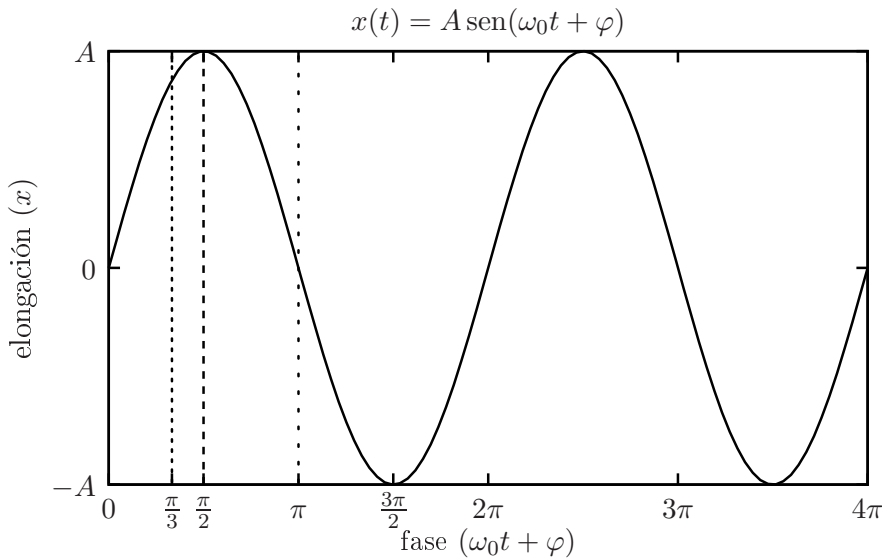


Figura 3.2: *Oscilación armónica, abarcando dos periodos completos del movimiento. Un ángulo de fase  $\varphi \neq 0$  equivale simplemente a una traslación del origen de tiempos.*

La frecuencia angular o pulsación se mide en radianes/segundo. La frecuencia circular  $f$  —o frecuencia propiamente dicha—, indica el número de ciclos o revoluciones por unidad de tiempo, y se expresa mediante Hercios o ciclos por segundo (Hz). La relación entre ambas medidas de la frecuencia es por tanto  $f = \omega/2\pi$ . También es posible expresar la frecuencia en otras unidades como revoluciones por minuto (rpm).

Es inmediato observar de (3.5), que cuanto más rígido sea el muelle (mayor  $k$ ) o más ligera la masa (menor  $m$ ), mayor será la frecuencia natural de oscilación  $\omega_0$ . Por el contrario, sistemas flexibles ( $k$  pequeño) y pesados ( $m$  grande) tendrán frecuencias naturales bajas.

Si el valor de la constante  $k$  fuese negativo, esto correspondería a una repulsión del resorte, y no sería posible la solución anterior al no poderse obtener  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Físicamente, este caso no correspondería a un movimiento de oscilación, ya que la partícula tendería a alejarse cada vez más del origen, sin estar su movimiento acotado. Por tanto, para que el sistema tenga un movimiento oscilatorio acotado ha de poseer una rigidez  $k$  positiva, correspondiente a una atracción hacia la posición de equilibrio estable.

Los dos parámetros  $A$  y  $\varphi$  quedan indeterminados en (3.5), siendo necesario calcularlos a partir de las dos condiciones iniciales (posición y velocidad

### 3.6 Capítulo 3. OSCILACIONES LINEALES CON 1 GRADO DE LIBERTAD

iniciales). Por ejemplo, para una vibración que parte desde una elongación inicial  $a$  en reposo,

$$x_0 = a; \quad \dot{x}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = a, \quad \varphi = \pi/2.$$

Para unas condiciones iniciales cualesquiera  $x_0$  y  $v_0$ , particularizando (3.5) se halla

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\omega_0 x_0}{v_0} \right); \quad A = \frac{x_0}{\text{sen } \varphi}.$$

Como comprobación, podemos evaluar la energía asociada al movimiento definido por (3.5). En un instante genérico, la velocidad es

$$\dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

por lo que

$$T + V = \frac{1}{2} \underbrace{m\omega_0^2}_{=k} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \text{sen}^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2.$$

Como era de esperar se obtiene el mismo valor que en (3.3).

## 3.2. Oscilaciones en 2 dimensiones

Sea una masa  $m$  que se puede mover en un plano, atraída hacia un punto  $O$  del mismo por un resorte lineal.

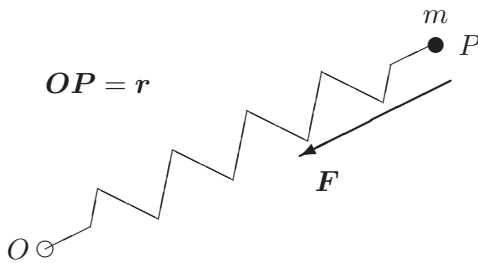


Figura 3.3: Oscilaciones en 2D de una partícula atraída hacia un punto  $O$  del plano.

La expresión vectorial de la fuerza de atracción es

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r},$$

y la ecuación vectorial del movimiento

$$m\ddot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = \mathbf{0};$$

En componentes, tomando unos ejes  $Oxy$  en el plano, resultan dos ecuaciones escalares desacopladas:

$$m\ddot{x} + kx = 0; \quad m\ddot{y} + ky = 0. \quad (3.6)$$

La solución general de estas ecuaciones es

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha); \quad y = B \cos(\omega_0 t + \beta),$$

expresiones que definen la trayectoria de forma paramétrica. Para obtener la ecuación implícita de la trayectoria tengamos en cuenta, en primer lugar, que podremos elegir el origen de tiempos sin pérdida de generalidad de forma que sea  $\alpha = 0$ ; el ángulo de fase para  $y$  será  $\delta = \beta - \alpha$ . De esta forma queda

$$x = A \cos(\omega_0 t); \quad y = B \cos(\omega_0 t + \delta).$$

Desarrollando la expresión de  $y$  y eliminando la variable  $t$ ,

$$y = B(\cos \omega_0 t \cos \delta - \text{sen } \omega_0 t \text{ sen } \delta),$$

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \delta - \text{sen } \delta \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}},$$

de donde se obtiene finalmente

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \delta = \text{sen}^2 \delta. \quad (3.7)$$

Para distintos valores de  $\delta$ , esta ecuación representa una familia de elipses con orientación y excentricidad variables, siempre inscritas en el rectángulo  $-A < x < A$ ,  $-B < y < B$ , como es fácil de comprobar. Las elipses degeneran en rectas diagonales para los casos límite  $\delta = 0$  y  $\delta = \pi$  (ver figura 3.4).

Una generalización interesante del caso anterior resulta de considerar una constante de atracción distinta según cada uno de los dos ejes ( $k_x$  y  $k_y$  respectivamente). Realizando esta modificación en las ecuaciones (3.6) es inmediato comprobar que su solución son oscilaciones en  $x$  e  $y$  con distinta frecuencia,  $\omega_x = \sqrt{k_x/m}$  y  $\omega_y = \sqrt{k_y/m}$ :

$$x = A \cos(\omega_x t + \alpha), \quad y = B \cos(\omega_y t + \beta).$$

Las trayectorias descritas son las llamadas curvas de Lissajous (figura 3.5). Estas curvas son cerradas tan sólo si  $\omega_y/\omega_x$  es una fracción racional. En caso contrario, se describen trayectorias abiertas que, a lo largo del tiempo,

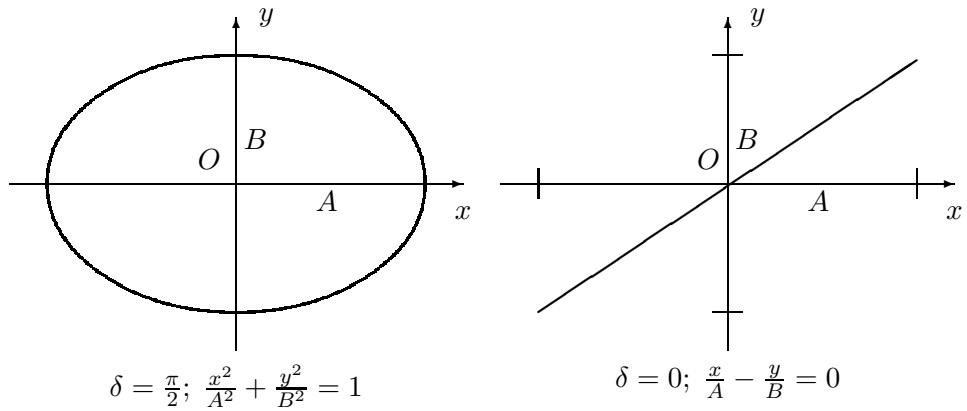


Figura 3.4: Trayectorias de una partícula con atracción elástica a un punto  $O$ , mostrando dos casos extremos de la familia de elipses (3.7). El primer caso corresponde a las condiciones iniciales  $x_0 = A, \dot{x}_0 = 0, y_0 = 0, \dot{y}_0 = -B\omega_0$ , y el segundo a  $x_0 = A, \dot{x}_0 = 0, y_0 = B, \dot{y}_0 = 0$ .

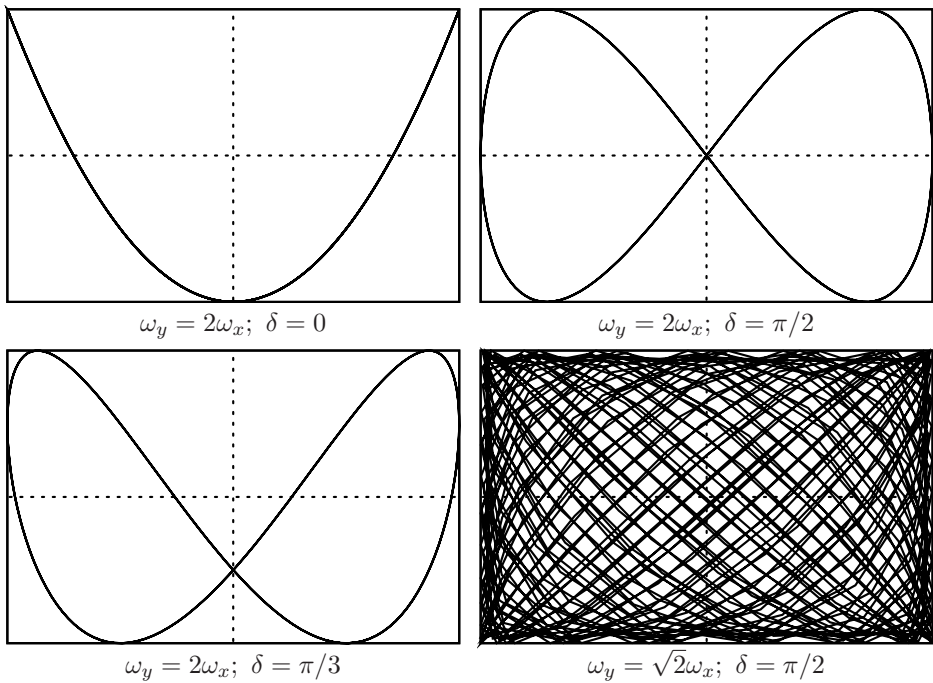


Figura 3.5: Curvas de Lissajous, para diversas condiciones iniciales. En el último caso, al no ser el cociente de frecuencias racional, la curva no es cerrada



acaban siendo densas en el rectángulo  $]-A, A[ \times ]-B, B[$  (pasan tan cerca como se desee de cualquier punto), sin cerrarse nunca.

La trayectoria seguida es sensible a las perturbaciones de los parámetros iniciales; una pequeñísima variación de  $\omega_x$  u  $\omega_y$ , convertirá a una curva de cerrada en abierta, por ejemplo.

### 3.3. Oscilaciones con amortiguamiento

#### 3.3.1. Ecuación del movimiento

Un amortiguador viscoso ejerce una fuerza de resistencia pasiva proporcional a la velocidad,  $F_A = -c\dot{x}$ , de sentido contrario a ella. Este modelo

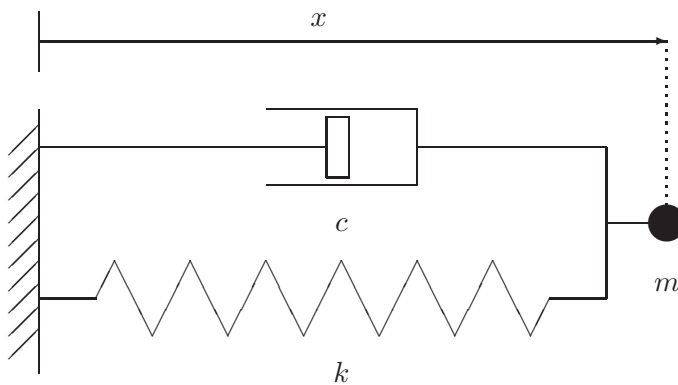


Figura 3.6:  
Oscilador con  
amortiguamiento viscoso

corresponde aproximadamente a la resistencia desarrollada por un émbolo en un pistón lleno de líquido, al fluir por el hueco libre entre pistón y émbolo. Se trata de una fuerza necesariamente *no conservativa*. Es fácil comprobarlo, ya que en cualquier trayectoria cerrada (origen y final en el mismo punto), el trabajo realizado por la fuerza de amortiguamiento es esencialmente negativo:

$$W_A = \oint \left(-k \frac{dx}{dt}\right) dx = \oint (-k\dot{x}^2) dt < 0.$$

Aunque este modelo no representa de forma exacta la mayoría de las resistencias pasivas reales, resulta sencillo y suficientemente aproximado para una gran cantidad de casos prácticos, permitiendo considerar las inevitables resistencias del medio en que se produce la vibración.

Considerando la fuerza del amortiguador, la fuerza total sobre  $m$  es ahora

$$F = -c\dot{x} - kx,$$

resultando la ecuación:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (3.8)$$

Esta sigue siendo una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y homogénea.

### 3.3.2. Integración de la ecuación

La solución de la ecuación (3.8) es del mismo tipo que en el caso anterior sin amortiguamiento (3.1), es decir, basada en funciones armónicas. Tan sólo es necesario aquí generalizar algo la expresión de las soluciones ensayadas, para lo cual emplearemos una exponencial del tipo  $x(t) = ae^{rt}$ . En principio, permitiremos que tanto  $a \in \mathbb{C}$  como  $r \in \mathbb{C}$  sean números complejos, aunque por motivos físicos debemos exigir al final que el resultado  $x(t)$  sea real. Como se sabe, la exponencial da lugar a funciones armónicas para exponente imaginario<sup>2</sup>.

Derivando y sustituyendo en la ecuación (3.8), resulta

$$(mr^2 + cr + k)e^{rt} = 0 \quad \Rightarrow \quad mr^2 + cr + k = 0. \quad (3.9)$$

Esta expresión se denomina «ecuación característica,» proporcionando los valores que debe tomar  $r$  para que exista la solución buscada:

$$r = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}. \quad (3.10)$$

Según el valor del discriminante ( $c^2 - 4km$ ) en la expresión general anterior, pueden distinguirse varios tipos de solución:

**a)  $c^2 - 4km > 0$ .**- En este caso existen dos raíces reales para (3.9):

$$r_1 = -p, \quad r_2 = -q.$$

Sabemos que necesariamente ambas han de ser negativas, ya que empleando la expresión (3.10) se comprueba que  $r_1 + r_2 < 0$  y  $r_1 \cdot r_2 > 0$ . Mediante la linealidad de la ecuación diferencial se demuestra que, si existen varias soluciones, cualquier combinación lineal de ellas es también solución de la ecuación (propiedad de comprobación inmediata). Por tanto, la solución general es:

$$x(t) = a_1e^{-pt} + a_2e^{-qt}.$$

---

<sup>2</sup>Empleando la notación de Euler,  $e^{\theta i} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ , siendo  $i = \sqrt{-1}$ .

En definitiva, se trata de una solución exponencial decreciente, que no ocasiona movimiento oscilatorio, debido a que el amortiguamiento  $c$  es excesivamente grande (amortiguamiento *supercrítico*). En la figura 3.7 se muestra el movimiento que se obtiene para un sistema de este tipo, en varios casos con distintas condiciones iniciales.

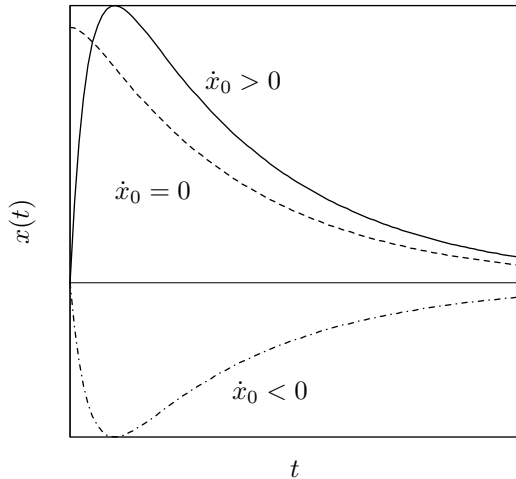


Figura 3.7: Movimiento de un sistema definido por la ecuación  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ , con amortiguamiento supercrítico ( $c > 2\sqrt{km}$ ), bajo distintas condiciones iniciales; Caso I)  $\dot{x}_0 > 0$ , Caso II)  $\dot{x}_0 = 0$ , Caso III)  $\dot{x}_0 < 0$ .

b)  $c^2 - 4km = 0$ .- Se trata del caso límite, en el que el amortiguamiento posee el valor crítico  $c_{\text{crit}} = 2\sqrt{km}$ . Existe una raíz real doble, negativa al igual que antes, para (3.9):

$$r = -\frac{c}{2m} = -p,$$

correspondiendo a la solución  $x(t) = ae^{-pt}$ . Se puede comprobar que  $x = bte^{-pt}$  también es solución, por lo que la solución general será una combinación de estas dos:

$$x = (a + bt)e^{-pt}.$$

Comprobamos por tanto que en este caso tampoco se produce un movimiento de tipo oscilatorio.

c)  $c^2 - 4km < 0$ .- Se obtienen en este caso dos raíces complejas conjugadas para (3.9),

$$r_1 = -p + \omega i, \quad r_2 = -p - \omega i,$$

### 3.12 Capítulo 3. OSCILACIONES LINEALES CON 1 GRADO DE LIBERTAD

siendo

$$p = \frac{c}{2m}, \quad \omega = \sqrt{-\frac{c^2}{4m^2} + \frac{k}{m}}.$$

La parte real de la solución es negativa, dando lugar a una exponencial decreciente, que multiplica a una función armónica:

$$\begin{aligned} x &= a_1 e^{(-p+i\omega)t} + a_2 e^{(-p-i\omega)t} \\ &= e^{-pt} (a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}) \\ &= e^{-pt} [(a_1 + a_2) \cos \omega t + i(a_1 - a_2) \sin \omega t] \end{aligned}$$

Aunque en un caso general esta expresión pueda tener componente imaginaria, por motivos físicos sabemos que  $x$  debe ser real. Esto obliga a que las constantes complejas  $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$  den lugar a unas nuevas constantes reales  $A, B \in \mathbb{R}$ :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (B - iA)/2 \\ a_2 &= (B + iA)/2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} B &= a_1 + a_2 \\ A &= i(a_1 - a_2) \end{aligned} \right\}$$

resultando

$$x = e^{-pt} (A \sin \omega t + B \cos \omega t). \quad (3.11)$$

Otra forma equivalente de expresar esta solución es mediante el cambio de las constantes  $(A, B)$  a otras  $(a, \varphi)$  definidas por:

$$A = a \cos \varphi; \quad B = a \sin \varphi,$$

resultando la expresión

$$\boxed{x = a e^{-pt} \sin(\omega t + \varphi)}. \quad (3.12)$$

Este último caso de amortiguamiento subcrítico ( $c < c_{\text{crit}}$ ) es el que más nos interesa, ya que es el único en que se producen vibraciones. La expresión (3.12) representa un movimiento oscilatorio amortiguado de amplitud decreciente ( $a e^{-pt}$ ), al estar modulado por una exponencial negativa. Aunque el movimiento es oscilatorio, no sería correcto en rigor llamarlo periódico, ya que cada oscilación es distinta, al disminuir la amplitud. Se define como amplitud (de forma más rigurosa, «pseudo-amplitud») del movimiento al valor  $a e^{-pt}$ , que tiende a 0 para  $t \rightarrow \infty$ . El movimiento desaparece en la práctica para un tiempo suficientemente grande. Es fácil comprobar que el intervalo entre máximos, al igual que entre pasos por cero, es constante e igual a  $T = 2\pi/\omega$  (periodo de la oscilación). Por tanto, a  $\omega$  se le llama frecuencia angular natural del sistema amortiguado (con mayor rigor formal «pseudo-frecuencia»).

El parámetro  $a$  representa la amplitud inicial y  $\varphi$  el ángulo de fase. Estas dos constantes (o alternativamente las  $A$  y  $B$  si se opta por la otra representación de la solución, definida mediante (3.11)) se calculan a partir de las condiciones iniciales  $(x_0, \dot{x}_0)$ .

En resumen, en función de los parámetros del problema, la solución quedará expresada como:

$$x = ae^{-\frac{c}{2m}t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi), \quad \text{con } \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}. \quad (3.13)$$

A menudo es útil emplear una notación alternativa para estas expresiones, en función de la frecuencia natural sin amortiguamiento  $\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k/m}$  (ecuación (3.5)), y la tasa de amortiguamiento crítico  $\xi$ , definida como

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{c_{\text{crit}}} = \frac{c}{2m\omega_0}.$$

El significado de  $\omega_0$  ya se discutió antes. En cuanto a  $\xi$ , se trata de un valor adimensional, que para los sistemas oscilatorios (amortiguamiento subcrítico) se halla entre 0 y 1. En el caso en que sea  $\xi \geq 1$  el amortiguamiento es crítico o supercrítico y no se producen oscilaciones. Para vibraciones estructurales, los valores usuales de  $\xi$  son pequeños; en una estructura real puede ser del orden de  $\xi = 0,02 = 2\%$  o menor<sup>3</sup>.

En función de estos parámetros, la ecuación diferencial (3.8) se puede escribir

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (3.14)$$

mientras que la solución (3.13) se expresa como

$$x = ae^{-\xi\omega_0 t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi), \quad \text{con } \omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (3.15)$$

Se observa inmediatamente que la pseudo-frecuencia  $\omega$  de este movimiento es menor que en el caso sin amortiguamiento ( $\omega_0$ ), debido al factor  $\sqrt{1 - \xi^2} < 1$ . Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos, al ser  $\xi$  pequeño, ambos valores resultan muy próximos ( $\omega \approx \omega_0$ ).

**EJEMPLO 3.1:** Una masa  $m$  de 400 kg puede deslizar sin rozamiento sobre un eje horizontal, unida mediante un resorte elástico de constante  $k = 10^5$  N/m a una base fija en el eje. Existe además un amortiguamiento viscoso, que reduce la amplitud de la oscilación a la centésima parte cada 10 s. Se pide:

<sup>3</sup>Por ejemplo, en la nueva norma para acciones de cálculo de puentes de ferrocarril, en los que las acciones dinámicas cobran especial relevancia para trenes de alta velocidad, se proponen amortiguamientos de  $\xi = 0,5\%$  para puentes metálicos o mixtos, y  $\xi = 2,0\%$  para puentes de hormigón estructural

### 3.14 Capítulo 3. OSCILACIONES LINEALES CON 1 GRADO DE LIBERTAD

- a. Valor de la constante  $c$  de amortiguamiento y de la tasa  $\xi$  respecto del crítico;
- b. Suponiendo que parte de  $x_0 = 0,05$  m medido desde la posición de equilibrio en reposo, obtener la ecuación del movimiento así como el valor numérico de la posición al cabo de 2 s;

*Solución.*

a.— El movimiento es un caso de vibraciones libres con amortiguamiento, dado por la ecuación (3.15):

$$x = ae^{-\xi\omega_0 t} \text{sen}(\omega t + \phi_0).$$

El valor de la frecuencia natural del sistema sin amortiguar es

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = 15,811388 \text{ rad/s} = 2,51646 \text{ Hz.} \quad (3.16)$$

El decremento de la pseudo-amplitud permite calcular la razón de amortiguamiento:

$$ae^{-\xi\omega_0 \cdot 10} = \frac{a}{100} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{\ln 100}{10\omega_0} = 0,029126 \approx 2,9\%. \quad (3.17)$$

La constante de amortiguamiento vale  $c = 2\xi\omega_0 = 368,4136 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ .

b.— Una vez calculados todos los parámetros, se pueden obtener las constantes a partir de las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = A \text{sen } \phi_0 \\ 0 = -A\xi\omega_0 \text{sen } \phi_0 + A\omega \cos \phi_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0,05002122 \\ \phi_0 = 1,541667 = 0,490728\pi \end{array} \right.$$

La expresión numérica de la solución es por tanto

$$x(t) = 0,05002122 e^{(-,4605170 t)} \text{sen}(15,80468 t + 1,541667), \quad (3.18)$$

y la posición a los dos segundos  $x(2) = 0,01964561$  m. Los resultados se muestran de forma gráfica en la figura 3.8.  $\square$

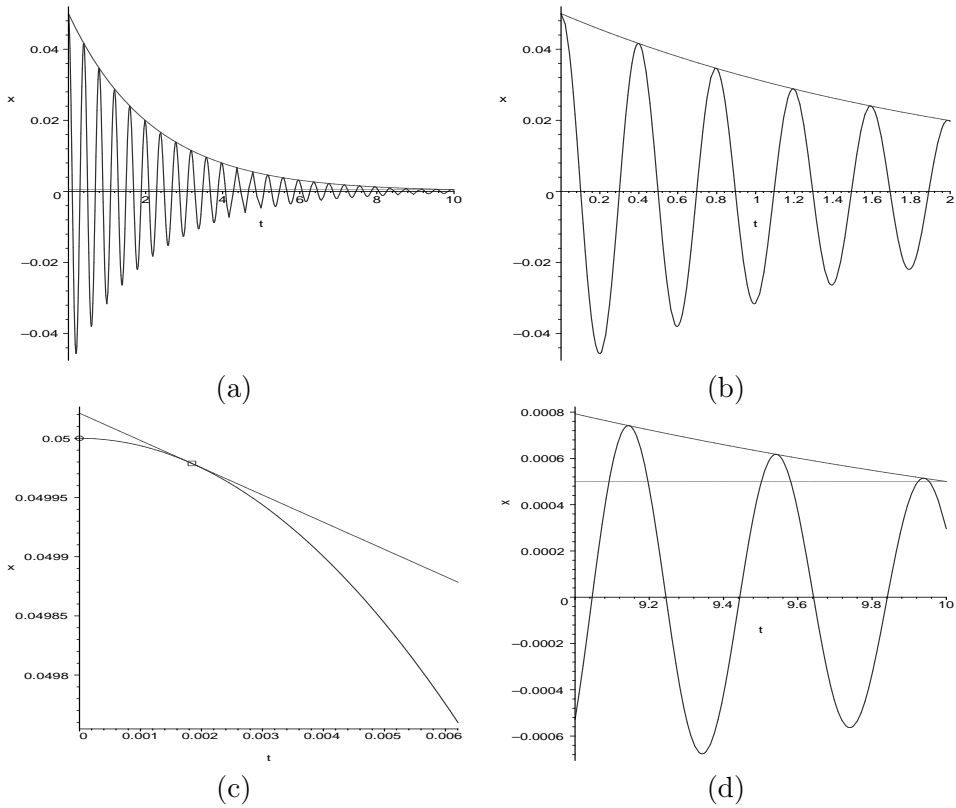


Figura 3.8: Resultados del ejemplo 3.1: (a) Gráfica para  $t \in [0, 10]$ ; (b) Detalle de la gráfica para  $t \in [0, 2]$ , en la que se aprecian mejor las oscilaciones amortiguadas; (c) Detalle del comienzo del movimiento (duración =  $1/64$  periodos) en el que se aprecia que en el instante inicial la curva no es tangente a la envolvente de pseudo-amplitud, junto con el punto de tangencia en que  $(\omega t + \phi_0) = \pi/2$ ; (d) Detalle de la fase final ( $t \in [9, 10]$ ) comprobando que se alcanza la centésima parte de la elongación inicial (recta horizontal).

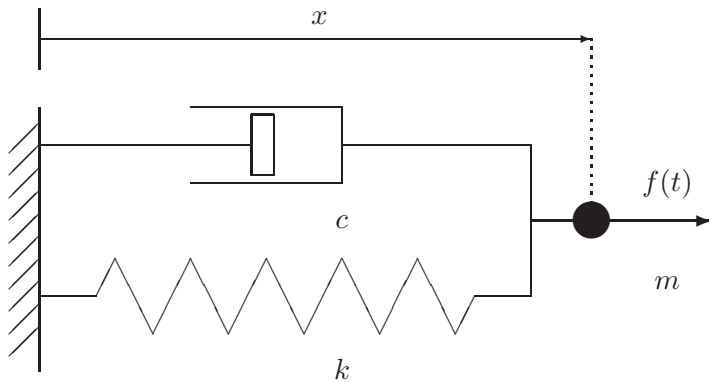


Figura 3.9: Oscilador simple con amortiguamiento sometido a fuerza externa.

## 3.4. Oscilaciones forzadas

### 3.4.1. Ecuación del movimiento

En este caso consideramos que sobre la masa  $m$  actúa una fuerza externa  $f(t)$ , además de las fuerzas internas antes descritas correspondientes al muelle y al amortiguador (figura 3.9).

La ecuación es ahora:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t). \quad (3.19)$$

Al incluir el término independiente  $f(t)$  la ecuación diferencial deja de ser homogénea. Esto da lugar a una estructura de la solución distinta, como se ve a continuación.

### 3.4.2. Integración de la ecuación

Sean dos soluciones cualesquiera  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  de la ecuación completa (3.19):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 &= f(t), \\ m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 &= f(t); \end{aligned}$$

restando término a término se obtiene

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = 0.$$

Por tanto su diferencia,  $x_h(t) = x_2(t) - x_1(t)$ , es solución de la ecuación homogénea (3.8). Esto nos sirve para poder expresar la solución general de la completa como una solución particular de la misma, que hallaremos por



cualquier procedimiento, más la solución general de la homogénea que ya sabemos calcular:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

El problema se limita pues a calcular una solución particular de (3.19). Cualquier procedimiento que nos permita hallarla es bueno (todo vale). Como regla general, buscaremos una solución particular del mismo tipo que el término de fuerza  $f(t)$ . Veremos a continuación las soluciones particulares para algunos casos significativos.

**a) fuerza constante,  $f(t) = D$ .**- Este caso puede corresponder a una fuerza constante estática, si su aplicación ha sido lenta, o a una función escalón dinámica, en el caso en que la aplicación sea súbita. En cualquier caso, la solución particular es otra constante, de valor

$$x_p = \frac{D}{k}.$$

La comprobación es inmediata, al ser  $\dot{x}_p = \ddot{x}_p = 0$ .

Este caso corresponde, por ejemplo, al de un muelle en posición vertical sujeto a la gravedad; al de la fuerza de rozamiento durante el intervalo en que no cambia de signo (supuesta la reacción normal constante); o al de una fuerza constante o escalón cualquiera.

Por otra parte, llamando  $x_0 = D/k$  (cte.), la adición de una solución  $x_p = x_0$  puede interpretarse también como una simple traslación del origen de coordenadas,  $x'(t) = x(t) - x_0 = x_h(t)$ . De esta forma el movimiento puede describirse como una oscilación libre alrededor de un nuevo centro, trasladado  $x_0$ .

Éste sería el caso, por ejemplo, de una masa  $m$  colgando de un resorte de constante  $k$  en dirección vertical, sometida a su propio peso ( $mg$ ). El movimiento puede interpretarse como una oscilación libre, alrededor de un punto de equilibrio situado la distancia  $mg/k$  por debajo del punto de longitud natural del muelle.

**b) fuerza lineal,  $f(t) = Et$ .**- Se trata de una fuerza que aumenta o disminuye linealmente con el tiempo. Tanteamos la solución  $x_p = mt + n$ , también lineal. Sustituyendo en (3.19) se obtienen los valores de  $m$  y  $n$ :

$$cm + k(mt + n) = Et \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m = E/k \\ n = -cE/k^2, \end{cases}$$

### 3.18 Capítulo 3. OSCILACIONES LINEALES CON 1 GRADO DE LIBERTAD

por lo que resulta

$$x_p = \frac{E}{k} \left( t - \frac{c}{k} \right).$$

Este caso sirve para definir un tramo en forma de rampa en una función de fuerza.

**c) fuerza armónica,  $f(t) = q \text{sen } \Omega t$ .**- Este caso tiene especial importancia, ya que no sólo sirve para una fuerza armónica en sí misma, sino que servirá también como base para calcular la solución frente a una carga cualquiera, mediante el desarrollo en serie de Fourier (aptdo. 3.7.3).

Tanteamos una solución que sea igualmente armónica, con la misma frecuencia que la excitación, pero admitiendo un posible desfase  $\delta$  respecto de la carga:

$$x_p(t) = A \text{sen}(\Omega t + \delta).$$

Sustituyendo en (3.19):

$$(k - m\Omega^2) \text{sen}(\Omega t + \delta) + c\Omega \cos(\Omega t + \delta) = \frac{q}{A} \text{sen } \Omega t,$$

y particularizando para dos valores distintos de  $t$  se puede calcular  $A$  y  $\delta$ :

1. para  $t = 0$ ,

$$(k - m\Omega^2) \text{sen } \delta + c\Omega \cos \delta = 0,$$

y despejando  $\delta$ ,

$$\tan \delta = -\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} = -\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (3.20)$$

2. para  $\Omega t + \delta = 0$ ,

$$c\Omega = \frac{q}{A} \text{sen}(-\delta)$$

$$A = -\frac{q}{c\Omega} \text{sen } \delta$$

Para expresar  $A$  en función de los parámetros del problema, debemos obtener en primer lugar la expresión de  $\text{sen } \delta$ :

$$\begin{aligned} \text{sen } \delta &= \frac{\tan \delta}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \delta}} \\ &= \frac{-c\Omega}{\pm \sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} \\ &= \frac{-2\xi\Omega\omega_0}{\pm \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

resultando finalmente las expresiones siguientes para  $A$ :

$$A = \frac{q}{\pm\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} = \frac{q/m}{\pm\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}}. \quad (3.22)$$

Debido a la indeterminación del signo de la raíz en las expresiones anteriores ((3.21) para  $\sin \delta$  y (3.22) para  $A$ ), podría resultar un valor negativo para esta última constante. A veces es conveniente sin embargo tomar el signo de la raíz que hace  $A$  positivo, concordando con su interpretación física como amplitud. Esto obligaría a su vez a tomar el valor apropiado para  $\delta$ , de forma que  $\sin \delta$  tenga el signo que le corresponde. Conviene observar que para cambiar de signo ( $\sin \delta$ ) basta con tomar  $(\delta + \pi)$  en lugar de  $\delta$ , es decir, se trata de un simple cambio del origen de tiempo, lo que siempre es lícito.

Una vez conocidos  $A$  y  $\delta$  es posible escribir la solución general de la ecuación completa (3.19) que resulta:

$$x(t) = \underbrace{ae^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega t + \varphi)}_{\text{sol. gral. homogénea}} + \underbrace{A \sin(\Omega t + \delta)}_{\text{sol. part. completa}}. \quad (3.23)$$

En esta expresión quedan tan sólo por determinar los parámetros  $a$  y  $\varphi$ , que se obtendrán particularizando para las condiciones iniciales. Conviene subrayar que, aunque estos parámetros afectan sólo a la parte de la solución que proviene de la homogénea, es la solución completa (3.23) la que se debe particularizar. No debe cometerse el error de particularizar el sumando correspondiente a la solución homogénea, sino que debe ser la suma de ambas.

Por otra parte, es importante observar que la solución particular de la completa que hemos obtenido es *independiente de las condiciones iniciales*, al ser función únicamente de los parámetros  $A$  y  $\delta$ , definidos por las expresiones (3.21) y (3.22) en las que no influyen dichas condiciones iniciales.

**Régimen transitorio y permanente.-** En el caso en que exista amortiguamiento, la solución de la homogénea al cabo de cierto tiempo —cuánto tiempo sea dependerá del amortiguamiento— desaparece. El intervalo durante el que no se puede despreciar el término correspondiente a la solución de la homogénea, siendo significativos ambos sumandos en (3.23), se llama *régimen transitorio*. El movimiento durante este régimen posee dos componentes armónicas de distinta frecuencia, la de la excitación ( $\Omega$ ) y la natural del sistema en vibración libre ( $\omega$ ).

*El régimen permanente* es el que se alcanza cuando el término correspondiente a la solución de la homogénea en (3.23) se amortigua hasta hacerse

despreciable, quedando tan sólo la solución particular de la completa. Como se ha dicho antes, esta solución particular se puede escoger de forma que no dependa de las condiciones iniciales<sup>4</sup>. Por lo tanto, éstas sólo tendrán influencia durante el régimen transitorio. Dicho de otra manera, en un movimiento forzado y amortiguado, al cabo de un tiempo el movimiento es siempre el mismo independientemente de las condiciones iniciales.

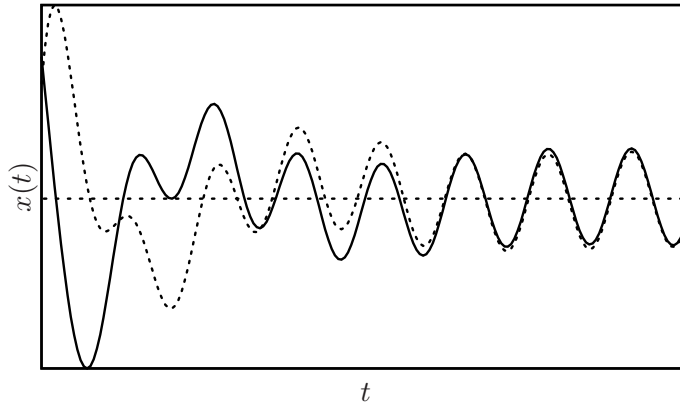


Figura 3.10: *Movimiento oscilatorio forzado, para dos condiciones iniciales distintas; al cabo de cierto tiempo, el régimen permanente es el mismo.*

Para una excitación periódica de tipo armónico, el régimen permanente tiene la misma frecuencia que la excitación, y un desfase  $\delta$  respecto a ella, dado por la expresión (3.21). De ésta se desprende que si no existe amortiguamiento, el desfase es también nulo. El desfase también depende de la relación entre  $\Omega$  y  $\omega_0$ , de forma que, por ejemplo, para  $\Omega = \omega_0$ , resulta  $\delta = \pm 1$  y por tanto  $\delta = \pm\pi/2$ .

### 3.5. Amplificación dinámica y resonancia

Una carga aplicada de forma dinámica puede producir un efecto considerablemente mayor que aplicada de forma estática, es decir, suficientemente lenta para que no se llegue a producir oscilación. Este efecto se denomina *amplificación dinámica*.

<sup>4</sup>La elección de solución particular no es única, siendo por tanto también posible escoger ésta de forma que una parte de ella sí dependa del estado inicial; sin embargo, en el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , esta parte de la solución particular también se verá reducida a cero.

Un ejemplo sencillo es la aplicación de una carga constante  $P_0$ , sobre un sistema formado por una masa  $m$  y un resorte  $k$ , sin amortiguamiento. Si se aplica de forma estática (mediante una rampa suficientemente lenta), el desplazamiento sería  $x_{\text{est}} = P_0/k$ .

Si se aplica de forma súbita, como un escalón de carga, suponiendo que inicialmente el resorte está en su posición natural y sin velocidad, la respuesta es

$$x_{\text{din}}(t) = \frac{P_0}{k} - \frac{P_0}{k} \cos(\omega_0 t).$$

El desplazamiento máximo se produce para  $\omega_0 t = \pi$  y vale  $x_{\text{din,max}} = 2P_0/k$ . Por tanto, la amplificación dinámica de la carga es

$$\text{f.ampl.} = \frac{x_{\text{din,max}}}{x_{\text{est}}} = 2,$$

es decir, el efecto dinámico es el doble del estático.

Supongamos ahora que se aplica la misma carga, pero modulada por una función armónica,  $P_0 \sin(\Omega t)$ . Supondremos que existe un pequeño amortiguamiento inevitable, por lo que el movimiento llega a un régimen permanente, pero que sin embargo se puede despreciar su efecto en la ecuación de dicho régimen, al ser su valor muy pequeño. Decimos, abusando de la expresión, que es un caso «sin amortiguamiento,» aunque queda claro implícitamente que algún amortiguamiento, por pequeño que sea, ha debido existir para que desaparezcan los términos transitorios. En el régimen permanente la respuesta es un movimiento igualmente armónico, cuya amplitud se puede deducir de la ecuación (3.22):

$$x_{\text{din,max}} = A(\Omega) = \frac{P_0}{k - m\Omega^2}.$$

La amplificación dinámica es

$$\text{f.ampl.} = \frac{x_{\text{din,max}}}{x_{\text{est}}} = \frac{1}{1 - \Omega^2/\omega_0^2}. \quad (3.24)$$

Si  $\Omega = 0$ , el factor de amplificación es la unidad, como debería ser en buena lógica, al tratarse de una carga estática. Si  $\Omega \rightarrow \infty$ , el factor de amplificación tiende a cero, lo que quiere decir que la excitación es demasiado rápida y el resorte no tiene tiempo para deformarse, la masa no llegaría a moverse. Por último, si  $\Omega \rightarrow \omega_0$ , el factor de amplificación tiende a  $\infty$ .

### 3.22 Capítulo 3. OSCILACIONES LINEALES CON 1 GRADO DE LIBERTAD

Se denomina *resonancia* al fenómeno por el cual la amplitud de la oscilación se hace máxima para determinadas condiciones de la excitación<sup>5</sup>.

Como se ha visto en el ejemplo anterior, la amplitud puede tender a  $\infty$  bajo determinadas circunstancias (ecuación (3.24)). En este caso la resonancia conduciría a un fallo completo del sistema, por una amplitud de movimiento excesiva.

En un caso general con amortiguamiento, la expresión (3.22) proporciona la amplitud ( $A$ ) del régimen permanente. Utilizando dicha ecuación, es posible dibujar la gráfica de la amplitud obtenida para un valor dado del amortiguamiento ( $\xi$ ), en función de la frecuencia de excitación ( $\Omega$ ) (figura 3.11). Se observa que para amortiguamiento  $\xi \neq 0$  la curva muestra en general un máximo de la amplitud, mientras que para  $\xi = 0$  no existe máximo, tendiendo la amplitud resonante a  $\infty$ .

Desde un punto de vista de cálculo, la frecuencia de resonancia se obtiene hallando el máximo de (3.22):

$$A = \frac{q/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}};$$

puesto que el numerador es constante, se busca el mínimo del radicando en el denominador,

$$\frac{d}{d\Omega} [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2] = 2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 8\xi^2\omega_0^2\Omega = 0,$$

obteniéndose finalmente:

$$\boxed{\Omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}}. \quad (3.25)$$

La amplitud resonante se obtiene sustituyendo el valor de  $\Omega_r$  en la expresión (3.22) de  $A$ :

$$\boxed{A_r = \frac{q}{c\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{q}{c\omega} = \frac{q/c}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}}}. \quad (3.26)$$

<sup>5</sup>Estrictamente hablando, la definición hecha corresponde a la *resonancia en amplitud*. Cabe definir también la *resonancia en energía cinética*, como aquella que hace máximo  $T = m\dot{x}^2/2$ , pudiendo demostrarse que corresponde a una frecuencia de excitación igual a  $\omega_0$  (frecuencia propia sin amortiguamiento). Si existe amortiguamiento, esta frecuencia de resonancia es ligeramente distinta a la obtenida en (3.25). Al ser la energía potencial proporcional al cuadrado de la elongación, la resonancia en energía potencial equivale a la resonancia en amplitud.

Conviene observar que las expresiones (3.4), (3.13) y (3.25) definen tres frecuencias características del sistema, que ordenadas de mayor a menor quedan:

$$\omega_0 > \overbrace{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}^{\omega} > \overbrace{\omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}}^{\Omega_r}.$$

Aunque sus valores sean distintos para un caso con amortiguamiento, en los casos prácticos reales, el amortiguamiento  $\xi$  suele ser pequeño y las tres frecuencias tienen valores muy próximos. Para los valores usuales del amortiguamiento en vibraciones estructurales (del orden de 1%-2% o incluso menores), la resonancia se produce muy próxima a  $\omega_0$ , como se aprecia en la figura 3.11. Por ello, en la práctica ingenieril a menudo se confunden las

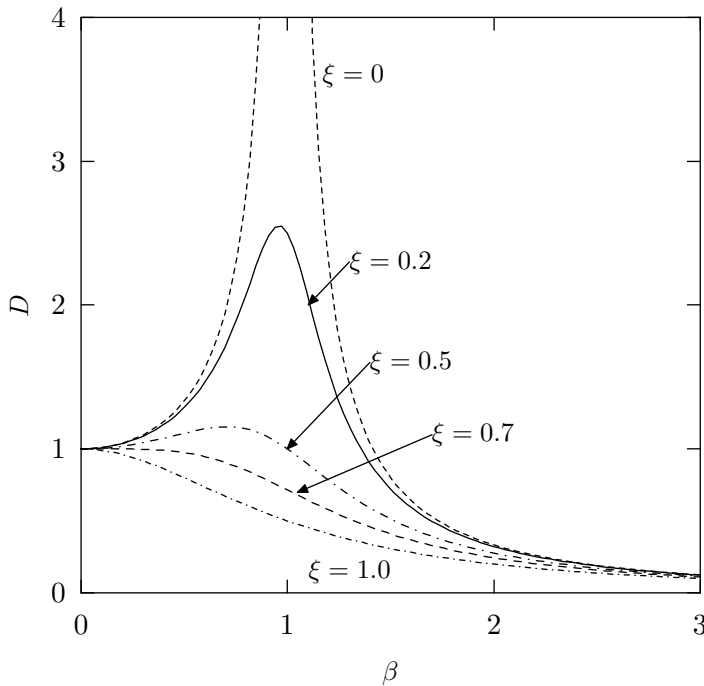


Figura 3.11: Amplitud de oscilación para una excitación armónica, en función de la frecuencia de excitación  $\Omega$ , para diversos valores del amortiguamiento  $\xi$ . Los ejes representan magnitudes adimensionales, en abscisas  $\beta = \Omega/\omega_0$ , y en ordenadas  $D = A/(q/k)$  (factor de amplificación dinámica).

dos frecuencias  $\omega_0$  y  $\Omega_r$ . La diferencia de frecuencias es mayor para valores altos del amortiguamiento  $\xi$ , aunque entonces también ocurre que la

### 3.24 Capítulo 3. OSCILACIONES LINEALES CON 1 GRADO DE LIBERTAD

resonancia tiene menor importancia. Si  $\xi^2 \geq 1/2$  ( $\xi \geq 0,71$ ) no se llega a producir máximo de  $A$ , por lo que no hay resonancia. En este caso la función  $A(\Omega)$  es monótona decreciente y no tiene máximo local, como puede apreciarse en la figura 3.11.

EJEMPLO 3.2: Como continuación del ejemplo 3.1, resolver las siguientes cuestiones adicionales:

- Suponiendo ahora que a la base se le comunica un movimiento impuesto armónico, de amplitud 0,05 m y frecuencia 2 Hz, obtener el movimiento tanto durante el régimen transitorio como en el régimen permanente. Como condiciones iniciales, se admitirá que parte del reposo en la posición de equilibrio.
- Obtener la frecuencia de la excitación anterior que produce la máxima amplitud del movimiento, el valor de dicha amplitud máxima y el factor de amplificación.

*Solución.*

a.— Sea  $x(t)$  el movimiento de elongación del resorte, relativo a la base, y  $x_b(t)$  el movimiento impuesto de la base. El movimiento absoluto es por tanto  $X(t) = x(t) + x_b(t)$ . La ecuación del movimiento es:

$$m\ddot{X} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_b.$$

Teniendo en cuenta  $x_b(t) = B \text{sen}(\Omega t)$ , resulta

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mB\Omega^2 \text{sen}(\Omega t). \quad (3.27)$$

La solución general consta de la solución general de la homogénea más una solución particular de la completa,  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ . Suponiendo una solución particular del tipo

$$x_p(t) = C \text{sen}(\Omega t + \delta), \quad (3.28)$$

y obligando a que  $x(t)$  cumpla la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta &= \arctan\left(\frac{c\Omega}{m\Omega^2 - k}\right) = -0,125031 \text{ rad}; \\ C &= -\frac{mB\Omega^2}{\sqrt{c^2\Omega^2 + (m\Omega^2 - k)^2}} = -0,0850728 \text{ m}. \end{aligned} \quad (3.29)$$



(Estos parámetros podrían haberse deducido también directamente de aplicar las expresiones (3.20) y (3.22), con  $q = mB\Omega^2$ .) La solución completa de la ecuación es

$$x(t) = C \operatorname{sen}(\Omega t + \delta) + A e^{-\xi \omega_0 t} \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0). \quad (3.30)$$

Obligando a que cumpla las condiciones iniciales ( $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ ), se obtienen las constantes  $A$  y  $\phi_0$ :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \arctan\left(\frac{2\xi\omega\omega_0}{\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\xi^2\omega_0^2}\right) = -0,157492 \text{ rad}; \\ A &= -\frac{C\Omega}{\omega} = 0,0676418 \text{ m}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Con estos datos y los parámetros  $\xi, \omega_0$  calculados anteriormente (ecuaciones (3.16) y (3.17)) queda determinada la ecuación del movimiento (3.30):

$$\begin{aligned} x(t) &= -0,0850728 \operatorname{sen}(4\pi t - 0,125031) \\ &\quad + 0,0676418 e^{-0,4605170 t} \operatorname{sen}(15,80468 t - 0,157492). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Esta solución es la «completa», que corresponde al llamado *régimen transitorio*. Pasado suficiente tiempo, el segundo sumando en esta expresión (la solución de la homogénea) desaparece, debido a la exponencial decreciente, y queda el denominado *régimen permanente*, que se identifica con la solución particular (3.28). En la figura 3.12 pueden observarse estas dos soluciones. Refiriéndose al régimen permanente, el factor de amplificación dinámica (respecto a la amplitud del movimiento impuesto en la base) es  $FA = 0,0850728/0,05 = 1,701457$ .

b.— Para hallar el máximo de la amplitud en régimen permanente, basta con derivar la expresión de  $C$  en 3.29<sub>2</sub> e igualar a cero. Desarrollando las operaciones se obtiene la frecuencia de resonancia:

$$\Omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} = 15,82482 \text{ rad/s}. \quad (3.33)$$

Obsérvese que para este caso en que la excitación es por movimiento armónico en la base la frecuencia de resonancia no coincide con la obtenida anteriormente para una fuerza armónica (3.25). El motivo es que el numerador en la expresión 3.29<sub>2</sub> también depende ahora de  $\Omega$ , y el máximo no coincide para ambos casos.

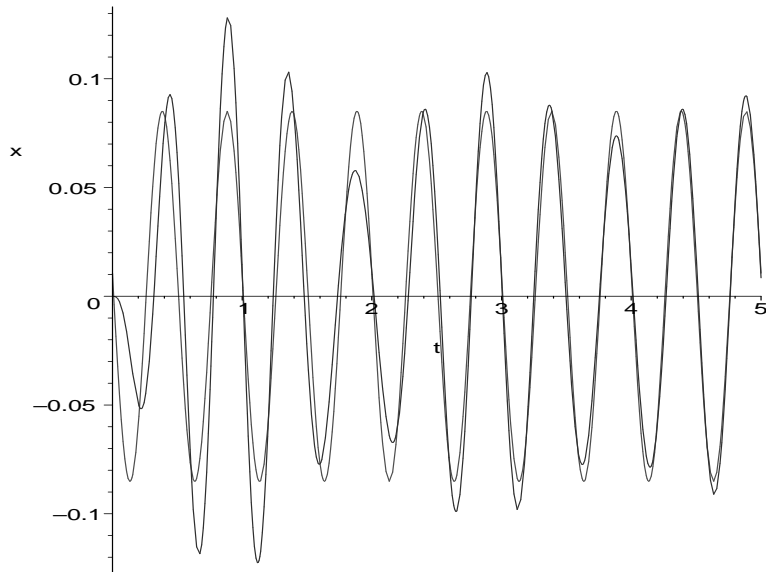


Figura 3.12: Régimen transitorio y permanente, pudiendo observarse como a medida que avanza el tiempo el movimiento se va aproximando al régimen permanente.

Sustituyendo esta frecuencia en 3.29<sub>2</sub> se calcula la amplitud máxima (resonante):

$$C = -0,858714 \text{ m.} \quad (3.34)$$

El factor de amplificación lo expresamos en este caso como cociente entre la amplitud dinámica obtenida y la amplitud de la excitación:

$$\text{FA} = \frac{0,858714}{0,05} = 17,17428.$$

En la figura 3.13 se aprecia la variación del factor de amplificación con la frecuencia  $\Omega$ , marcándose claramente el pico de resonancia.  $\square$

### 3.6. El espacio de las fases

Es posible realizar una transformación de la ecuación diferencial de segundo orden del oscilador armónico simple (3.1), en función de la variable  $x$ , a un sistema equivalente de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, con dos variables:  $x$  y  $p \stackrel{\text{def}}{=} m\dot{x}$  (cantidad de movimiento o momento

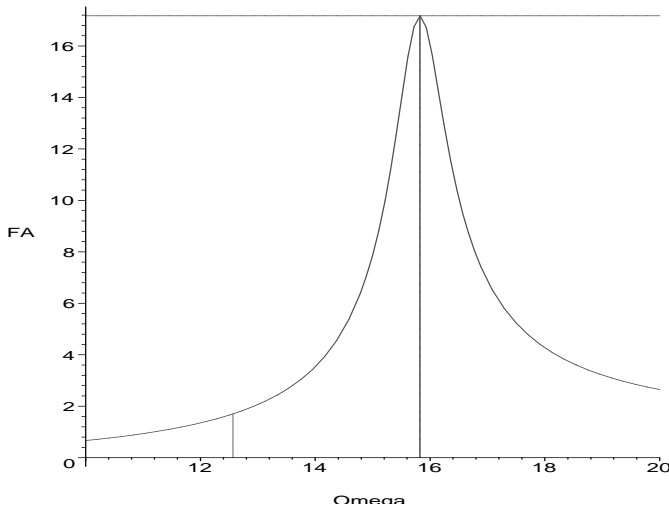


Figura 3.13: *Factor de amplificación dinámica en función de la frecuencia de excitación de la base. Se marcan con líneas verticales la situación para la excitación definida en el primer apartado y la situación de resonancia.*

conjugado a  $x$ ). Este cambio origina las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{p} + kx = 0 \\ p = m\dot{x} \end{cases} \quad (3.35)$$

El espacio de las fases permite una descripción distinta del problema a la realizada en los apartados anteriores, en función de las variables  $(x, p)$ . Este tipo de variables son las que se emplean en la dinámica analítica de Hamilton (capítulo 12). Tiene especial interés cuando se desea estudiar la dinámica del sistema de forma geométrica o cualitativa, por la dificultad o incluso imposibilidad de resolverlo de manera cuantitativa.

Para obtener la trayectoria del sistema en el espacio de las fases, observamos:

$$\dot{p} = \frac{dp}{dx} \dot{x} = \frac{dp}{dx} \frac{p}{m};$$

sustituyendo en (3.35<sub>1</sub>):

$$\frac{dp}{dx} \frac{p}{m} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{m} dp + kx dx = 0.$$

Integrando esta ecuación de variables separadas se obtiene

$$\boxed{\frac{1}{2m} p^2 + \frac{k}{2} x^2 = E,} \quad (3.36)$$

donde la constante de integración  $E$  es precisamente la energía total del sistema,  $m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$ , que se mantiene constante e igual a su valor inicial como ya sabemos (apartado 3.1.2).

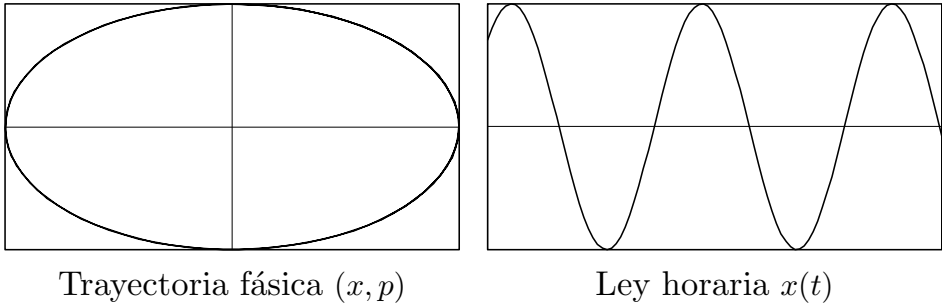


Figura 3.14: *Oscilador sin amortiguamiento; trayectoria elíptica en el espacio fásico, correspondiente a un movimiento con amplitud constante.*

La trayectoria definida por (3.36) es una elipse con semiejes  $\sqrt{2E/k}$  y  $\sqrt{2Em}$  (figura 3.14). El punto por donde se empiece a recorrer la elipse depende de las condiciones iniciales, siendo la trayectoria siempre la misma elipse. El tamaño depende de la energía,  $E$ : las órbitas más energéticas corresponden a elipses de mayor tamaño.

Si el sistema tiene amortiguamiento, la energía  $E$  disminuye a lo largo del movimiento. La trayectoria fásica del sistema será pues una elipse cuyo tamaño va disminuyendo a lo largo del tiempo; es decir, se recorre una espiral elíptica que termina en el origen, correspondiente al estado de reposo con elongación nula del resorte, cuando el movimiento se ha amortiguado completamente. Decimos en este caso que el origen es un *atractor* del sistema, puesto que la trayectoria fásica tiende irremediablemente a él.

Por último, una oscilación forzada con excitación armónica acaba oscilando en un régimen permanente, también armónico, que corresponde a otra elipse en el espacio de las fases. Se dice que el sistema tiene un *ciclo límite*, al que tiende siempre independientemente de las condiciones iniciales.

En casos más generales de sistemas dinámicos complejos, pueden existir varios atractores o ciclos límite, cada uno con su correspondiente «cuenca de atracción». En los sistemas caóticos, a pesar del desorden e impredecibilidad que su nombre indica, a menudo se pueden establecer también atractores o ciclos límite. Sin embargo, ocurrirá que pequeñísimas perturbaciones pueden hacer que el sistema salte de uno a otro, de manera impredecible. En este último caso no es útil estudiar de forma determinista el sistema, por la extrema sensibilidad al cambio de cualquier parámetro o condición inicial.

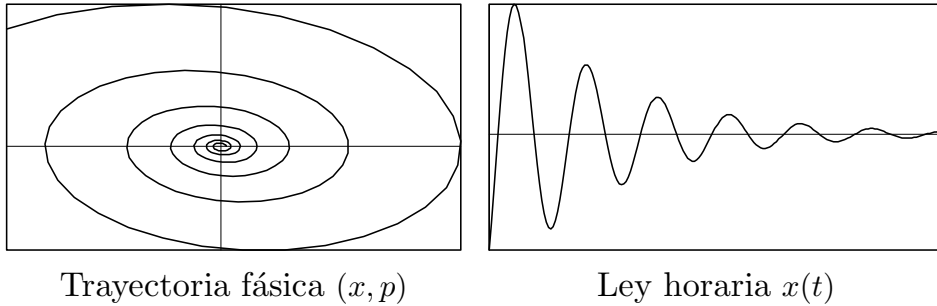


Figura 3.15: *Oscilador con amortiguamiento; trayectoria en espiral elíptica correspondiente a amplitud decreciente, con atractor en el origen.*

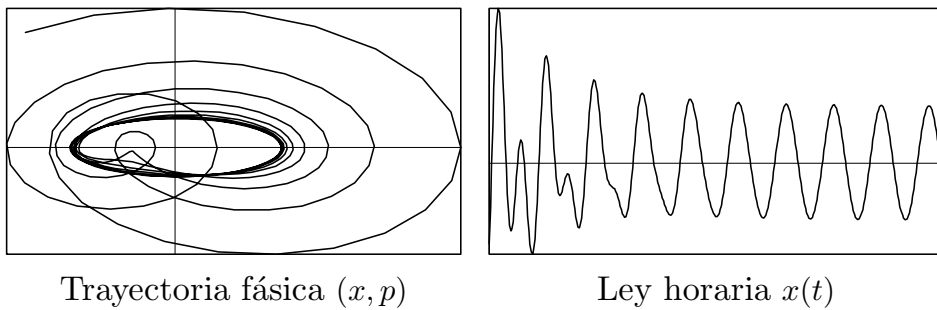


Figura 3.16: *Oscilador forzado con amortiguamiento; la trayectoria fásica muestra claramente un ciclo límite.*

Sin embargo, el estudio de sus trayectorias en el espacio de las fases sí puede proporcionar un medio útil para describir cualitativamente su respuesta.

En sistemas complejos con comportamiento caótico, la representación gráfica de las distintas trayectorias dinámicas y cuencas de atracción da lugar en ocasiones a figuras de tipo *fractal*, con una estructura compleja y que se repite a cualquier escala de observación.

## 3.7. Análisis mediante series de Fourier

El desarrollo en serie de Fourier es una herramienta importante que permite obtener la solución de un oscilador forzado sometido a una excitación cualquiera, sin necesidad de que ésta se ajuste a las funciones típicas estudiadas en el apartado (3.4). Su aplicabilidad radica en la linealidad de la ecuación.

### 3.7.1. Carácter lineal de las ecuaciones

Supongamos un oscilador con amortiguamiento, sometido a una fuerza externa  $F(t)$ . La ecuación (3.19) se puede escribir como:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f(t), \quad (3.37)$$

siendo  $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(t)/m$ , habiendo dividido ambos términos de la ecuación por  $m$ . Otra manera de expresar esta ecuación es mediante la definición de un operador  $L(\cdot)$ , que actúa sobre la función  $x(t)$ , definido de la siguiente manera:

$$L(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left[ \frac{d^2}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right] (x) = \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x. \quad (3.38)$$

El operador  $L(\cdot)$  es una aplicación definida en el espacio de las funciones  $C^2$ . La imagen de una función  $x(t)$  mediante  $L(\cdot)$  es otra función, definida a partir de (3.38). De esta manera, la ecuación dinámica (3.37) se puede expresar en forma compacta como

$$L(x) = f.$$

Es inmediato comprobar el carácter lineal de  $L(\cdot)$ : para dos funciones cualesquiera  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y dos números arbitrarios  $\alpha$ ,  $\beta \in \mathbf{R}$ ,

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L(x_1) + \beta L(x_2).$$

Por tanto, conocidas las soluciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  para dos funciones de fuerza dadas  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , la solución de la combinación lineal  $f = \alpha f_1 + \beta f_2$  es la combinación lineal de las soluciones respectivas:

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L(x_1) + \beta L(x_2) = \alpha f_1 + \beta f_2.$$

Esta propiedad se puede extender a una serie con  $N$  sumandos,  $f_n(t)$ , de los que suponemos conocidas las soluciones individuales,  $x_n(t)$ :

$$L\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t)\right) = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n(t) = f(t)$$

Por lo que la solución de  $f = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n$  es la suma de las soluciones de cada término,  $\sum_{n=1}^N \alpha_n x_n$ .

### 3.7.2. Análisis de series de armónicos

Supongamos ahora que el término de fuerza externa,  $f(t)$ , se puede expresar mediante una serie de armónicos, es decir, como suma de senos y cosenos con distintas frecuencias y afectados de distintas amplitudes. Conocemos ya por lo estudiado en este capítulo la solución a cada uno de los términos armónicos individuales. Como vimos, esta solución consta de un término que sólo interviene durante el régimen transitorio (solución general de la homogénea) y de otro que caracteriza el régimen estacionario o permanente (solución particular de la completa). En el desarrollo que sigue estudiaremos tan sólo el régimen permanente, admitiendo la hipótesis por otra parte bastante usual, de que el transitorio sólo dura un tiempo breve y por tanto carece de importancia a nuestros efectos.

Así, si la serie que define la fuerza aplicada es:

$$f(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \cos \omega_n t,$$

la solución (régimen estacionario) para cada término de la serie es una función armónica cuya amplitud viene dada por la ecuación (3.22):

$$x_n(t) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\omega_n^2 \omega_0^2 \xi^2}} \cos(\omega_n t - \delta_n),$$

siendo el desfase el definido por (3.20):

$$\delta_n = \arctan \frac{2\omega_n \omega_0 \xi}{\omega_0^2 - \omega_n^2}.$$

Sumando todas estas soluciones obtendremos la solución global,  $x(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t)$ .

### 3.7.3. Desarrollo en serie de Fourier

El *Teorema de Fourier* afirma que cualquier función periódica  $f(t)$ , de periodo  $\tau$ , se puede desarrollar en serie de armónicos, de la forma:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sen n\omega t), \quad (3.39)$$

siendo  $\omega \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi/\tau$ .

Este teorema quedará demostrado si somos capaces de proporcionar un método para calcular los coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$  que hacen posible el desarrollo (3.39). En primer lugar, calculemos la integral

$$\int_0^{\tau} f(t) \cos m\omega t dt.$$

Al estar  $f(t)$  definida mediante la serie (3.39) y suponiendo los requisitos necesarios de convergencia de ésta, la integral anterior se puede descomponer en la suma de las integrales de cada uno de los términos. Multiplicando cada uno de estos términos por  $\cos m\omega t$  e integrando, resultan entonces las siguientes integrales, según los valores de  $m$  y  $n$ :

a. si  $n \neq m$ ,

$$\begin{aligned} a_n \int_0^{\tau} \cos n\omega t \cos m\omega t dt &= \\ a_n \int_0^{\tau} \frac{1}{2} [\cos(n+m)\omega t + \cos(n-m)\omega t] dt &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n \int_0^{\tau} \sen n\omega t \cos m\omega t dt &= \\ b_n \int_0^{\tau} \frac{1}{2} [\sen(n+m)\omega t + \sen(n-m)\omega t] dt &= 0 \end{aligned}$$

b. si  $n = m$ ,

$$\begin{aligned} a_m \int_0^{\tau} \cos^2 m\omega t dt &= a_m \int_0^{\tau} \frac{1 + \cos 2m\omega t}{2} dt = a_m \frac{\tau}{2} \quad (3.40) \\ b_m \int_0^{\tau} \sen m\omega t \cos m\omega t dt &= b_m \int_0^{\tau} \frac{1}{2} \sen 2m\omega t dt = 0 \end{aligned}$$



Vemos pues que el único término que da una contribución no nula es el correspondiente a  $a_m \cos m\omega t$ . Análogamente, multiplicando (3.39) por  $\sin m\omega t$  e integrando, la única integral no nula de la serie resulta ser:

$$\int_0^\tau f(t) \sin m\omega t \, dt = b_m \int_0^\tau \sin^2 m\omega t \, dt = b_m \frac{\tau}{2}. \quad (3.41)$$

Por último, la integral directa de  $f(t)$  es:

$$\int_0^\tau f(t) \, dt = \int_0^\tau \frac{1}{2} a_0 \, dt = a_0 \frac{\tau}{2}. \quad (3.42)$$

De (3.40), (3.41) y (3.42) deducimos los coeficientes de (3.39), que son:

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \cos n\omega t \, dt \quad (3.43)$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \sin n\omega t \, dt \quad (3.44)$$

$$a_0 = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \, dt \quad (3.45)$$

Al tener un método para calcular estos coeficientes para cualquier valor de  $n$ , queda demostrado el teorema de Fourier y definido el desarrollo en serie.

El desarrollo en serie de Fourier tiene aplicaciones importantísimas en la ingeniería, ya que convierte el análisis de una función periódica cualquiera en los análisis de casos elementales de términos armónicos, cuya solución nos es conocida. La función  $f(t)$  no tiene limitación, salvo que sea periódica. Puede estar definida mediante una función analítica cualquiera, por puntos, etc. En la práctica, bastará tomar tan sólo un cierto número de términos del desarrollo, para obtener la precisión suficiente, truncando el resto de la serie.

Es posible extender el método del desarrollo en serie de Fourier a una función cualquiera, aunque no sea periódica. Para ello se emplea el truco de construir una nueva función periódica, con un periodo suficientemente largo que abarca el intervalo de tiempo de interés de la función no periódica. En esta nueva función se añade a la función original, al cabo del intervalo de tiempo de interés, un intervalo de silencio, hasta un tiempo suficientemente grande,  $\tau \rightarrow \infty$ . Al cabo de un tiempo  $\tau$ , nuestra función se volvería a repetir. Sin embargo, como sólo estamos interesados en la solución para  $t < \tau$ , esto no supone ningún inconveniente.

En este último caso, si  $\tau \rightarrow \infty$ , los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  deducidos de (3.43, 3.44) se convierten en infinitésimos, puesto que  $\tau$  está en el denominador. La suma del desarrollo en serie de Fourier se transforma (en el límite)

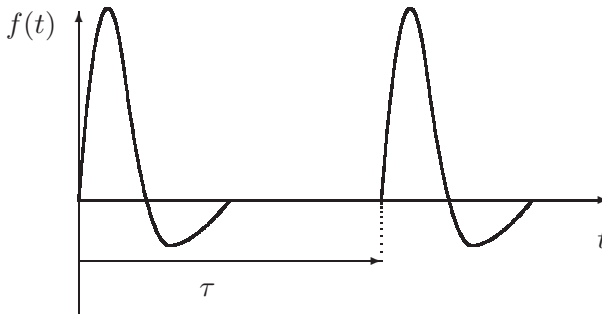


Figura 3.17: *Desarrollo en serie de Fourier de funciones no periódicas*

en una integral, denominada *transformada de Fourier*. Esta integral tiene exactamente la forma inversa de las integrales para los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  expresadas en las ecuaciones (3.43, 3.44), términos que están relacionados con cada valor de la frecuencia,  $\omega_n = n\omega$ . Este conjunto de frecuencias discreto, al aumentar  $\tau$  tiende a una distribución continua. La transformada de Fourier se puede interpretar entonces como un cambio de formulación, pasando a expresar el problema inicialmente formulado en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. No desarrollaremos más este tema, para no alargar innecesariamente este capítulo, pudiendo consultarse en el libro de Fernández Palacios o en otros textos más específicos de vibraciones<sup>6</sup>

## 3.8. Análisis de transitorios mediante la función de Green

El desarrollo en serie de Fourier proporciona la solución del régimen estacionario, ya que en su deducción despreciamos deliberadamente el efecto de los transitorios. Para los casos en los que sea necesario obtener el régimen transitorio se puede aplicar el método de la función de Green, que desarrollamos a continuación.

### 3.8.1. Respuesta a una función impulso

Partimos, como antes, de la ecuación general del movimiento oscilatorio forzado (3.37),

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f(t),$$

cuya solución general es  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ .

<sup>6</sup>Se recomiendan: R.W. Clough y J. Penzien: *Dynamics of Structures*, McGraw Hill, New York, 1975; L. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*, McGraw Hill, New York, 1986.

Suponemos que este sistema está sometido a un impulso instantáneo en el instante  $t = \theta$ , un pico de fuerza que se puede suponer de duración prácticamente nula, pero que por su intensidad tiene un efecto apreciable sobre el sistema. Matemáticamente, una función impulso se representa mediante la función  $\delta$  de Dirac, definida como:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \forall t \neq 0 \\ \delta(0) \rightarrow \infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

Una manera de entender el significado de la función singular  $\delta(t)$  es considerarla como el límite de una función continua como la representada en la figura 3.18, con forma de triángulo isósceles de base  $2\epsilon$  y altura  $1/\epsilon$ , cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Así, un impulso de valor  $I$  en  $t = \theta$  se representa por  $f(t) = I \delta(t - \theta)$ .

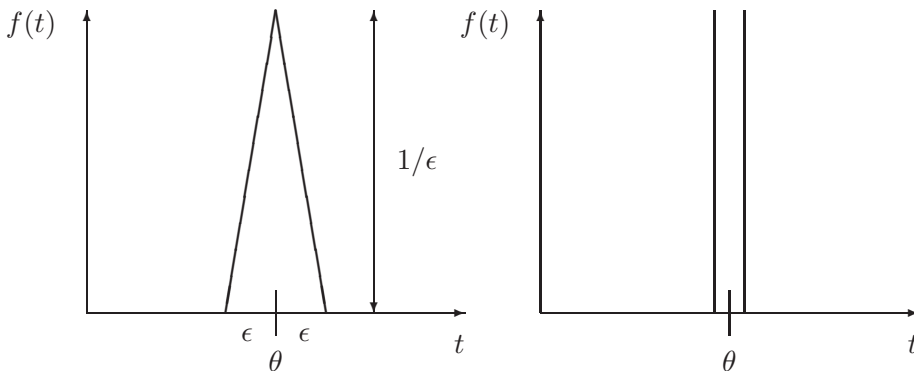


Figura 3.18: Impulso, representado por la función delta de Dirac.

Integrando esta fuerza,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} I \delta(t - \theta) dt = I$$

Puesto que  $f(t) = F(t)/m$ ,  $I$  será el impulso por unidad de masa, o sea, el incremento de velocidad que adquiere  $m$  por virtud de la impulsión. Podemos entender ésta por lo tanto como una causa instantánea que modifica el estado de velocidad en  $t = \theta$ , quedando después el sistema en vibración libre, ya que  $f(t)$  desaparece.

La solución a un impulso elemental es pues la respuesta en vibraciones libres con las condiciones iniciales  $x(\theta) = 0$ ;  $\dot{x}(\theta) = I$ . La solución para  $t > \theta$  es la de la homogénea:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} (A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t), \quad \text{para } t > \theta,$$

siendo  $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ .

Sustituyendo en la ecuación del movimiento las dos condiciones iniciales, obtenemos las constantes  $A$  y  $B$ :

$$A = -\frac{I e^{-\xi\omega_0\theta}}{\omega} \text{sen } \omega\theta,$$

$$B = -\frac{I e^{-\xi\omega_0\theta}}{\omega} \text{cos } \omega\theta.$$

Quedando, finalmente, la solución para la respuesta a un impulso elemental como:

$$x(t) = \frac{I}{\omega} e^{-\xi\omega_0(t-\theta)} \text{sen } \omega(t - \theta), \quad \text{para } t > \theta. \quad (3.46)$$

### 3.8.2. Análisis de transitorios para una excitación arbitraria

Suponemos ahora que sobre el oscilador actúa una fuerza  $F(t)$  cualquiera, no impulsiva. Podremos descomponer, dividiendo el tiempo en intervalos infinitesimales, esta fuerza como una serie de impulsos elementales, correspondientes a los rectángulos elementales en el diagrama de  $F(t)$  (figura 3.19):

$$dI = \frac{F(\theta)}{m} d\theta.$$

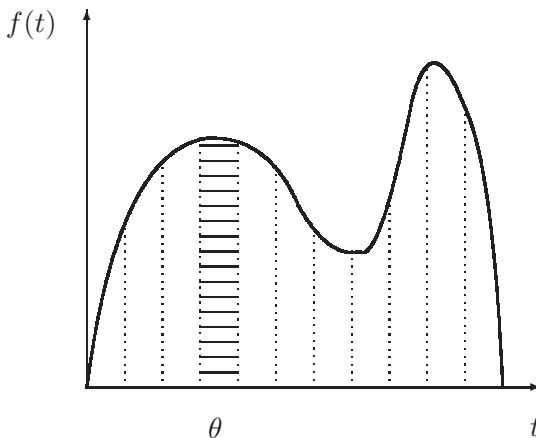


Figura 3.19: *Descomposición de  $f(t)$  en impulsos elementales*

Por la linealidad del operador, podremos obtener la respuesta global en un instante  $t$  dado, como la suma o integral de las respuestas a todos estos

impulsos elementales  $dI$  para  $\theta < t$ :

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{F(\theta)}{m\omega} e^{-\xi\omega_0(t-\theta)} \operatorname{sen} \omega(t-\theta) d\theta.$$

Se define la *función de Green*  $G(t, \theta)$  como:

$$G(t, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m\omega} e^{-\xi\omega_0(t-\theta)} \operatorname{sen} \omega(t-\theta), \quad \text{para } t > \theta.$$

En función de  $G(t, \theta)$  la integral anterior queda por tanto:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t F(\theta) G(t, \theta) d\theta.$$

Esta integral se llama también *integral de Duhamel*. En la práctica, las integrales se evaluarán numéricamente, salvo casos particulares simples que admitan resolución analítica.

Resumiendo, el método de análisis mediante la función de Green:

- Proporciona la respuesta transitoria completa, no limitándose al régimen permanente.
- Incluye automáticamente la información sobre las condiciones iniciales.
- Sirve para funciones de carga arbitrarias.

### 3.9. Métodos numéricos para integración directa

En la práctica la resolución de problemas dinámicos reales se realiza, salvo casos particulares simplificados, mediante cálculo numérico en ordenadores digitales. Los métodos anteriormente expuestos son susceptibles de tratamiento numérico a través de las transformadas discretas de Fourier, o de la evaluación numérica de las integrales de convolución de Duhamel (función de Green).

Otra técnica interesante que permite resolver numerosos problemas de índole muy general es la utilización de métodos numéricos para la *integración directa* de las ecuaciones de la dinámica. Este método tiene la ventaja sobre los anteriormente expuestos que no necesita presuponer la linealidad del oscilador, por lo cual es posible aplicarlo también a otros casos más generales en que los osciladores no sean lineales. Además, de forma automática se incluyen todos los términos, tanto transitorios como permanentes.

Aunque existen numerosos métodos de integración paso a paso en el tiempo, expondremos de forma resumida sólo dos: el método de Euler y el método de Runge-Kutta de 4.<sup>o</sup> orden. Ambos son métodos de un paso, sencillos de formular, y se encuentran entre los más usados en la práctica. Para una exposición más detallada de estos y de otros métodos de integración de ecuaciones diferenciales, se recomienda consultar otros textos más especializados<sup>7</sup>.

En ambos casos se realiza una *integración paso a paso*, para lo cual supondremos que el tiempo se ha discretizado en intervalos pequeños  $\Delta t$ , definiendo instantes discretos  $t_n$ :

$$t_0, \quad t_1 = \Delta t, \quad t_2 = 2\Delta t, \quad \dots, \quad t_n = n\Delta t, \quad \dots, \quad t_{fin}$$

La ecuación a resolver será, como siempre:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f(t). \quad (3.47)$$

Suponemos conocida la solución en el instante  $t_n$ :  $x_n = x(t_n)$ ,  $\dot{x}_n = \dot{x}(t_n)$ . Se trata de obtener un procedimiento para avanzar la solución al instante  $t_{n+1}$ :  $x_{n+1}$ ,  $\dot{x}_{n+1}$ .

### 3.9.1. Método de Euler

Suponemos conocidos en un instante dado  $x_n$  y  $\dot{x}_n$ . A partir de la ecuación (3.47) se despeja  $\ddot{x}_n$ :

$$\ddot{x}_n = f(t_n) - 2\xi\omega_0\dot{x}_n - \omega_0^2x_n.$$

Los valores en  $n + 1$  se obtienen mediante un desarrollo en serie de Taylor truncado a partir del segundo término:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + \ddot{x}_n\Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + \dot{x}_n\Delta t \end{aligned}$$

Así, procederíamos a partir del estado inicial conocido  $(x_0, \dot{x}_0)$  para obtener primeramente  $(x_1, \dot{x}_1)$ , luego  $(x_2, \dot{x}_2)$ , y así sucesivamente hasta el instante  $t_{fin}$ .

El método de Euler es muy sencillo de formular y de operar, siendo los algoritmos evaluables de manera explícita. Admite fácilmente la extensión al caso en que los coeficientes de la ecuación dependen del tiempo, o cuando la ecuación es no lineal.

---

<sup>7</sup>Véase, por ejemplo, W.E. Boyce y R.C. DiPrima: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, (5.<sup>a</sup> ed.), Wiley, 1992, o a nivel más avanzado, C.W. Gear: *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, 1971.

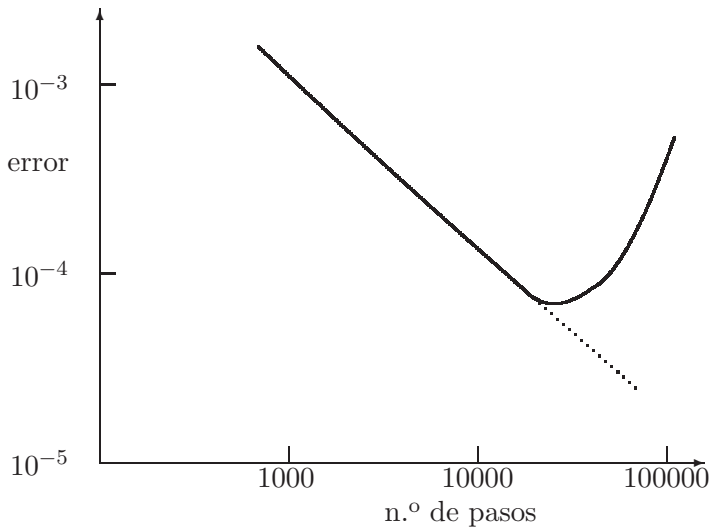


Figura 3.20:  
 Error obtenido  
 en la solución  
 numérica de la  
 ecuación  $\dot{x} = x$   
 mediante el  
 método de  
 Euler, para  
 $t \in [0, 1]$ ,  
 con  $x_0 = 1$ .  
 Precisión de  
 cálculo: 32  
 bits.

El error de truncamiento local (el cometido para la solución de  $x$  en cada paso) es del orden  $O(\Delta t^2)$ . Por lo tanto, disminuyendo el tamaño del paso  $\Delta t$  suficientemente, se podrá llegar a reducir el error de truncamiento local tanto como se desee. Por ejemplo, al dividir  $\Delta t$  por 2, el error de truncamiento local quedará dividido por cuatro. Sin embargo, para el cómputo de la solución global, necesitaremos el doble de intervalos para alcanzar el mismo valor del tiempo final, por lo que si se adopta como cota del error la suma absoluta de los errores de truncamiento en cada intervalo, el error global final será la mitad del obtenido anteriormente.

Por tanto, se dice que el método de Euler tiene convergencia de primer orden o lineal: el error global es de orden  $O(\Delta t)$ , por lo que disminuye tanto como se desee al reducir  $\Delta t$ , de manera lineal.

Sin embargo, en la práctica hay que considerar otra fuente de error además de la puramente algorítmica: los errores de redondeo debido a la aritmética con precisión limitada. Esto es inevitable, especialmente en los ordenadores digitales, en que la computación se hace con un número fijo de dígitos. Cuanto más subdivisiones del tiempo se realicen, mayor es este error acumulado. Por este motivo, la convergencia lineal a menudo resulta demasiado débil: al realizar gran cantidad de operaciones, puede llegar un momento en el que los errores de redondeo predominen y la solución no converja con la precisión requerida (3.20).

Debido a su débil convergencia, es aconsejable bastante prudencia antes de emplear el método de Euler, comprobando en cada caso que se obtiene un nivel de error aceptable.

### 3.9.2. Método de Runge-Kutta

Se trata de un método más preciso que el de Euler, aunque también más costoso de formular y, sobre todo, de operar. Para exponerlo transformaremos en primer lugar ecuación dinámica de segundo orden en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} u &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}, \\ \dot{u} &= f(t) - 2\xi\omega_0 u - \omega_0^2 x. \end{aligned}$$

Para emplear una notación más compacta, definimos la variable «vectorial»  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix}.$$

Con esta notación, el problema se formula como:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_2 \\ f(t) - 2\xi\omega_0 y_2 - \omega_0^2 y_1 \end{Bmatrix}$$

Para fijar ideas, con esta notación el método de Euler explicado arriba se escribiría simplemente:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \dot{\mathbf{y}}_n \Delta t.$$

El método de Runge-Kutta de cuarto orden se basa en la utilización de cuatro coeficientes ( $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$ ), que se definen como:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}(t_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k}_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}(t_n + \Delta t/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1 \Delta t/2) \\ \mathbf{k}_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}(t_n + \Delta t/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_2 \Delta t/2) \\ \mathbf{k}_4 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}(t_n + \Delta t, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3 \Delta t) \end{aligned}$$

A partir de estos coeficientes, la expresión de  $\mathbf{y}_{n+1}$  es:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4).$$

Una vez obtenido  $\mathbf{y}_{n+1}$  repetiríamos el proceso para el siguiente paso.

Con este método<sup>8</sup> se obtiene una convergencia del orden  $O(\Delta t^4)$ , razón por la cual se denomina de 4.º orden. Por tanto, es mucho más exacto que

---

<sup>8</sup>En el libro de Fernández Palacios se incluye un programa en lenguaje BASIC para el método de Runge-Kutta de 4.º orden, fácilmente adaptable a cualquier ecuación que se desee integrar, para ordenadores personales o calculadoras de bolsillo.



el método de Euler, alcanzando una precisión suficiente en la gran mayoría de los casos. También es aplicable a problemas no lineales. Sin embargo, requiere un esfuerzo mucho mayor para su cómputo, siendo necesario evaluar en cada paso los coeficientes  $k_i$ . En los casos en los que se tengan muchas variables y funciones complejas de evaluar, su coste computacional puede resultar excesivo. En cambio, para problemas con un sólo grado de libertad es muy recomendable al ser su solución en los ordenadores actuales muy rápida.

### 3.10. Problemas propuestos.

**Problema 3.1.** Un vehículo de masa  $m = 10 \text{ T}$  ( $1 \text{ T} = 10^3 \text{ kg}$ ) posee una suspensión que se puede representar como un resorte elástico de constante  $k$  interpuesto entre la masa  $m$  y el terreno. El vehículo viaja a una velocidad de  $72 \text{ km/h}$  sobre terreno ondulado, definido por la ecuación  $z = 0,01 \sin x$ , donde  $z$  es la elevación de la superficie y  $x$  la coordenada en la dirección de la marcha. Se pide:

- Supuesto alcanzado el régimen permanente, valor máximo de la rigidez  $k$  para que la aceleración máxima experimentada por el vehículo no exceda de  $1/10$  de la correspondiente al vehículo sin suspensión.
- Tomando el valor de  $k$  del apartado anterior y un amortiguamiento viscoso igual al  $1\%$  del crítico, estando el vehículo en reposo sobre una superficie plana sufre un impacto vertical que le produce una velocidad inicial de  $2 \text{ m/s}$ . Calcular la amplitud inicial de las oscilaciones producidas en el vehículo, así como el tiempo necesario para que dicha amplitud se reduzca a la mitad.

(examen final, 13/2/1991)

**Problema 3.2.** Una masa  $M$  se halla sujeta a un resorte lineal de constante  $k$ , con un amortiguamiento viscoso de constante  $c$ . El valor de  $c$  es tal que, sometido a vibraciones libres, la amplitud del movimiento se reduce a la mitad al cabo de un tiempo  $T$ . El sistema se halla sometido a una fuerza senoidal de intensidad máxima  $q$ . Se pide calcular el factor de amplificación dinámico en la resonancia. Tomar los valores numéricos  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $T = 20 \ln 2 \text{ s}$ ,  $k = 100 \text{ N/m}$ .

(NOTA: se denomina factor de amplificación dinámico al cociente entre la amplitud máxima debida a la carga senoidal y la amplitud estática para una carga  $q$  constante)

(Examen parcial, 15/6/1992)

**Problema 3.3.** Una balanza está formada por un platillo de masa  $m$ , sustentado por un resorte lineal sin amortiguamiento. Se sabe que al colocar el platillo sobre el resorte, éste sufre un descenso  $\delta$  hasta la nueva posición de equilibrio. Con la balanza en reposo, cae sobre el platillo desde una altura  $h$  una masa  $M = 3m$ , siendo el choque perfectamente plástico (coeficiente de restitución nulo). Se pide:

- a. Ecuaciones del movimiento subsiguiente.
- b. Valor mínimo de  $h$  para que a lo largo del movimiento la masa  $M$  se despegue del platillo (se debe considerar que, después del primer choque,  $M$  no queda adherida al platillo, pudiendo por tanto separarse llegado el caso).

(Examen final, 1/9/1993)

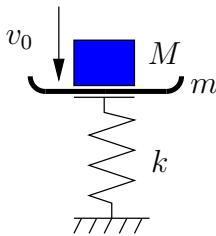


Figura 3.21: *Problema 3.3*

**Problema 3.4.** Un vehículo de masa  $m$  posee una suspensión que se puede representar mediante un resorte elástico de constante  $k$  y amortiguamiento despreciable, interpuesto entre la masa del vehículo y las ruedas (consideradas de masa despreciable), tal como se muestra en la figura 3.22. El vehículo viaja con velocidad constante  $v$  sobre un pavimento regular y horizontal en el que existe un pequeño escalón transversal de altura  $h$  y longitud  $L$ . Estudiar el movimiento vertical del vehículo, calculando el periodo propio y la amplitud de las oscilación. Se supondrá: que el tamaño de la rueda es despreciable frente al escalón, por lo que pasa instantáneamente del pavimento al escalón y viceversa; que no existen efectos relativos a percusiones; y que se puede despreciar el desplazamiento vertical que pueda sufrir la carrocería del vehículo mientras que se sube el escalón.

**Problema 3.5.** Una masa  $m$  se mueve sobre una recta horizontal con rozamiento de constante  $\mu$ , sometida a la acción de un resorte lineal de constante  $k$  y longitud natural  $l_0$ , cuyo otro extremo está anclado a la recta. Se pone en movimiento estirando el resorte una elongación inicial  $\delta_0 = x_0 - l_0$  y soltándolo con velocidad inicial nula. Se observa que la masa efectúa un movimiento de ida y otro de vuelta, parándose después de esta primera vuelta. Se pide:

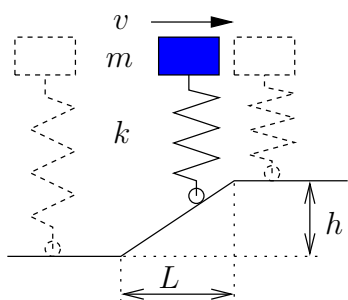


Figura 3.22: Problema 3.4

- Ecuación diferencial del movimiento, distinguiendo si fuere necesario entre las diversas fases del mismo.
- Integración de la ecuación, para obtener de forma explícita  $x(t)$ .
- Rango de valores que puede tomar  $\delta_0$  para que el movimiento sea una única ida y vuelta.
- Adoptando el valor máximo del rango anterior, calcular la energía disipada en el movimiento.

(Examen final, 13/6/2000)

**Problema 3.6.** Cuatro varillas iguales, lisas y de longitud  $2b$  cada una, están soldadas entre sí formando un cuadrado horizontal fijo de lado  $2b$ . Sobre cada una de ellas puede moverse una partícula de masa  $m$ . Cada partícula está unida a las dos situadas sobre lados contiguos, mediante sendos resortes elásticos de constante  $k$  y longitud natural despreciable. Se abandona el sistema en reposo, estando situada cada partícula a una distancia  $a_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) del centro de la varilla sobre la que debe permanecer. Se pide:

- Ecuaciones del movimiento de las partículas.
- Demostrar que al cabo de un cierto tiempo  $t$  (cuyo valor se calculará) las posiciones de las partículas determinan un cuadrado (cuyo lado  $l$  también se calculará) con independencia de los valores iniciales  $a_i$ .

(Examen final, 29/1/97)

**Problema 3.7.** Un equipo tiene un bastidor rígido de masa  $M$  sobre una fundación elástica que puede idealizarse como un resorte de constante  $k$  que permite únicamente el movimiento vertical, con un amortiguamiento del 5% del crítico. Dentro del bastidor hay un motor cuyo efecto dinámico equivale a una masa  $m$  con excentricidad  $e$ , girando a una velocidad constante  $\Omega$ . Considerando los valores numéricos  $M = 900$  kg,  $m = 100$  kg,  $e = 0,01$  m,  $k = 10^7$  N/m,  $\Omega = 2000$  r.p.m., se pide:

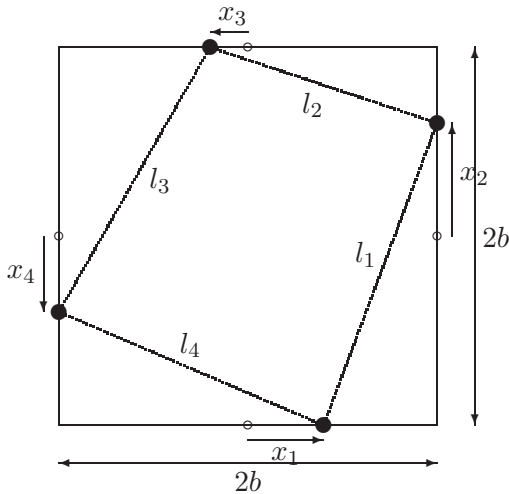


Figura 3.23: *Problema 3.6*

- Ecuación diferencial del movimiento.
  - Solución general de la ecuación anterior, tanto para el régimen transitorio como para el permanente (pasado suficiente tiempo). Se considerará que en el instante inicial la masa excéntrica está en la posición inferior con el bastidor en reposo.
  - Obtener el valor de  $\Omega$  que produce resonancia para la amplitud del movimiento, y calcular dicha amplitud resonante.
- (Examen parcial, 30/1/1999)

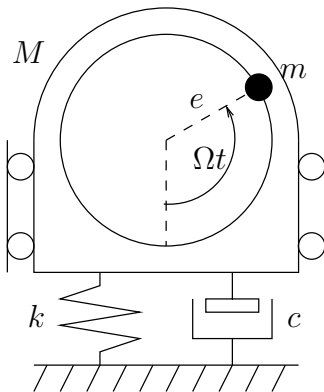


Figura 3.24: *Problema 3.7*

## Capítulo 4

# Cinemática de sistemas rígidos

Antes de comenzar con el estudio de la dinámica de sistemas, conviene profundizar en la descripción geométrica del movimiento o cinemática. Podríamos definir la cinemática como la geometría parametrizada por un parámetro «tiempo» ( $t$ ), en la que se estudia el movimiento sin atender a las causas del mismo (fuerzas). El propósito de este capítulo es desarrollar los conceptos necesarios de movimiento relativo de sistemas, y su aplicación al estudio de los campos de velocidades y aceleraciones de sólidos rígidos.

Más adelante (capítulo 8) retornaremos a la cinemática de sólidos rígidos, estudiando los movimientos de rotación finita en tres dimensiones.

### 4.1. Derivación de vectores en sistemas móviles

Supongamos un sistema de referencia  $S$  que denominaremos absoluto o «fijo», y otro  $S'$  que se mueve respecto a él, al que llamaremos sistema relativo o «móvil». Consideremos un vector  $\mathbf{p}$  dado. Este, por su naturaleza intrínseca, puede ser «medido» desde cada uno de los sistemas de referencia  $S$  y  $S'$ , dando lugar a distintas ternas de coordenadas, que estarán relacionadas entre sí mediante las relaciones de cambio de coordenadas en el espacio vectorial euclídeo  $\mathbb{R}^3$ . Estas coordenadas están asociadas a las bases de vectores,  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$  ligada a  $S$ , y  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  ligada a  $S'$ , ambas ortonormales. En un instante dado se pueden expresar coordenadas en distintos sistemas para caracterizar un vector; sin embargo, no debe haber duda de que el vector es único por su definición intrínseca.

Por el contrario, la derivada del vector  $\mathbf{p}$  será distinta, según la mida un observador ligado al sistema fijo o un observador solidario con el sis-

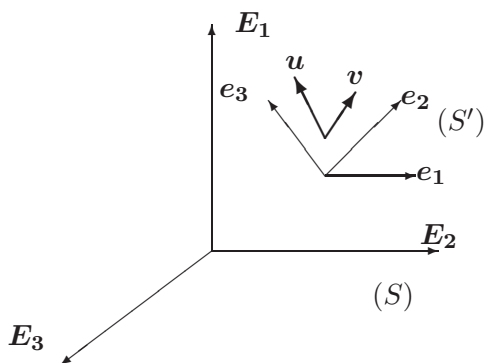


Figura 4.1: *Sistemas de referencia fijo (S) y móvil (S').*

tema móvil<sup>1</sup>. Distinguiremos ambas velocidades denominándolas derivada «absoluta» —o simplemente derivada— en el primer caso,  $\dot{\mathbf{p}} = (d\mathbf{p}/dt)_{\text{abs}}$ , y derivada «relativa» en el segundo,  $(d\mathbf{p}/dt)_{\text{rel}}$ .

Para obtener la relación entre ambas derivadas, imaginemos en primer lugar dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , constantes para el observador ligado al sistema móvil. Es decir, se trata de dos vectores que se mueven rígidamente unidos a  $S'$ , como si pudiéramos imaginarlos «pinchados» en  $S'$ . En estas condiciones, tanto su módulo como el ángulo que forman se conserva, por lo que su producto escalar será también constante:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u} \quad (4.1)$$

Conviene recalcar que, según la notación anterior,  $\dot{\mathbf{u}}$  y  $\dot{\mathbf{v}}$  representan las derivadas absolutas; las derivadas relativas al sistema móvil se anularían de manera trivial, al tratarse de vectores fijos en relación con ese sistema.

La expresión (4.1) caracteriza la derivada como una *aplicación hemisimétrica*. Antes de desarrollar más el significado y consecuencias de esta propiedad, veamos la definición y algunas características de este tipo de aplicaciones.

### Aplicaciones hemisimétricas.—

DEFINICIÓN: *Se llama aplicación hemisimétrica en un espacio vectorial Euclídeo  $\mathbb{R}^3$  a toda aplicación  $L$  del espacio vectorial en sí mismo,  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \mapsto L(\mathbf{u})$ , tal que para una pareja cualquiera de vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , se*

<sup>1</sup>Insistimos en que esta derivada es *otro vector*, no se trata simplemente de distintas coordenadas. De aquí la importancia que adquiere en la mecánica el concepto de observador cuando se caracteriza la variación de las magnitudes del movimiento.

cumple:

$$L(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = -L(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}.$$

A partir de esta definición es inmediato comprobar las propiedades siguientes:

1.  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ ,  $L(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = -L(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$
2. Si  $\{\mathbf{e}_i\}$  es una base, se pueden definir los siguientes coeficientes<sup>2</sup> asociados a la aplicación:

$$\widehat{\Omega}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_i \cdot L(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \widehat{\Omega}_{ij} = -\widehat{\Omega}_{ji} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.2)$$

3.  $L(\cdot)$  es lineal, es decir, para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ,

$$L(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{u}) + \beta L(\mathbf{v}).$$

En efecto,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot L(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) &= -(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \cdot L(\mathbf{x}) = -[\alpha \mathbf{u} \cdot L(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{v} \cdot L(\mathbf{x})] \\ &= \mathbf{x} \cdot [\alpha L(\mathbf{u}) + \beta L(\mathbf{v})] \end{aligned}$$

Por tanto, para un vector genérico  $\mathbf{x} = x_j \mathbf{e}_j$ :<sup>3</sup>

$$L(\mathbf{x}) = x_j L(\mathbf{e}_j).$$

Si denominamos  $\sigma_i$  a las coordenadas del vector imagen de  $\mathbf{x}$ , es decir  $L(\mathbf{x}) = \sigma_i \mathbf{e}_i$ , estas  $\sigma_i$  se obtienen proyectando  $L(\mathbf{x})$  sobre  $\mathbf{e}_i$ :

$$\sigma_i = \mathbf{e}_i \cdot [x_j L(\mathbf{e}_j)] = \widehat{\Omega}_{ij} x_j;$$

en notación matricial<sup>4</sup>,

$$\{\sigma_i\} = [\widehat{\Omega}_{ij}] \{x_j\}, \quad (4.3)$$

siendo  $[\widehat{\Omega}_{ij}]$  una matriz hemisimétrica, según se vió en (4.2). Así, la diagonal principal es nula y tan sólo tiene tres elementos no nulos independientes.

<sup>2</sup>Estos pueden también considerarse como componentes de un tensor hemisimétrico

<sup>3</sup>En lo sucesivo adoptaremos el convenio de sumación implícita de Einstein, por el que, salvo indicación en contra, los índices repetidos se deben entender sumados a lo largo de todo su rango.

<sup>4</sup>Adoptaremos en lo sucesivo la siguiente notación para las expresiones matriciales:  $\{\mathbf{b}\} = \{b_i\}$  para matrices columna,  $\|\mathbf{a}\| = \|a_i\|$  para matrices fila, es decir,  $\|\mathbf{a}\| = \{\mathbf{a}\}^T$ , y  $[\mathbf{C}] = [C_{ij}]$  para matrices de dos índices.

Eligiendo convencionalmente la nomenclatura para estos tres elementos, podemos representarla sin pérdida de generalidad de la siguiente manera<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}_{ij} &= \Omega_k \epsilon_{kji} \\ \Omega_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \widehat{\Omega}_{jk} \end{aligned} \Leftrightarrow [\widehat{\Omega}_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La denominación empleada para los 3 componentes no nulos de  $[\widehat{\Omega}_{ij}]$  permite asociar esta matriz hemisimétrica con una terna  $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \in \mathbb{R}^3$ . Es posible comprobar, verificando que sigue las reglas de transformación de coordenadas ante cambios de base propias de un espacio vectorial<sup>6</sup>, que esta terna corresponde a un vector que denominaremos  $\boldsymbol{\Omega}$ , *vector axial* asociado a la aplicación hemisimétrica  $L = \widehat{\boldsymbol{\Omega}}$ :

$$\boldsymbol{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_i \mathbf{e}_i = \Omega_1 \mathbf{i} + \Omega_2 \mathbf{j} + \Omega_3 \mathbf{k}.$$

Al tratarse de un vector, estarán definidas sobre  $\boldsymbol{\Omega}$  las operaciones propias de los vectores euclídeos: suma, producto por un escalar, producto escalar de vectores, producto vectorial.

La definición hecha del vector  $\boldsymbol{\Omega}$  permite establecer la equivalencia del producto por la matriz hemisimétrica  $[\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{ij}]$  con el producto vectorial por  $\boldsymbol{\Omega}$ :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{x} &= \widehat{\Omega}_{ij} x_j \mathbf{e}_i \\ &\equiv [\widehat{\boldsymbol{\Omega}}] \{ \mathbf{x} \} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x_2 \Omega_3 + x_3 \Omega_2 \\ x_1 \Omega_3 - x_3 \Omega_1 \\ -x_1 \Omega_2 + x_2 \Omega_1 \end{Bmatrix}; \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x} &= \epsilon_{ijk} \Omega_i x_j \mathbf{e}_k = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_3 \Omega_2 - x_2 \Omega_3) \mathbf{e}_1 + (x_1 \Omega_3 - x_3 \Omega_1) \mathbf{e}_2 + (x_2 \Omega_1 - x_1 \Omega_2) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

En resumen, como consecuencia de lo anterior, concluimos:

*la derivación de un vector constante que se mueve rígidamente unido al sistema móvil es una transformación hemisimétrica, o expresado de forma equivalente, resulta ser el producto vectorial por un determinado vector  $\boldsymbol{\Omega}$ :*

$$\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}.$$

<sup>5</sup>Las componentes  $\epsilon_{ijk}$  corresponden al tensor permutación, siendo su valor +1 ó -1 según la permutación sea par o no, e igual a cero si algún índice se repite.

<sup>6</sup>Ver por ejemplo H. Goldstein: *Mecánica Clásica*, 2.<sup>a</sup> ed., cap. 4, apartado 4.8.



El vector  $\boldsymbol{\Omega}$  caracteriza el movimiento del sistema de referencia móvil ( $S'$ ), y se corresponde con el concepto intuitivo de velocidad angular de rotación de un sistema rígido. Para comprender esto, consideremos la velocidad de un punto definido por el radio vector  $\mathbf{r} = \mathbf{u}$  (o lo que es lo mismo, la velocidad del extremo de  $\mathbf{u}$ ) cuando el triedro gira con velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}$  alrededor de un eje dado (figura 4.2).

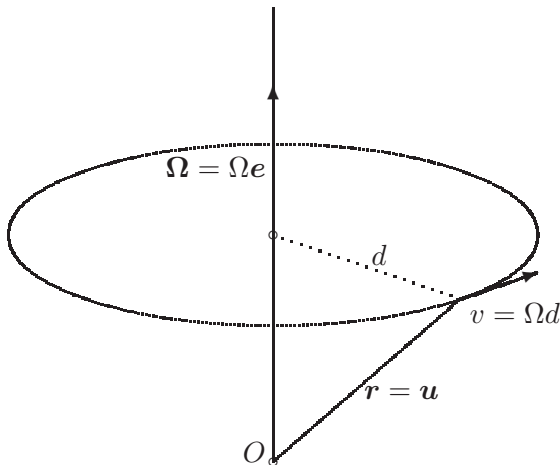


Figura 4.2: Interpretación de  $\boldsymbol{\Omega}$  como una velocidad de rotación.

Si el punto en cuestión se halla situado a distancia  $d$  del eje, su velocidad es  $\Omega d$ , en dirección tangencial a la circunferencia situada en un plano perpendicular al eje de rotación y cuyo centro es la intersección del eje con el plano. Este mismo resultado se obtiene del desarrollo geométrico de la expresión  $\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}$ . Por este motivo, a  $\boldsymbol{\Omega}$  se le llama *velocidad de rotación* del sistema móvil.

Considerando ahora el caso más general de un vector cualquiera  $\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i$ , no necesariamente constante respecto del sistema móvil, su derivada (absoluta) será:

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{p}_i \mathbf{e}_i + p_i \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{p}_i \mathbf{e}_i + p_i (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{e}_i).$$

En esta expresión, el primer término corresponde a la derivada que mediría un observador móvil para el cual los vectores de base móvil  $\mathbf{e}_i$  no varían. Así llegamos a

$$\dot{\mathbf{p}} = \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_{\text{abs}} = \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{p} \quad (4.6)$$

Es decir, para obtener la derivada (absoluta) de un vector referido a un sistema móvil se precisa añadir a la derivada relativa un término comple-

mentario debido a la rotación del sistema móvil, que es el producto vectorial de  $\boldsymbol{\Omega}$  por el propio vector que se deriva.

Es importante recalcar la diferencia entre la derivada relativa a  $S'$  y la derivada relativa a  $S$  pero expresada en las coordenadas propias de  $S'$ . En el primer caso se trata de dos vectores distintos, debido a las distintas medidas de derivada observadas desde los dos sistemas de referencia, mientras que en el segundo se trata de distintas coordenadas para el mismo vector.

EJEMPLO 4.1: Deducir la *velocidad de rotación del triedro de Frenet*.

*Solución.* La derivada temporal de  $\mathbf{t}$  es

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa \mathbf{n} v.$$

Interpretando la derivada mediante la velocidad de rotación  $\boldsymbol{\Omega}$ ,

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{t} = \begin{vmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \\ \Omega_t & \Omega_n & \Omega_b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\Omega_n \mathbf{b} + \Omega_b \mathbf{n},$$

y de la comparación de ambas expresiones se deduce  $\Omega_b = \kappa v$ ;  $\Omega_n = 0$ . Por otra parte,

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \frac{ds}{dt} = -\tau \mathbf{n} v;$$

e interpretándola como producto vectorial

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{b} = -\Omega_t \mathbf{n} + \Omega_n \mathbf{t}.$$

De donde se deduce que  $\Omega_t = \tau v$ . Por tanto, la velocidad angular buscada tiene la expresión

$$\boldsymbol{\Omega} = v\tau \mathbf{t} + v\kappa \mathbf{b}.$$

Esta ecuación permite interpretar la evolución del triedro intrínseco, al desplazarse con velocidad unidad según la curva, como una rotación con dos componentes: una de torsión, alrededor de la tangente, con velocidad angular  $\tau$ , y una de curvatura, alrededor de la binormal, con velocidad angular  $\kappa$ .  $\square$

## 4.2. Velocidad y aceleración en sistemas móviles

Supongamos un sistema de referencia fijo  $S$ , y otro móvil respecto de él  $S'$ . El vector posición de un punto cualquiera respecto de  $S$  es  $\mathbf{r}$ , y respecto

de  $S'$  lo denominamos  $\boldsymbol{\rho}$ . La relación entre los vectores posición (figura 4.3) es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}, \quad (4.7)$$

donde  $\mathbf{r}_O$  define la posición del origen  $O$  de  $S'$ . Derivando esta igualdad, y teniendo en cuenta la regla de derivación en sistemas móviles (4.6):

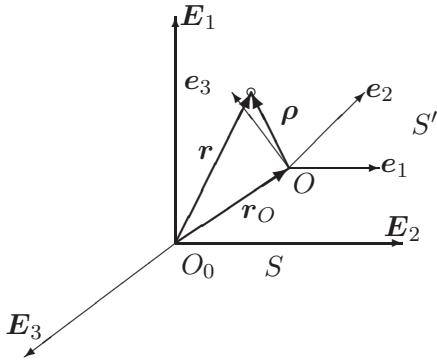


Figura 4.3: Vectores posición ( $\mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\rho}$ ) en las referencias fija  $S \equiv \{O_0, \mathbf{E}_i\}$  y móvil  $S' \equiv \{O, \mathbf{e}_i\}$  respectivamente.

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_O + \left( \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho},$$

en donde el primer término ( $\dot{\mathbf{r}}_O$ ) es la derivada (absoluta) de la posición de  $O$ , y corresponde a una velocidad de traslación; el segundo se trata de la derivada relativa de  $\boldsymbol{\rho}$ , que denominaremos velocidad relativa,  $\mathbf{v}_{\text{rel}} \stackrel{\text{def}}{=} (d\boldsymbol{\rho}/dt)_{\text{rel}}$ ; y el tercero es el término complementario de derivación de  $\boldsymbol{\rho}$  debido a la rotación de  $S'$ .

Así, la expresión general de la velocidad es:

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_{\text{rel}}.} \quad (4.8)$$

Se llama *velocidad de arrastre* a la suma de los dos primeros términos,  $\mathbf{v}_{\text{arr}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$ , correspondiente a la velocidad que tendría un punto si estuviera fijo respecto al sistema móvil. Es decir, se trata de la velocidad con la que se ve «arrastrado» un punto, si estuviera rígidamente unido al sistema móvil. De esta manera podemos expresar de forma resumida la velocidad como suma de la velocidad de arrastre (debida al movimiento de  $S'$ ) y la velocidad relativa a  $S'$ :

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{arr}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}.}$$

Derivando de nuevo la expresión (4.8) conforme a la regla expresada por (4.6), se obtiene la expresión de la aceleración:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) + \mathbf{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}};$$

y agrupando términos,

$$\mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})}_{\mathbf{a}_{\text{arr}}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}}}_{\mathbf{a}_{\text{cor}}} + \mathbf{a}_{\text{rel}} \quad (4.9)$$

En esta expresión distinguimos las siguientes componentes de la aceleración:

- *Aceleración de arrastre,*

$$\mathbf{a}_{\text{arr}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}),$$

es la aceleración que tendría un punto fijo al sistema móvil ( $S'$ ), es decir «arrastrado» por el movimiento de ( $S'$ );

- *Aceleración de Coriolis o complementaria,*

$$\mathbf{a}_{\text{cor}} \stackrel{\text{def}}{=} 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}};$$

- *Aceleración relativa,  $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ .*

Así, podemos expresar (4.9) en forma resumida:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}.$$

Como se ve, en la expresión de la aceleración aparece un término adicional a los de arrastre y relativo, que depende de la velocidad relativa, al contrario de lo que sucedía en el campo de velocidades. Esto complica el análisis de aceleraciones respecto del de velocidades.

**EJEMPLO 4.2:** Desarrollar la velocidad y aceleración de la partícula del ejemplo 2.2 (pág 2.26) a través del movimiento de arrastre del aro y del movimiento de la partícula relativo al aro.

*Solución.* El movimiento se compone de un arrastre del aro, con velocidad de rotación (constante)  $\omega$ , y de un movimiento de la partícula relativo al aro que es una rotación alrededor de su centro con ángulo  $\varphi$ . Haciendo referencia a los vectores básicos definidos en la figura 2.17, las componentes de la velocidad son:

$$\mathbf{v}_{\text{arr}} = \rho\omega \mathbf{u}_\theta = 2R\omega \cos(\varphi/2) \mathbf{u}_\theta;$$

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = R\dot{\varphi} \boldsymbol{\tau}.$$

La aceleración se descompone como  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{cor}}$ , siendo las componentes:

$$\mathbf{a}_{\text{arr}} = -\rho\omega^2 \mathbf{u}_\rho = -2R \cos(\varphi/2) \mathbf{u}_\rho;$$

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = -R\dot{\varphi}^2 \boldsymbol{\nu} + R\ddot{\varphi} \boldsymbol{\tau};$$

$$\mathbf{a}_{\text{cor}} = 2\omega \mathbf{k} \wedge R\dot{\varphi} \boldsymbol{\tau} = -2R\omega\dot{\varphi} \boldsymbol{\nu}.$$

Proyectando esta aceleración sobre las direcciones tangencial y normal al aro  $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$  resulta:

$$a_\tau = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} = R\ddot{\varphi} + R\omega^2 \sin \varphi;$$

$$a_\nu = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = -R(\omega + \dot{\varphi})^2 - R\omega^2 \cos \varphi.$$

Este resultado es idéntico al obtenido por otros métodos en el ejemplo 2.2. □

### 4.3. Campo de velocidades del sólido rígido

Supongamos ahora un sólido  $\mathcal{B}$  en movimiento, y un triedro móvil de referencia ligado a él. Una manera gráfica de describir este triedro es imaginando los tres ejes cartesianos  $Ox$ ,  $Oy$  y  $Oz$  «pinchados» en el sólido.

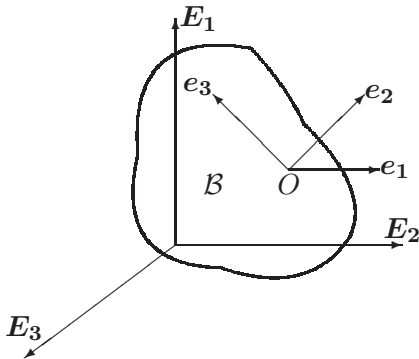


Figura 4.4: *Triedito móvil  $\{O, \mathbf{e}_i\}$ , ligado al sólido rígido  $\mathcal{B}$ .*

La velocidad de una partícula del sólido relativa a este triedro es obviamente nula. Para expresar la velocidad respecto del triedro fijo, podemos emplear la ecuación general deducida anteriormente (4.8), siendo ahora  $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{0}$ , por lo que sólo queda la  $\mathbf{v}_{\text{arr}}$ :

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}}. \tag{4.10}$$

En esta ecuación, los dos sumandos que componen la velocidad tienen una interpretación clara. En primer lugar,  $\mathbf{v}_O$  es un término constante (se entiende que *constante* sobre el dominio  $\mathcal{B}$ , no a lo largo del tiempo), independiente del punto que consideremos, por lo que se trata de una componente de traslación. Por otra parte,  $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$  es la velocidad correspondiente a una rotación instantánea de velocidad  $\boldsymbol{\Omega}$  alrededor de un eje que pasa por  $O$ .

La ecuación (4.10) caracteriza el campo de velocidades del sólido rígido como un *campo de momentos*<sup>7</sup>. Como tal, queda descrito por los siguientes elementos básicos:

- Resultante:  $\boldsymbol{\Omega}$ ;
- Momento en un punto  $O$ :  $\mathbf{v}_O$ ;
- Campo de momentos:  $\forall P \in \mathcal{B}, \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_{OP}$ .

De la ecuación del campo de momentos se deducen algunas propiedades interesantes:

1. *Equiproyectividad*:

$$\forall (O, P) \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{r}_{OP} = \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{r}_{OP};$$

2. *Invariante escalar*:

$$\forall P \in \mathcal{B}, \quad \mathbf{v}_P \cdot \boldsymbol{\Omega} = \text{cte.}$$

3. *Eje central y momento mínimo*:

Existe un eje en el cual el momento es igual para todos los puntos del mismo, con la particularidad de que es paralelo a la propia dirección del eje y además el mínimo. En nuestro caso, llamaremos a éste *eje del movimiento helicoidal*, y su obtención y propiedades las veremos en el apartado siguiente.

### 4.3.1. Movimiento helicoidal tangente

Busquemos los puntos en los que la velocidad dada por (4.10) se anula:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = -\mathbf{v}_O;$$

---

<sup>7</sup>Para una descripción y resumen de las propiedades de los Sistemas de Vectores Deslizantes y los campos de momentos resultantes, consultar J.A. Fernández Palacios: *Mecánica Teórica de los Sistemas de Sólidos Rígidos*, Anejo 1B, o M. Prieto Alberca: *Curso de Mecánica Racional – Cinemática y Estática*, Cap. I: Cálculo Vectorial

se obtiene una ecuación vectorial en la que son datos  $\boldsymbol{\Omega}$  y  $\boldsymbol{v}_O$ , siendo la incógnita  $\boldsymbol{\rho}$ . Para que tenga solución, es necesario que se cumpla la condición de compatibilidad<sup>8</sup>:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{v}_O = 0. \quad (4.11)$$

En un caso general, no tienen porqué existir puntos de velocidad nula; Sólo los habrá si se cumple esta condición de compatibilidad. Si existen puntos de velocidad nula diremos que el movimiento es una rotación.

Generalizando algo más, busquemos ahora puntos en que la velocidad sea paralela a  $\boldsymbol{\Omega}$ , es decir,  $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{\Omega}$ :

$$\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \lambda \boldsymbol{\Omega},$$

o bien

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \lambda \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{v}_O. \quad (4.12)$$

Esta es, de nuevo, una ecuación vectorial en  $\boldsymbol{\rho}$ . Veamos la solución genérica a una ecuación de este tipo:

$$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}, \quad (4.13)$$

donde  $\boldsymbol{A}$  y  $\boldsymbol{B}$  son dados, y  $\boldsymbol{x}$  es la incógnita. Es inmediato comprobar que:

1. Para que exista solución,  $\boldsymbol{A}$  debe ser perpendicular a  $\boldsymbol{B}$  (condición de compatibilidad):  $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ .
2. Si  $\boldsymbol{x}$  es solución,  $\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{A}$  también lo es; por lo tanto la solución no es única, sino que si existe será una familia uniparamétrica de soluciones, es decir, una recta paralela a  $\boldsymbol{A}$ .

Para despejar la incógnita  $\boldsymbol{x}$ , premultiplicamos (4.13) vectorialmente por  $\boldsymbol{A}$  y desarrollamos el doble producto vectorial:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{x}) &= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}) \boldsymbol{A} - A^2 \boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}. \end{aligned}$$

Despejando  $\boldsymbol{x}$ , y englobando las componentes en dirección de  $\boldsymbol{A}$  (es decir,  $-(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}) \boldsymbol{A}$ ) en un término genérico  $\alpha \boldsymbol{A}$  (recuérdese la propiedad 2. arriba expuesta), se obtiene:

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{A}}{A^2} + \alpha \boldsymbol{A}.} \quad (4.14)$$

<sup>8</sup>El producto vectorial es normal a los dos argumentos

Esta expresión define, no una solución única, sino una familia de soluciones en función del parámetro  $\alpha$ , formando un eje de dirección  $\mathbf{A}$ .

Aplicando esta solución a la ecuación (4.12), obtenemos:

$$\boxed{\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega^2} + \alpha \boldsymbol{\Omega}.} \quad (4.15)$$

El lugar geométrico de las soluciones dadas por (4.15) define un *eje paralelo a  $\boldsymbol{\Omega}$* . Por otra parte, la condición de compatibilidad exige que:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot (\lambda \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{v}_O) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O = \lambda \Omega^2,$$

por lo que:

- a. Si  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O \neq 0$ , es  $\lambda \neq 0$ , y la velocidad en el eje es  $\mathbf{v} = \lambda \boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$ ; (no existen puntos de velocidad nula)
- b. Si  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O = 0$ , es  $\lambda = 0$ , y la velocidad en el eje es  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  (el movimiento es una rotación).

Todos los puntos del eje (4.15) tienen la misma velocidad; en efecto, si  $\boldsymbol{\rho}_1$  y  $\boldsymbol{\rho}_2$  pertenecen al eje:

$$\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1 = \beta \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \wedge (\beta \boldsymbol{\Omega})}_{= \mathbf{0}}.$$

Por otra parte, tomando como referencia un punto  $O$  del eje, la velocidad en un punto cualquiera queda descompuesta en un término constante en dirección del eje,  $\mathbf{v}_O$ , y uno perpendicular a este primero, por serlo a  $\boldsymbol{\Omega}$  (figura 4.5):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho} = \lambda \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}. \quad (4.16)$$

Es fácil comprender por tanto que el eje contiene los puntos de *velocidad mínima* del sólido: la velocidad de cualquier otro punto, además de la componente constante ( $\lambda \boldsymbol{\Omega}$ ), tiene una componente adicional perpendicular a la velocidad del eje, por lo que siempre será mayor en módulo.

Esta descripción caracteriza el llamado *movimiento helicoidal tangente*. El eje de este movimiento de «sacacorchos» es el obtenido anteriormente (4.15). Los puntos que no estén sobre el eje tienen una componente adicional de la velocidad ( $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$ ) perpendicular al mismo.

Esta caracterización del movimiento varía con el tiempo, tanto por el cambio de la dirección de  $\boldsymbol{\Omega}$  cómo de su módulo. Por lo tanto, en cada



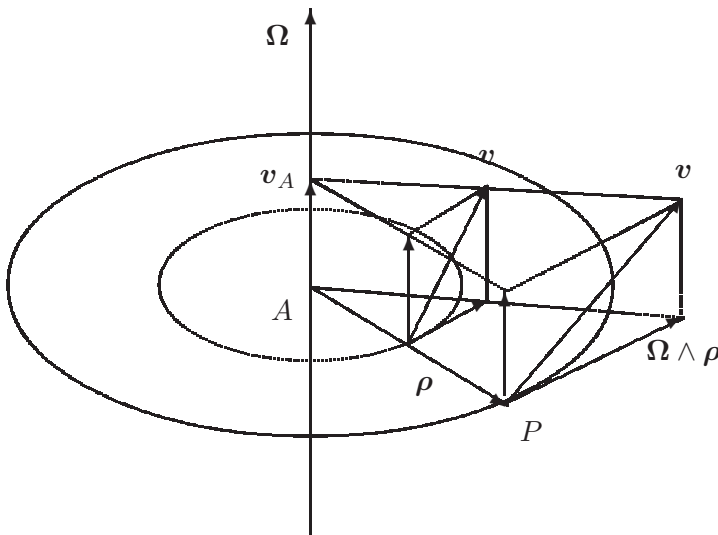


Figura 4.5: Descripción del campo de velocidades como un movimiento helicoidal tangente. La velocidad de un punto  $P$  cualquiera se obtiene sumando la velocidad de deslizamiento de los puntos del eje ( $v_A$ ) y el momento  $\Omega \wedge \rho$

momento existe un movimiento helicoidal, tangente al movimiento en ese instante. Debido a esto, (4.15) se llama «eje instantáneo» del movimiento.

Por otra parte, se denomina «tangente» porque caracteriza, al igual que las tangentes, la derivada primera del movimiento. El movimiento helicoidal tangente sirve para interpretar el campo de velocidades, pero en cambio no es válido para interpretar el campo de aceleraciones. Al igual que la tangente a una curva, es una aproximación local al movimiento, que reproduce tan sólo la primera derivada, mientras que la aceleración es la segunda derivada (ver apartado 4.4).

### 4.3.2. Axoides del movimiento

A lo largo del movimiento, el eje del movimiento helicoidal tangente describe una superficie reglada, denominada *axoide*. La ecuación paramétrica del axoide será simplemente la expresada por (4.15), tomando como parámetros  $\alpha$  y el tiempo  $t$ . Según describamos el axoide en el sistema de referencia móvil o en el fijo obtendremos dos superficies regladas distintas denominadas, respectivamente, *axoide móvil* o *axoide fijo*:

- *Axoide móvil*

$$\rho = \frac{\Omega \wedge v_O}{\Omega^2} + \alpha \Omega \quad (4.17)$$

- *Axoide fijo*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \frac{\Omega \wedge v_O}{\Omega^2} + \alpha \Omega \quad (4.18)$$

Por su definición, ambos axoides son superficies regladas y en cada instante tienen en común la generatriz, que es precisamente el eje del movimiento helicoidal tangente en ese instante. Una propiedad importante de los axoides es que *son tangentes entre sí en todos los puntos del eje*. Esta afirmación, a pesar de lo que pudiera parecer intuitivamente en una primera consideración, no es evidente. Conviene precisar que una superficie reglada, en general, no tiene necesariamente un único plano tangente a lo largo de una generatriz; esto sólo será así si la superficie reglada es además desarrollable, como es el caso de los conos o los cilindros. Sin embargo, un hiperboloide reglado (de una hoja) no es desarrollable y el plano tangente es distinto en cada punto de la generatriz.

Para demostrar la propiedad arriba enunciada supongamos una curva  $C$  trazada sobre el axoide fijo, que en un instante dado tiene un punto  $A$  de

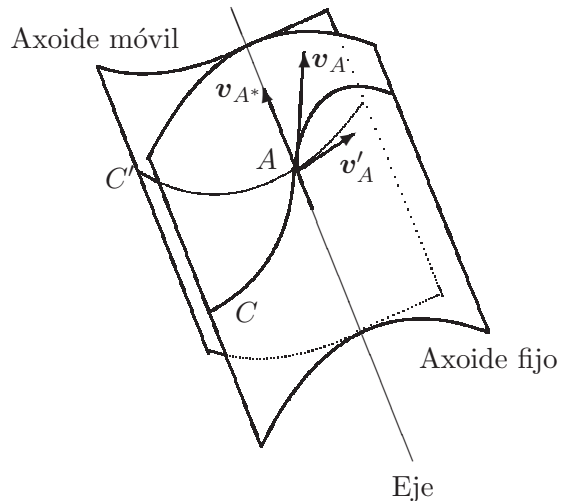


Figura 4.6: *El axoide fijo y el móvil son tangentes en todos los puntos de la generatriz común.*

intersección con el eje instantáneo (figura 4.6). Sea  $C'$  la curva correspondiente al axoide móvil, definida como la «huella» que deja el punto  $A$  sobre el mismo, como si en  $A$  se situase constantemente un mosquito manchado

de tinta. El punto  $A$  común a  $C$  y  $C'$  en cada instante es un punto geométrico que, en general, no coincidirá con una misma partícula del sólido o punto material a lo largo del movimiento; en caso contrario la curva  $C'$  se reduciría a ese punto como es lógico.

Si expresamos el vector posición del punto  $A$  en ambas referencias,

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}_A,$$

y derivando mediante (4.8) para obtener la velocidad:

$$\mathbf{v}_A = \underbrace{\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}_A}_{\mathbf{v}_{A^*}} + \underbrace{\left( \frac{d\boldsymbol{\rho}_A}{dt} \right)_{\text{rel}}}_{\mathbf{v}'_A}, \quad (4.19)$$

donde:

- $\mathbf{v}_A$  es la velocidad del punto geométrico  $A$ , que llamaremos también «velocidad de sucesión» de  $A$ ;
- $\mathbf{v}_{A^*}$  es la velocidad de la partícula del sólido móvil  $A^*$  que coincide con  $A$  en un instante dado, o velocidad de arrastre de  $A$ ;
- $\mathbf{v}'_A$  es la velocidad de sucesión de  $A$  (como punto geométrico), pero ahora relativa al sólido móvil.

Como la velocidad es tangente siempre a la trayectoria, se cumple que  $\mathbf{v}_A$  y  $\mathbf{v}'_A$  son tangentes, respectivamente, a las curvas  $C$  y  $C'$ . Por tanto,  $\mathbf{v}_A$  es tangente al axoide fijo y  $\mathbf{v}'_A$  al móvil.  $\mathbf{v}_{A^*}$ , por ser  $A^*$  un punto situado sobre el eje helicoidal, lleva la dirección de dicho eje y es por tanto tangente a ambos axoides. Consecuentemente,  $\mathbf{v}_A$ , al ser suma de dos vectores tangentes al axoide móvil ( $\mathbf{v}'_A + \mathbf{v}_{A^*}$ ), es también tangente al mismo.

El razonamiento anterior demuestra que un vector arbitrario  $\mathbf{v}_A$  (recordemos que la curva  $C$  era arbitraria), tangente al axoide fijo en un punto del eje helicoidal, lo es también al axoide móvil. Esto quiere decir que ambos axoides son tangentes en todos los puntos del eje.

De la ecuación (4.19) se deduce la velocidad relativa del punto  $A$  entre ambos sistemas, que es precisamente la velocidad de arrastre:

$$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}'_A = \mathbf{v}_{A^*}.$$

La anulación de esta velocidad ( $\mathbf{v}_{A^*} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_A - \mathbf{v}'_A = \mathbf{0}$ ) indicaría una rodadura sin deslizamiento entre ambos axoides. En un caso general

está claro (apartado 4.3.1) que no se tiene porqué producir necesariamente dicha rodadura perfecta, sino que puede existir además un deslizamiento en la dirección del propio eje ( $\mathbf{v}_{A^*} = \lambda\boldsymbol{\Omega}$ ). Por lo tanto podemos interpretar el movimiento del sólido, caracterizado por la evolución del axoide móvil solidario con él, como una *rodadura del axoide móvil sobre el axoide fijo, unido a un deslizamiento en la dirección del eje*.

#### 4.4. Campo de aceleraciones del sólido rígido

El campo de aceleraciones del sólido se obtiene particularizando la expresión general de la aceleración en el movimiento relativo (4.9) al caso del sólido rígido, en el que  $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a}_{\text{rel}} = \mathbf{0}$ :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) \quad (4.20)$$

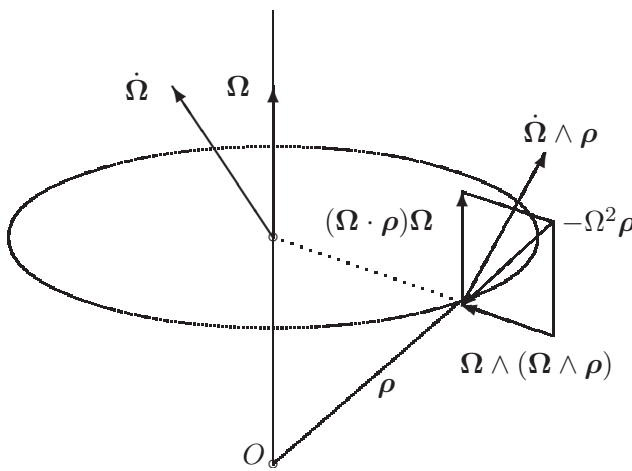


Figura 4.7:  
Interpretación geométrica de las componentes de la aceleración del sólido

El significado de cada uno de estos tres términos es el siguiente:

- $\mathbf{a}_O$  es la *aceleración del origen*  $O$ , constante para todo el sólido (aceleración de traslación).
- $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho}$  es un término perpendicular a  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  y  $\boldsymbol{\rho}$ . Aunque por similitud con las fórmulas del movimiento circular pudiera parecer en primera instancia que este término corresponde a una aceleración tangencial, éste término sólo será tangente a la trayectoria si  $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$  y la dirección de  $\boldsymbol{\Omega}$  no varía, correspondiendo entonces el movimiento a una rotación

alrededor de un eje fijo por  $O$ . En un caso general este término no será tangencial ni siquiera en el movimiento plano (ver en el apartado 4.6.3 la descomposición en aceleración normal y tangencial para el movimiento plano).

- $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\rho}\Omega^2$  es una aceleración axípeta, descompuesta en los dos términos anteriores, uno dirigido hacia el centro  $O$  ( $-\boldsymbol{\rho}\Omega^2$ ) y otro según el eje ( $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})$ ).

Conviene precisar que el movimiento helicoidal tangente descrito antes y expresado por (4.16) sirve tan sólo para describir el campo de velocidades. Al ser función tan sólo de  $\mathbf{v}_O$  y  $\boldsymbol{\Omega}$ , no puede representar el campo de aceleraciones, en concreto los dos primeros sumandos de la expresión (4.20),  $\mathbf{a}_O$  y  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho}$ . Sería posible encontrar un punto en que  $\mathbf{a}_O$  se anule —como veremos abajo en la discusión del polo de aceleraciones—, sin embargo el término  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  contiene información sobre el cambio de  $\boldsymbol{\Omega}$ , tanto en dirección como en módulo, que no se puede obtener a partir del movimiento helicoidal instantáneo.

Se llama *polo de aceleraciones* al punto en que la aceleración se anula. En general, existe un único punto en que se verifica esto, salvo casos particulares, en que puede no existir, o bien existir una recta de polos. Para obtener el polo, buscamos la solución para  $\boldsymbol{\rho}$  de la expresión (4.20) igualada a cero,

$$\mathbf{0} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}).$$

Empleando notación matricial, podemos representar los productos vectoriales como productos por matrices hemisimétricas (ver expresiones (4.4) y (4.5)). Sean  $[\hat{\boldsymbol{\Omega}}]$  y  $[\hat{\boldsymbol{\Omega}}]$  las matrices hemisimétricas que corresponden respectivamente a los productos vectoriales por  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  y  $\boldsymbol{\Omega}$ :

$$\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{a}_O\} + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}]\{\boldsymbol{\rho}\} + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}]([\hat{\boldsymbol{\Omega}}]\{\boldsymbol{\rho}\}) = \{\mathbf{a}_O\} + ([\hat{\boldsymbol{\Omega}}] + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}]^2)\{\boldsymbol{\rho}\},$$

cuya solución,

$$\{\boldsymbol{\rho}\} = -([\hat{\boldsymbol{\Omega}}] + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}]^2)^{-1}\{\mathbf{a}_O\},$$

es por lo general única, siempre que  $([\hat{\boldsymbol{\Omega}}] + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}]^2)$  admita inversa. En caso contrario, si  $([\hat{\boldsymbol{\Omega}}] + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}]^2)$  es singular, en general no existe polo de aceleraciones, salvo casos degenerados.

## 4.5. Composición de movimientos

### 4.5.1. Composición del movimiento de 2 sistemas

Comenzaremos por el caso elemental de la composición de movimientos relativos a dos sistemas. Suponemos uno  $S_0$  «fijo» y otro  $S_1$  «móvil». Se-

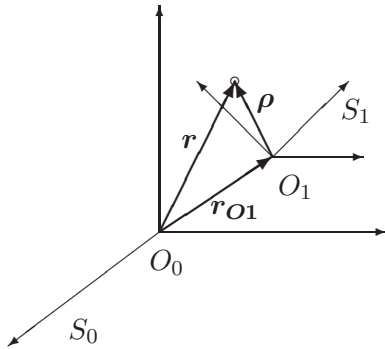


Figura 4.8: Composición de movimientos entre dos sistemas  $S_0$  y  $S_1$ .

gún las expresiones del movimiento relativo (4.8) y (4.9), las velocidades y aceleraciones son:

$$\underbrace{\mathbf{v}_{\text{abs}}}_{\mathbf{v}_{S_0}} = \underbrace{\mathbf{v}_{O_1} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{v}_{\text{arr}}} + \underbrace{\mathbf{v}_{\text{rel}}}_{\mathbf{v}_{S_1}}$$

$$\underbrace{\mathbf{a}_{\text{abs}}}_{\mathbf{a}_{S_0}} = \mathbf{a}_{\text{arr}} + \underbrace{\mathbf{a}_{\text{cor}}(\mathbf{v}_{S_1})}_{\text{depende de } \mathbf{v}_{S_1}} + \underbrace{\mathbf{a}_{\text{rel}}}_{\mathbf{a}_{S_1}}$$

donde se han tomado las magnitudes  $\mathbf{v}_{S_1}$ ,  $\mathbf{a}_{S_1}$  como relativas, y  $\mathbf{v}_{S_0}$ ,  $\mathbf{a}_{S_0}$  como absolutas. Así, para obtener las velocidades respecto a  $S_0$  basta con sumar a la velocidad respecto a  $S_1$  el término de arrastre correspondiente al movimiento del punto como sólido rígido. En cambio, para las aceleraciones es preciso añadir, además del término de arrastre, el término de Coriolis que depende de la velocidad relativa.

### 4.5.2. Composición del movimiento de $n$ sistemas

Supongamos ahora el caso general de composición de  $n$  movimientos, en el que el movimiento esté definido respecto de un sistema  $S_n$ , el de éste a su vez respecto de otro  $S_{n-1}$ , y así sucesivamente hasta llegar a  $S_0$ . Interesa conocer el movimiento absoluto (respecto de  $S_0$ ), resultante de esta composición de  $n$  movimientos.

El campo de velocidades de  $S_n$  respecto a  $S_{n-1}$  es:

$$\mathbf{v}_{n|n-1} = \mathbf{v}_{O_n} + \boldsymbol{\Omega}_n \wedge \boldsymbol{\rho}_n,$$

siendo  $\mathbf{v}_{O_n}$  la velocidad del origen de  $S_n$ ,  $O_n$ , relativa a  $S_{n-1}$ , y  $\boldsymbol{\Omega}_n$  la velocidad de rotación de  $S_n$  relativa a  $S_{n-1}$ .

Para obtener el movimiento respecto a  $S_{n-2}$  basta considerar la expresión anterior de  $\mathbf{v}_{n|n-1}$  como velocidad relativa respecto a  $S_{n-1}$ , y sumarle el término de arrastre correspondiente al movimiento de  $S_{n-1}$  respecto a  $S_{n-2}$ :

$$\mathbf{v}_{n|n-2} = \underbrace{\mathbf{v}_{O_{n-1}} + \boldsymbol{\Omega}_{n-1} \wedge \boldsymbol{\rho}_{n-1}}_{\mathbf{v}_{\text{arr}} = \mathbf{v}_{n-1|n-2}} + \underbrace{\mathbf{v}_{O_n} + \boldsymbol{\Omega}_n \wedge \boldsymbol{\rho}_n}_{\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v}_{n|n-1}}$$

A continuación se repite la operación, considerando  $\mathbf{v}_{n|n-2}$  como velocidad relativa, y así consecutivamente hasta llegar a  $S_0$ .

Se puede interpretar esta composición considerando cada campo de velocidades relativo como el campo de momentos de un sistema de vectores deslizantes (S.V.D.). La velocidad absoluta, composición de los diversos movimientos relativos, es el resultado de la suma de los campos de momentos. Esta suma es igual al campo de momentos del sistema suma, composición de todos los campos de momentos. La composición de S.V.D. se realiza sumando las resultantes ( $\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\Omega}_i$ ) y los momentos en un punto  $O$  dado ( $\mathbf{v}_O = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_O)_{i|i-1}$ ). Por lo tanto, realizando la suma de los S.V.D. relativos tendremos caracterizado el S.V.D. que corresponde al movimiento absoluto composición de los mismos.

El campo de aceleraciones, como ya se ha dicho, no constituye un campo de momentos y por tanto no vale para éste el método de composición de S.V.D. Es necesario ir componiendo uno a uno los movimientos relativos, calculando para cada uno los términos de aceleración relativa y Coriolis correspondientes.

EJEMPLO 4.3: Composición de *dos traslaciones*.

*Solución.* Cada traslación se reduce a un par (momento  $\mathbf{v}_O \neq \mathbf{0}$ , resultante  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ ). La suma los dos S.V.D. se reduce a otro par, suma vectorial de los dos; por lo tanto, el movimiento compuesto es otra traslación, de velocidad  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ .  $\square$

EJEMPLO 4.4: Composición de *dos rotaciones de ejes concurrentes*.

*Solución.* Son dos sistemas con resultante no nula ( $\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$ ) y momento nulo en el eje ( $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$  para  $O \in$  eje). La suma es otra rotación pura, de resultante  $\boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2$ , aplicada en el punto de intersección de los ejes de rotación.  $\square$

EJEMPLO 4.5: Composición de *dos rotaciones de ejes paralelos*.

*Solución.* Se puede interpretar como un caso particular de ejes concurrentes que se cortan en un punto impropio. El resultado es otra rotación, de eje paralelo y coplanario a los anteriores, situado a la distancia adecuada (se calcula ésta de forma que el momento  $\mathbf{v}$  en un punto sea igual y de signo contrario para cada una de las rotaciones componentes). En el caso degenerado en que ambas rotaciones sean iguales y de distinto signo, el resultado es una traslación pura, con velocidad igual al producto de la velocidad de rotación por la distancia entre los ejes.  $\square$

EJEMPLO 4.6: Composición de *dos rotaciones de ejes no concurrentes ni paralelos*.

*Solución.* El resultado es un sistema general (traslación más rotación), por lo que la interpretación como S.V.D. no ofrece ventaja especial.  $\square$

EJEMPLO 4.7: Interpretación del movimiento de la tierra.

*Solución.* Se trata de un caso particular interesante, que se puede interpretar como resultado de la composición de dos movimientos:

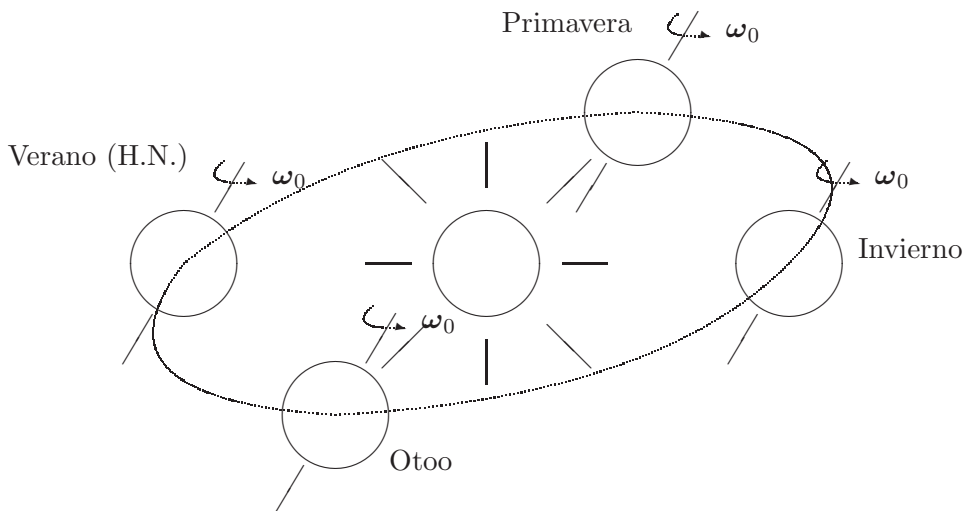


Figura 4.9: *Movimiento de la tierra: composición de traslación y rotación.*



- a. *Traslación* alrededor del Sol, con órbita elíptica (aproximadamente circular)<sup>9</sup>, a la distancia media de 149 millones de kilómetros. El período orbital es de 365,2564 días.
- b. *Rotación* de la Tierra en torno a su eje Norte-Sur, que mantiene su dirección aproximadamente invariante, con una inclinación aproximada de  $66^\circ$  respecto del plano de la eclíptica. La rotación propia de este movimiento es la rotación sidérea, que tiene un período (día sidéreo) algo menor a 1 día solar<sup>10</sup>.

En la realidad, el movimiento de la tierra tiene algunas perturbaciones adicionales sobre el sencillo esquema delineado arriba, como por ejemplo, las pequeñas oscilaciones de la dirección del eje de la Tierra, o el fenómeno de precesión de los equinoccios. Este último consiste en una lenta variación de la orientación del eje de rotación de la tierra, precesionando alrededor de la perpendicular al eje de la eclíptica, de periodo 26.000 años (ver el apartado 9.3.2 para una discusión de éste fenómeno desde el punto de vista de la dinámica).  $\square$

### 4.5.3. Movimiento de sólidos tangentes

Consideremos dos sólidos,  $S_1$  (fijo) y  $S_2$  (móvil) que permanecen tangentes durante el movimiento. A lo largo del mismo, el punto de tangencia  $A$  define sendas curvas en cada uno de los dos sólidos, que denominamos  $C_1$  y  $C_2$  (figura 4.10). Es posible imaginar intuitivamente estas curvas como dibujadas por un mosquito entintado, que se sitúa constantemente en el punto  $A$ , y que va manchando los dos sólidos. Expresando la velocidad de sucesión del punto geométrico  $A$  en cada sistema:

$$\mathbf{v}_{\text{abs}} = \mathbf{v}_{\text{arr}} + \mathbf{v}_{\text{rel}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{A|1} = \mathbf{v}_{\text{arr}} + \mathbf{v}_{A|2} \quad (4.21)$$

$\mathbf{v}_{A|1}$  es tangente a  $C_1$ , y  $\mathbf{v}_{A|2}$  lo es a  $C_2$ . A su vez, ambas velocidades pertenecen al plano tangente común. Por lo tanto,  $\mathbf{v}_{\text{arr}} = \mathbf{v}_{A|1} - \mathbf{v}_{A|2}$  (velocidad del punto del sólido  $S_2$  que coincide con  $A$  en un instante dado) ha de ser

<sup>9</sup>No debe confundirse una traslación circular o elíptica con una rotación; en la traslación todos los puntos del sólido tienen igual velocidad en un instante dado, aunque esta velocidad del conjunto varíe con el tiempo, describiendo así trayectorias curvas para cada punto.

<sup>10</sup>Para volver a estar enfrentado con el sol, un punto de la superficie de la tierra tiene que girar algo más que  $360^\circ$ , ya que durante ese tiempo la tierra se ha trasladado algo en su órbita alrededor del sol; por tanto, 1 día solar (86 400 s.) equivale a un giro algo mayor a los  $360^\circ$  del día sidéreo (86 164 s.).

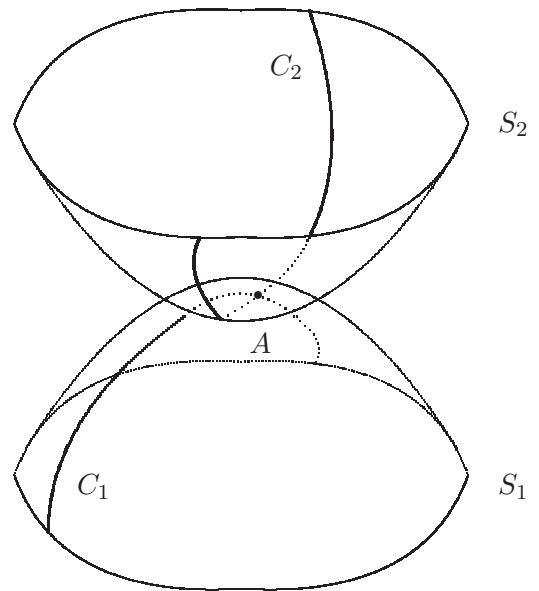


Figura 4.10: *Huella dejada por el punto de tangencia A sobre los sólidos tangentes  $S_1$  y  $S_2$ .*

tangente a ambos sólidos. Esta velocidad se llama *velocidad de deslizamiento*:  $\mathbf{v}_d \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}_{A|1} - \mathbf{v}_{A|2}$ .

El movimiento (relativo) en el punto de contacto se puede reducir entonces a una velocidad de deslizamiento  $\mathbf{v}_d$  y una rotación de velocidad instantánea  $\mathbf{\Omega}$ , cuyo eje pasa por el punto de tangencia.

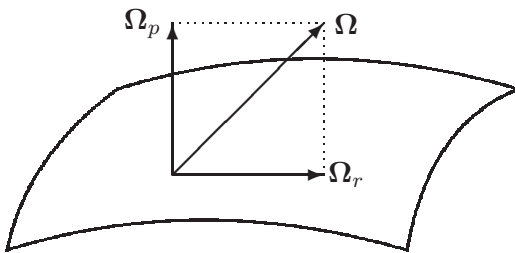


Figura 4.11: *Componentes de rodadura y pivotamiento de la velocidad de rotación,  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_p + \mathbf{\Omega}_r$ .*

En un caso general,  $\mathbf{\Omega}$  tendrá una componente según el plano tangente, llamada velocidad de rodadura  $\mathbf{\Omega}_r$ , y otra normal al mismo, llamada velocidad de pivotamiento  $\mathbf{\Omega}_p$ . Denominando  $\mathbf{N}$  a la normal común en el punto de tangencia,

$$\mathbf{\Omega}_p \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}$$

$$\mathbf{\Omega}_r \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_p$$

Cuando la velocidad relativa en el punto de contacto es nula, ( $\mathbf{v}_d = \mathbf{0}$ ),

no hay deslizamiento entre ambos sólidos. Se dice entonces que un sólido «rueda sin deslizar» sobre el otro. Este término no implica, por lo general, que la rodadura se efectúe sin pivotamiento, sino tan sólo la ausencia de deslizamiento.

EJEMPLO 4.8: Un cilindro recto de radio  $r$  se mueve manteniéndose tangente a un cono fijo, de radio de la base  $r$  y semiángulo  $\alpha$ , de forma que comparten en todo momento una generatriz. Una base del cilindro rueda con velocidad uniforme sin deslizar sobre la base del cono, de forma que realiza una revolución completa alrededor del eje del cono en un tiempo  $\tau$ . La otra base del cilindro se mantiene en contacto con el vértice del cono. Obtener las expresiones de:

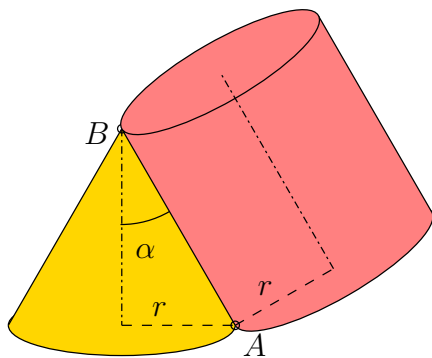


Figura 4.12: Ejemplo 4.8; sección del cono y cilindro por el plano meridional.

- velocidad de rotación del cilindro, calculando la componente de pivotamiento;
- axoides del movimiento y aceleración angular del cilindro;
- aceleración del punto  $A$  de la base del cilindro en contacto con la base del cono.

(Examen parcial, 3/2/1995)

*Solución.*

a.— En la figura se muestra una sección por el plano meridional, que contiene a los ejes del cono ( $BC$ ) y del cilindro ( $QM$ ), así como a la generatriz común  $AB$ . El punto  $A$  de contacto entre las bases tiene velocidad nula, debido a la condición de rodadura. Asimismo, el punto  $O$  de corte del eje del cilindro con el eje del cono es un punto fijo del movimiento. Por lo tanto, el movimiento instantáneo es una rodadura alrededor del eje  $OA$ . A su vez, en los sucesivos instantes del movimiento, el plano meridional de

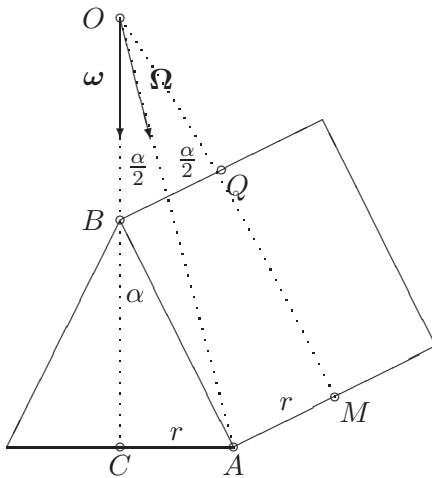


Figura 4.13: Ejemplo 4.8; eje instantáneo de rotación y descomposición del vector  $\Omega$

la figura va girando alrededor del eje  $OC$ . En consecuencia, a lo largo del movimiento el eje instantáneo  $OA$  define un cono de eje  $OC$ .

En la figura observamos que el ángulo  $\widehat{COM} = \alpha$ . Asimismo, los triángulos rectángulos  $AOC$  y  $AOM$  son iguales por compartir hipotenusa y tener un cateto igual ( $r$ ), por lo que los ángulos  $\widehat{AOC} = \widehat{AOM} = \alpha/2$  son iguales.

El punto  $Q$  del eje del cilindro desarrolla un movimiento circular, alrededor del eje  $OC$ . Su velocidad es

$$v_Q = \frac{2\pi}{\tau} r \cos \alpha;$$

por otra parte, interpretando el movimiento como rotación de velocidad  $\Omega$  alrededor del eje  $OA$

$$v_Q = \Omega \cdot OQ \sin \frac{\alpha}{2} = \Omega r \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Igualando ambas expresiones, y en función del versor  $\mathbf{u} = \mathbf{OA}/|\mathbf{OA}|$ , se obtiene

$$\boxed{\Omega = \frac{4\pi}{\tau} \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{u}}$$

La componente de pivotamiento es la proyección sobre la normal a  $AB$ :

$$\Omega_p = \Omega \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{\Omega_p = \frac{2\pi}{\tau} \sin \alpha}$$

b.— En el movimiento, el eje  $OA$  gira alrededor del eje  $OC$  con velocidad angular  $\boldsymbol{\omega} = (2\pi/\tau)\mathbf{k}$ , siendo  $\mathbf{k} = \mathbf{OC}/|\mathbf{OC}|$ . Por tanto los axoides son:

*Axoides fijo:* cono de eje  $OC$ , vértice  $O$ , semiángulo  $\alpha/2$ .

*Axoides móvil:* cono de eje  $OM$ , vértice  $O$ , semiángulo  $\alpha/2$ .

La aceleración angular, al ser constante el módulo de  $\boldsymbol{\Omega}$ , proviene de la rotación  $\boldsymbol{\omega}$ :

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \text{sen } \alpha \mathbf{j}$$

siendo  $\mathbf{j}$  el versor normal al plano de la figura.

c.— Para obtener la aceleración de  $A$  se aplica la expresión general

$$\mathbf{a}_A = \underbrace{\mathbf{a}_O}_{=0} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{OA} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\underbrace{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OA}}_{=0})$$

obteniéndose

$$\mathbf{a}_A = \frac{4\pi^2}{\tau^2} r \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \frac{\alpha}{2}} \mathbf{v} = \frac{8\pi^2}{\tau^2} r \cos \frac{\alpha}{2} \mathbf{v}$$

siendo  $\mathbf{v}$  el versor perpendicular a  $OA$  dentro del plano de la figura. □

## 4.6. Movimiento plano

Decimos que un sólido tiene un movimiento plano cuando las velocidades de todos sus puntos son paralelas a un plano  $\Pi$  fijo. Para que esto se cumpla, la velocidad de rotación  $\boldsymbol{\Omega}$  ha de ser perpendicular al plano. En efecto, recordando la expresión del campo de velocidades (4.10),

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho};$$

tanto  $\mathbf{v}$  como  $\mathbf{v}_O$  pertenecen al plano  $\Pi$ , por lo tanto, para que  $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$  pertenezca también al plano  $\Pi$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  ha de ser normal al mismo.

Bastará con estudiar el movimiento de una sección plana del sólido paralela al plano dado para caracterizar el movimiento de cualquier punto, aunque el sólido en sí no sea plano. Los puntos fuera de esta sección tendrán idéntica velocidad que sus proyecciones sobre el plano de referencia.

Tomaremos convencionalmente el triedro de referencia de forma que el versor  $\mathbf{k}$  defina la normal al plano. Así, la velocidad de rotación se puede representar tan sólo por una magnitud escalar,  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$ .

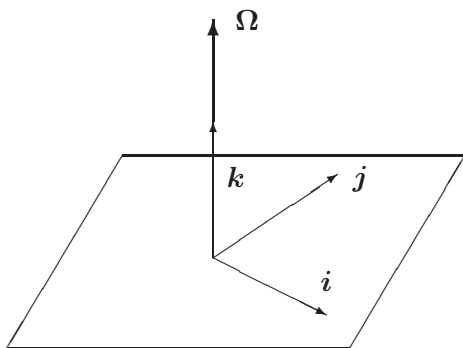


Figura 4.14: Orientación del triédro en el movimiento plano.

#### 4.6.1. Centro instantáneo de rotación

En un movimiento plano, el eje del movimiento helicoidal tangente es una recta normal al plano  $\Pi$ . Puesto que se cumple  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_O = 0$ , esta recta es además de velocidad nula, siendo por tanto todo movimiento plano siempre una *rotación pura*.

El centro de la rotación será la intersección del eje del movimiento helicoidal con el plano, y se denomina *Centro Instantáneo de Rotación* (C.I.R.). Para definir sus coordenadas en el plano, particularizamos las del eje del movimiento helicoidal (4.17):

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega^2} + \underbrace{\alpha \boldsymbol{\Omega}}_{=0},$$

ya que  $\alpha = 0$  en el plano  $\Pi$ . Sustituyendo  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}$  obtenemos

$$\boxed{\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega}}. \quad (4.22)$$

En el movimiento plano se puede medir la rotación absoluta mediante un parámetro angular  $\varphi$ , ángulo girado por una recta determinada del plano móvil con respecto a una referencia fija. Teniendo en cuenta entonces  $\Omega = d\varphi/dt$  y  $\mathbf{v}_O = d\mathbf{r}_O/dt$ ,

$$\boxed{\boldsymbol{\rho} = \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{r}_O}{d\varphi}}. \quad (4.23)$$

#### 4.6.2. Curvas polares

Análogamente a los axoides definidos para el movimiento general, el centro instantáneo de rotación en el movimiento plano describe unas curvas

determinadas a lo largo del movimiento. Este lugar geométrico se llama *polar móvil*, si se define respecto a la referencia móvil, y *polar fija* si se describe en la referencia fija. Alternativamente, se pueden llamar también *ruleta* y *base*, respectivamente. Las expresiones de estos lugares geométricos son:

- *Polar móvil*

$$\rho = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega} = \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{r}_O}{d\varphi} \quad (4.24)$$

- *Polar fija*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega} = \mathbf{r}_O + \mathbf{k} \wedge \frac{d\mathbf{r}_O}{d\varphi} \quad (4.25)$$

La expresión en coordenadas cartesianas de las curvas polares se puede obtener directamente desarrollando en componentes las ecuaciones vectoriales (4.24) y (4.25).

Emplearemos sin embargo otro método para deducir las ecuaciones de las polares en coordenadas cartesianas; para ello nos basaremos en que, para un punto  $O$  cualquiera, la velocidad  $\mathbf{v}_O$  proviene de una rotación instantánea respecto al C.I.R.:

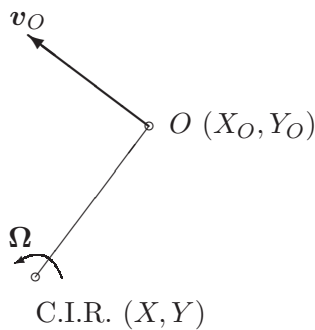


Figura 4.15: El campo de velocidades del movimiento plano como una rotación alrededor del C.I.R.

$$\begin{aligned} v_{O_x} = -(Y_O - Y)\Omega &\Rightarrow Y = Y_O + \frac{dX_O/dt}{d\varphi/dt} \\ v_{O_y} = (X_O - X)\Omega &\Rightarrow X = X_O - \frac{dY_O/dt}{d\varphi/dt} \end{aligned}$$

En definitiva, resultan las expresiones:

- *Polar fija:*

$$X = X_O - \frac{dY_O/dt}{d\varphi/dt}, \quad Y = Y_O + \frac{dX_O/dt}{d\varphi/dt} \quad (4.26)$$

- *Polar móvil:*

La posición del C.I.R. se obtiene en la referencia móvil  $Oxy$  proyectando sus coordenadas relativas  $(-dY_O/d\varphi, dX_O/d\varphi)$  sobre los ejes móviles (figura 4.16),

$$\begin{aligned} x &= \frac{dX_O/dt}{d\varphi/dt} \operatorname{sen} \varphi - \frac{dY_O/dt}{d\varphi/dt} \operatorname{cos} \varphi, \\ y &= \frac{dX_O/dt}{d\varphi/dt} \operatorname{cos} \varphi + \frac{dY_O/dt}{d\varphi/dt} \operatorname{sen} \varphi \end{aligned} \quad (4.27)$$

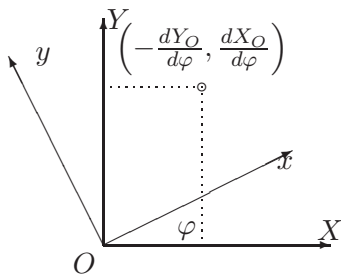


Figura 4.16: Proyección de  $(-dY_O/d\varphi, dX_O/d\varphi)$  sobre los ejes móviles  $Oxy$

Las polares son curvas intrínsecas del movimiento; no dependen del tiempo, cumpliendo éste únicamente la función del parámetro para la definición de las mismas. Para un movimiento determinado, la polar fija será pues una curva fija, y la polar móvil una curva distinta que acompaña al plano móvil en su movimiento.

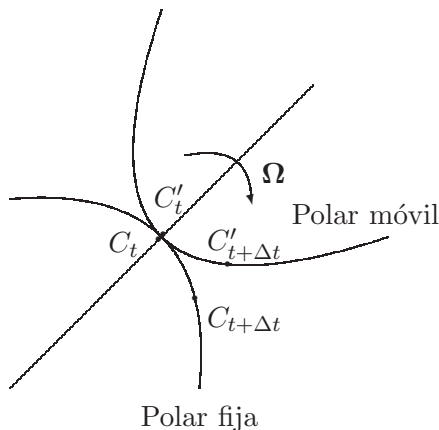


Figura 4.17: Rodadura sin deslizamiento de la polar móvil respecto de la fija.

Las polares sirven para describir el movimiento plano en términos geométricos. Esta descripción se caracteriza por la *propiedad fundamental* de



los polares que establece que, la polar móvil rueda sin deslizar sobre la polar fija, permaneciendo tangente a la misma (figura 4.17). Esta propiedad es inmediato demostrarla, como particularización de la propiedad general de los axoides (apartado 4.3.2), considerando que en el movimiento plano la velocidad de deslizamiento es nula.

### 4.6.3. Aceleraciones

Recordemos la expresión general del campo de aceleraciones (4.20):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho});$$

particularizando para el movimiento plano,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \Omega \mathbf{k}, \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} &= \dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) &= -\Omega^2 \boldsymbol{\rho},\end{aligned}$$

obtenemos la siguiente expresión

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho} - \Omega^2 \boldsymbol{\rho}.} \quad (4.28)$$

Los términos en esta ecuación tienen la siguiente interpretación:

- $\mathbf{a}_O$  es la aceleración de  $O$  (traslación);
- $\dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho}$  es una componente perpendicular al radio vector  $\boldsymbol{\rho}$  (no necesariamente tangencial a la trayectoria, tan sólo lo será en el caso de que  $O$  coincida con el C.I.R.);
- $-\Omega^2 \boldsymbol{\rho}$  es una componente «centrípeta», dirigida hacia  $O$  (dirección que no tiene porqué ser normal a la trayectoria, salvo en el caso arriba mencionado).

El polo de aceleraciones se obtiene igualando a cero la expresión (4.28) y despejando  $\boldsymbol{\rho}$ . Para ello, multiplicamos vectorialmente la igualdad por  $\mathbf{k}$ , y eliminamos  $(\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\rho})$  entre la nueva expresión obtenida y (4.28), resultando finalmente:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{a}_O + \Omega^2 \mathbf{a}_O}{\dot{\Omega}^2 + \Omega^4} \quad (\text{polo de aceleraciones})$$

Otra forma de expresar la aceleración es mediante la consideración del movimiento como una rotación instantánea en torno al C.I.R. (figura 4.18). Así, la velocidad de un punto cualquiera  $P$  es:

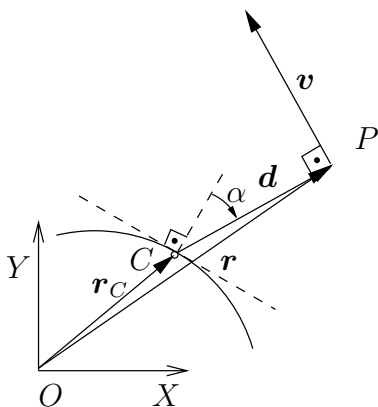


Figura 4.18: Velocidad de un punto cualquiera en relación al C.I.R. ( $C$ ).

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{d} = \Omega \mathbf{k} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C),$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector posición de  $P$ ,  $\mathbf{r}_C$  el del C.I.R. ( $C$ ), y  $\mathbf{d} = \mathbf{CP} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C$ .

Derivando respecto a  $t$ :

$$\mathbf{a} = \dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{d} + \Omega \mathbf{k} \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{v}_C),$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad del punto  $P$  del sólido, mientras que  $\mathbf{v}_C$  es la velocidad de sucesión del punto geométrico  $C$  (C.I.R.)<sup>11</sup>.

Considerando finalmente que  $\mathbf{v} = \Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{d}$ , resulta:

$$\mathbf{a} = \underbrace{\dot{\Omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{d}}_{\text{tangenc.}} - \underbrace{\Omega^2 \mathbf{d}}_{\text{normal}} - \underbrace{\Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_C}_{\text{tangenc.}} + \text{normal} \quad (4.29)$$

**Aceleración del centro instantáneo de rotación.**— Otra consideración interesante surge al desarrollar el campo de aceleraciones en relación al punto material situado en un instante dado sobre el C.I.R. Para diferenciar este *punto material* del sólido del *punto geométrico* C.I.R., denominaremos  $C^*$  al punto material, mientras que el C.I.R. (punto geométrico) es  $C$ . Aunque en un instante dado la posición de ambos coincide ( $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_{C^*}$ ), su

<sup>11</sup>Nótese que  $C$ , Centro Instantáneo de Rotación, queda definido por una condición geométrica, por lo que no coincidirá necesariamente con una misma partícula del sólido a lo largo del movimiento. Sería incorrecto por tanto asignar a la derivada de  $\mathbf{r}_C$  el valor (nulo) de la velocidad del punto del sólido situado en  $C$ . En general,  $d\mathbf{r}_C/dt = \mathbf{v}_C$  tiene un valor no nulo, que para distinguir de la velocidad del punto del sólido, denominamos «velocidad de sucesión».

velocidad difiere:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{v}_{C^*} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

El campo de aceleraciones puede calcularse particularizando la expresión general (4.20) para  $O \equiv C^*$  y  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{d} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C$ ,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{C^*} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{d} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{d}).$$

Otra expresión equivalente para el campo de aceleraciones es la proporcionada por (4.29).

Si se particulariza la expresión (4.29) para el propio centro instantáneo de rotación  $C^*$ , teniendo en cuenta  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ , resulta

$$\mathbf{a}_{C^*} = -\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_C.$$

Como consecuencia, debe quedar claro que, aunque la velocidad del punto del sólido situado en el C.I.R. sea nula ( $\mathbf{v}_{C^*} = \mathbf{0}$ ), su aceleración no tiene porqué ser ( $\mathbf{a}_{C^*} \neq \mathbf{0}$ ). Esto se debe a que el C.I.R. coincide con distintos puntos del sólido en distintos instantes, y una partícula que está situada sobre el C.I.R. en un momento dado dejará de tener velocidad nula al instante siguiente, por lo que su aceleración no será en general nula.

### Circunferencias de aceleraciones

La ecuación (4.29) permite expresar separadamente la aceleración en las direcciones tangencial y normal a la trayectoria (figura 4.19):

$$a_t = \dot{\Omega}d + \Omega v_C \sin \alpha \quad (4.30)$$

$$a_n = \Omega^2 d - \Omega v_C \cos \alpha \quad (4.31)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo formado por la normal común a las polares y  $\mathbf{CP} = \mathbf{d}$ . Por otra parte, se ha tomado como positivo el sentido centrípeto (hacia  $C$ ) para  $a_n$ .

Estas expresiones dan lugar a dos nuevos lugares geométricos.

**Circunferencia de las inflexiones.**— Es el lugar Geométrico de puntos con aceleración normal nula, Aplicando la ecuación (4.31),

$$\Omega^2 d = \Omega v_C \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{v_C}{\Omega} \cos \alpha} \quad (4.32)$$

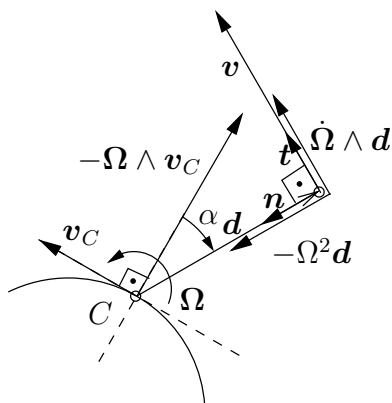


Figura 4.19: Componentes de la aceleración en direcciones normal  $\mathbf{n}$  y tangencial  $\mathbf{t}$ .

En función de las coordenadas polares  $(d, \alpha)$  esta expresión define una circunferencia, de diámetro  $D_n = v_C/\Omega$ , denominada *Circunferencia de inflexiones*. Esta circunferencia es tangente a las 2 polares en el C.I.R. ( $C$ ) (figura 4.20). Es por otra parte el lugar de los puntos del sólido que siguen trayectorias rectas, ya que éstos no tienen aceleración normal.

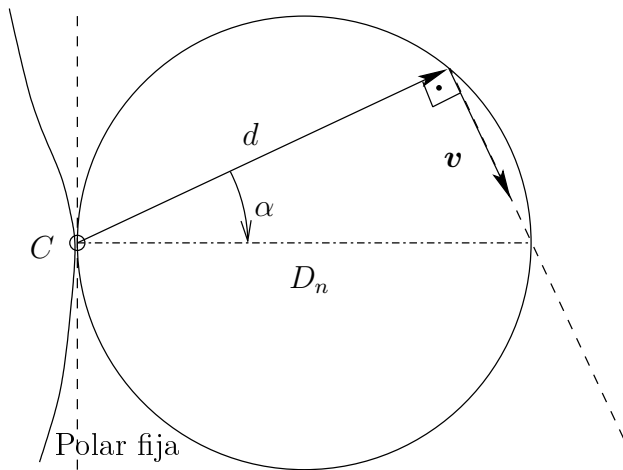


Figura 4.20: Circunferencia de las inflexiones

**Circunferencia estacionaria.**— Es el lugar geométrico de puntos con aceleración tangencial nula. Aplicando la ecuación (4.30),

$$\dot{\Omega}d + \Omega v_C \text{sen } \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -\frac{\Omega v_C}{\dot{\Omega}} \text{sen } \alpha$$

Se trata asimismo de una circunferencia en polares, de diámetro  $D_t = \Omega v_C/\dot{\Omega}$ , denominada *Circunferencia estacionaria*. Es perpendicular a las

polares y a la circunferencia de inflexiones en  $C$  (figura 4.21). En el caso  $\dot{\Omega} = 0$  la circunferencia degenera en una recta perpendicular a las polares.

La intersección de la circunferencia estacionaria y la de las inflexiones es el polo de aceleraciones, en el que las dos componentes de la aceleración se anulan ( $a_n = a_t = 0$ ) (figura 4.23).

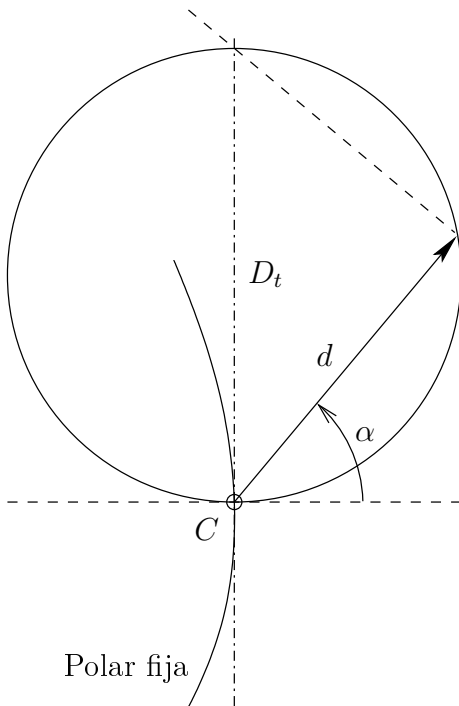


Figura 4.21: *Circunferencia estacionaria*

### Circunferencia de los retrocesos.—

«Todo punto  $Q$  del plano fijo, por el que pase constantemente una recta dada del plano móvil, pertenece a una circunferencia de diámetro  $D_n = v_C/\Omega$ , simétrica a la de las inflexiones respecto a la tangente común a las polares, denominada circunferencia de los retrocesos.»

DEMOSTRACIÓN. Sea  $r$  una recta del plano móvil que pasa constantemente por un punto  $Q$  del plano fijo, y  $Q^* \in r$  el punto del plano móvil que instantáneamente está situado sobre  $Q$  (figura 4.22).

El movimiento real es el del plano móvil al que pertenece  $r$  con respecto al fijo, pero podemos imaginar también el movimiento relativo del plano fijo

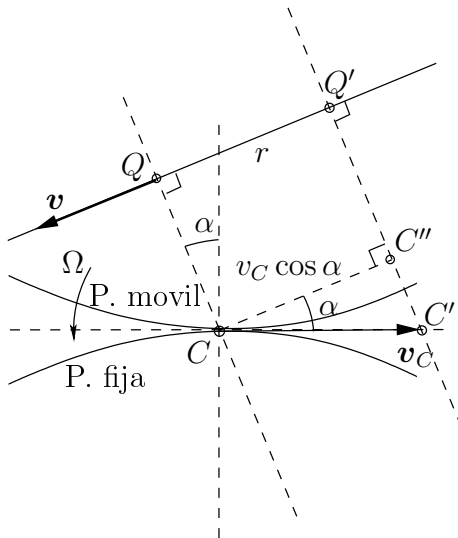


Figura 4.22: Construcción geométrica para la circunferencia de los retrocesos

con respecto al móvil, cuyo campo de velocidades sería igual pero con signo opuesto. En este movimiento con respecto a  $r$ , el punto  $Q$  se traslada según  $r$ , es decir su velocidad lleva la dirección de  $r$ .

Simétricamente, la velocidad del punto del plano móvil  $Q^*$ , al ser igual que la anterior pero con signo cambiado, estará también contenida en la recta  $r$ , no puede tener componente normal a ella.

Por otra parte, la velocidad de  $Q^*$  debe ser perpendicular al segmento desde el centro instantáneo de rotación,  $CQ$ . Adicionalmente, el movimiento de sucesión de  $C$  será tal que constantemente se mantenga esta propiedad; por tanto, en un incremento infinitesimal  $dt$ , suponiendo que  $C$  se traslada a  $C'$  (figura 4.22) el desplazamiento de  $C$  normal a  $QC$ , determinado por el punto  $C''$  en la figura 4.22, está asociado a la velocidad  $v_C \cos \alpha$ . En ese mismo intervalo  $dt$ , en el movimiento relativo a  $r$ , el punto  $Q$  pasaría a  $Q'$ , cumpliéndose  $\overline{QQ'} = -\Omega \overline{QC} dt$ . Puesto que debe cumplirse que  $\overline{QQ'} = \overline{CC''}$ , se concluye que

$$\overline{QC} \Omega = -v_C \cos \alpha.$$

Por tanto, despejando,

$$\overline{QC} = -\frac{v_C}{\Omega} \cos \alpha. \quad (4.33)$$

esta ecuación define una circunferencia en polares, con origen en  $C$ , similar a la de las inflexiones (4.32) salvo por el signo  $-$ , que indica que será simétrica de aquella (figura 4.23).  $\square$

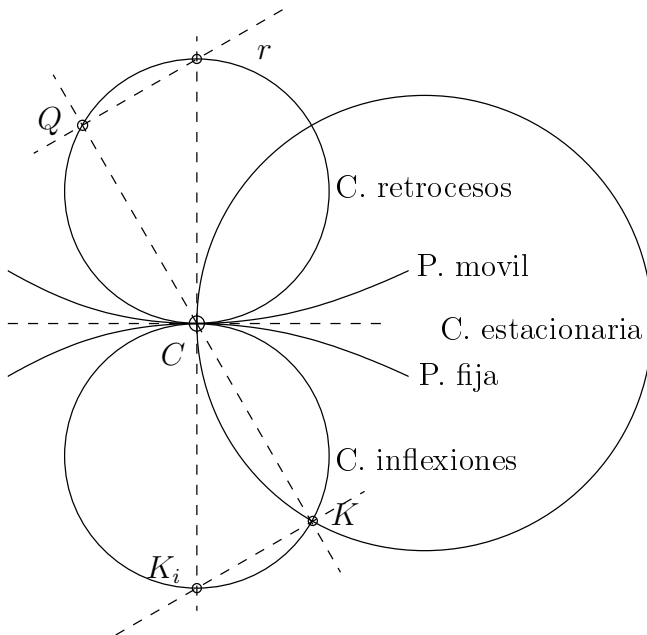


Figura 4.23: Posición relativa de las tres circunferencias en relación con las polares. La intersección de las circunferencias de inflexiones y estacionaria se produce en el polo de aceleraciones  $K$ .

EJEMPLO 4.9: La escalera recta de la figura 4.24 se mueve en un plano vertical, apoyándose sobre la arista superior de un muro vertical de altura  $h$  perpendicular al plano del movimiento, mientras el extremo  $A$  desliza sobre el suelo horizontal con velocidad constante  $v$  dirigida hacia el muro. En el instante inicial la distancia entre el muro y el extremo  $A$  tiene un valor  $b$ . Se pide determinar, en función del ángulo  $\phi$  que forma la escalera con la horizontal:

- Velocidad y aceleración angulares de la escalera;
- Posición del centro instantáneo de rotación y velocidad del punto  $C$  de la escalera;
- Ecuaciones de las polares fija y móvil;
- Circunferencias estacionaria y de las inflexiones, así como el polo de aceleraciones.

*Solución.*

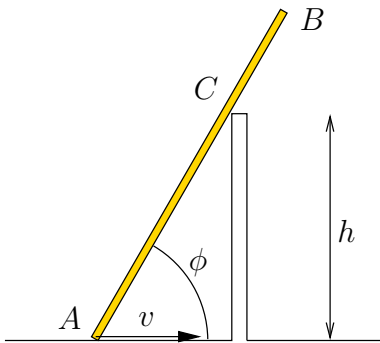


Figura 4.24: *Ejemplo 4.9; escalera que desliza sobre el suelo horizontal y se apoya sobre un muro de altura  $h$ .*

a.— La velocidad del punto  $C$  de la escalera ha de ser paralela a la propia escalera. Como también conocemos la velocidad del punto  $A$ , trazando perpendiculares a ambas se obtiene el C.I.R. que llamaremos  $I$  (figura 4.25). Escribiendo la relación geométrica que define el ángulo  $\phi$  y derivando:

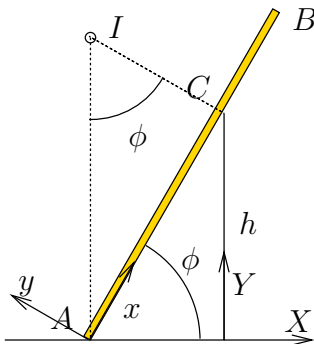


Figura 4.25: *Ejemplo 4.9; El C.I.R. ( $I$ ) se encuentra sobre las perpendiculares a las velocidades de los puntos  $A$  y  $C$  de la escalera.*

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{h}{b - vt} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}(1 + \operatorname{tg}^2 \phi) = \frac{vh}{(b - vt)^2}.$$

De aquí despejamos la velocidad angular  $\Omega = \dot{\phi}$ :

$$\dot{\phi} = \frac{vh}{(b - vt)^2 + h^2}.$$

Derivando una segunda vez se obtiene la aceleración:

$$\ddot{\phi} = \frac{2hv^2(b - vt)}{[(b - vt)^2 + h^2]^2}.$$



Otras expresiones de velocidad y aceleración que resultan convenientes son en función del propio ángulo  $\phi$ :

$$(-X_A) = \frac{h}{\operatorname{tg} \phi} \Rightarrow v = -\frac{h\dot{\phi}}{\operatorname{sen}^2 \phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v}{h} \operatorname{sen}^2 \phi \quad (4.34)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{v}{h} 2\dot{\phi} \operatorname{sen} \phi \cos \phi = 2\frac{v^2}{h^2} \operatorname{sen}^3 \phi \cos \phi \quad (4.35)$$

b.— El centro instantáneo de rotación tiene las coordenadas:

$$\begin{aligned} X_I &= -\frac{h}{\operatorname{tg} \phi} = -(b - vt); \\ Y_I &= \frac{h}{\operatorname{sen}^2 \phi} = \frac{(b - vt)^2 + h^2}{h}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

la velocidad del punto  $C$  de la barra se puede obtener empleando la propiedad de equiproyectividad, con el punto  $A$  de velocidad conocida. Llamando  $\alpha$  al ángulo que forma la velocidad en cada punto con la recta que los une:

$$v_A \cos \alpha_A = v_C \cos \alpha_C \Rightarrow v_C = v \cos \phi.$$

También podría haberse obtenido  $v_C$  considerando que es una rotación alrededor del C.I.R.:

$$v_C = \dot{\phi} \overline{IC} = \dot{\phi} Y_I \cos \phi = v \cos \phi.$$

En expresión vectorial,

$$\mathbf{v}_C = v \cos \phi (\cos \phi \mathbf{I} + \operatorname{sen} \phi \mathbf{J}).$$

c.— La polar fija (base) viene definida por la ecuación del C.I.R. (4.36), de forma paramétrica a través de  $\phi$  (o  $t$ ). Eliminando este parámetro se puede escribir la ecuación implícita:

$$Y = h + \frac{X^2}{h}.$$

Se trata de una parábola de eje vertical cuyo vértice está en  $C$ .

La polar móvil (ruleta) se define a través de las coordenadas del C.I.R. en la referencia móvil ( $Axy$ ):

$$x = \frac{h}{\operatorname{sen} \phi}; \quad y = \frac{x}{\operatorname{tg} \phi} = \frac{h}{\operatorname{sen} \phi \operatorname{tg} \phi}$$

En la figura 4.26 se dibujan las polares en varias configuraciones distintas del movimiento, pudiéndose observar el movimiento de rodadura sin deslizamiento de la polar móvil sobre la fija.

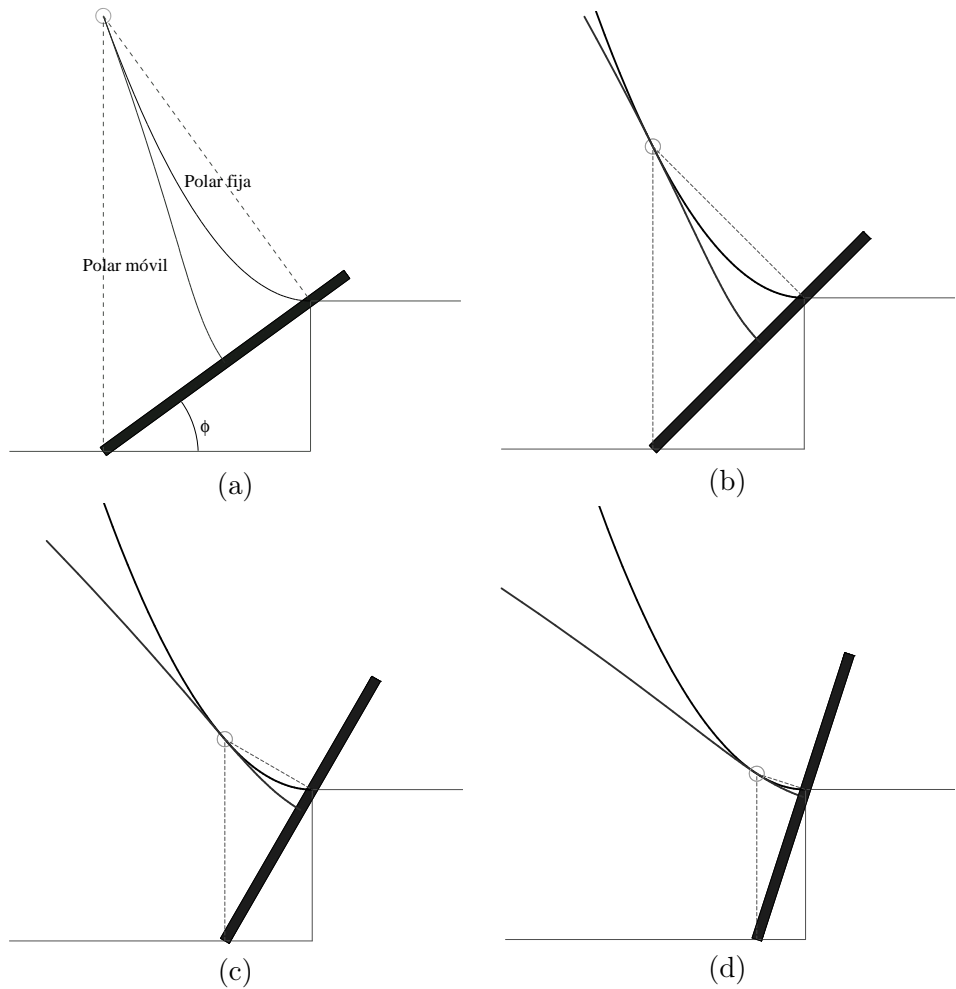


Figura 4.26: *Ejemplo 4.9*; configuración del sistema, C.I.R. y dibujo de las polares fija y móvil en distintas posiciones (a)  $\phi = \pi/5$  (b)  $\phi = \pi/4$  (c)  $\phi = \pi/3$  (d)  $\phi = 2\pi/5$

d.— La circunferencia de inflexiones es el lugar geométrico de los puntos con aceleración normal nula, por tanto pertenecen a ella los puntos que recorren rectas del plano fijo, como es el caso de  $A$ . Por tanto será la circunferencia tangente a las polares en  $I$  y que pase además por el punto  $A$ .

Se puede obtener el diámetro de esta circunferencia mediante la expresión  $D_n = v_I/\dot{\phi}$ . Para obtener la velocidad de sucesión del C.I.R. ( $v_I$ ) derivamos las coordenadas (4.36):

$$v_I = \sqrt{\dot{X}_I^2 + \dot{Y}_I^2} = \dot{\phi} \frac{h}{\text{sen}^3 \phi} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \phi} \Rightarrow D_n = \frac{h}{\text{sen}^3 \phi} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \phi}.$$

La circunferencia estacionaria es el lugar de los puntos con aceleración tangencial nula, luego  $A$  también pertenece a la misma por ser su velocidad constante. La circunferencia queda definida como tangente a la normal común a las polares en  $I$  que pasa por  $A$ . Por tanto  $A$  es el polo de aceleraciones, punto de aceleración nula al ser su velocidad rectilínea y constante.

Podemos también en este caso calcular el diámetro de la circunferencia estacionaria, mediante la expresión

$$D_t = v_I \frac{\dot{\phi}}{\ddot{\phi}} = \frac{h}{2} \frac{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \phi}}{\text{sen}^2 \phi \cos \phi}.$$

En la figura 4.27 se representan ambas circunferencias de aceleraciones junto con las polares, para una configuración dada del sistema. □

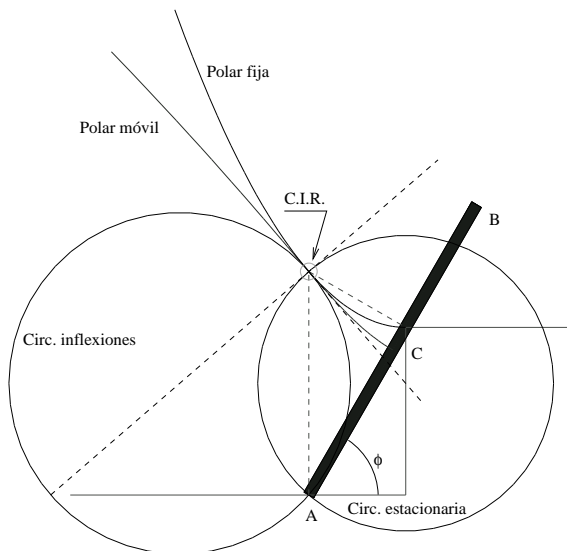


Figura 4.27: Ejemplo 4.9: Circunferencias de aceleraciones para  $\phi = \pi/3$ .

## 4.7. Problemas propuestos.

**Problema 4.1.** Un triángulo rectángulo isósceles desliza con velocidad constante  $v$  sobre un plano horizontal. Un disco de radio  $r$  se apoya sobre ese triángulo y sobre un plano vertical, de forma que no existe deslizamiento en el contacto disco-triángulo. Se pide:

- C.I.R. del disco, velocidad angular del disco y velocidad del centro del disco.
- Velocidad y aceleración del punto más alto del disco.
- Base y ruleta del movimiento absoluto del disco.

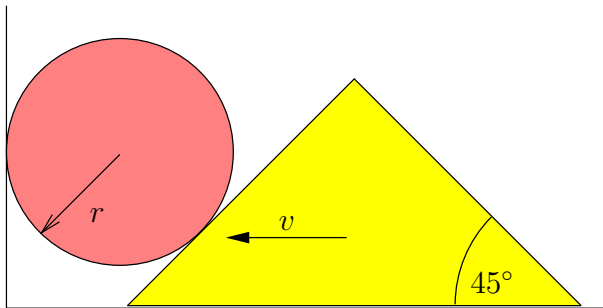


Figura 4.28:  
Problema 4.1

**Problema 4.2.** Un sólido rígido se mueve de forma que dos de sus puntos  $A$  y  $B$  recorren una circunferencia de radio  $R$  con velocidad constante  $v$ , siendo la distancia entre ellos  $\overline{AB} = R$ . Además, el sistema rígido gira en torno de la recta  $AB$  con una velocidad angular  $\Omega = v/R$ . Se pide:

- Determinar para el campo de velocidades el eje del movimiento helicoidal tangente y la velocidad mínima;
- Vector aceleración angular;
- Intersección de los axoides con el plano dado.

(Examen final, 10/1/1994)

**Problema 4.3.** Una escuadra formada por dos varillas perpendiculares soldadas en un extremo  $C$  se mueve de forma que éstas deslizan por dos puntos fijos  $A(-\sqrt{2}a, 0, 0)$  y  $B(\sqrt{2}a, 0, 0)$ . El vértice  $C$  está obligado a moverse en un plano paralelo a  $Oxy$ , a una altura  $a$ , describiendo una circunferencia con centro en el eje  $Oz$ , y a velocidad constante  $v$ . En el instante inicial  $C$  está en el plano  $Oyz$  y su velocidad es positiva según  $Ox$ . Se pide, en ese instante:

- Velocidad angular de la escuadra.

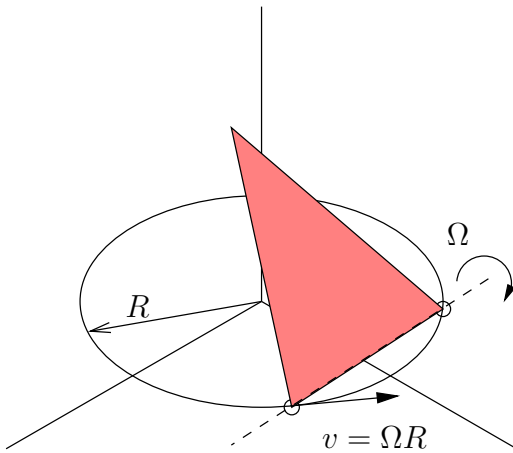


Figura 4.29: Problema 4.2

- b. Velocidad del punto de la varilla sobre  $B$ .
  - c. Velocidad del punto  $M$  intermedio entre  $C$  y  $B$ .
- (Examen final, 16/9/1994)

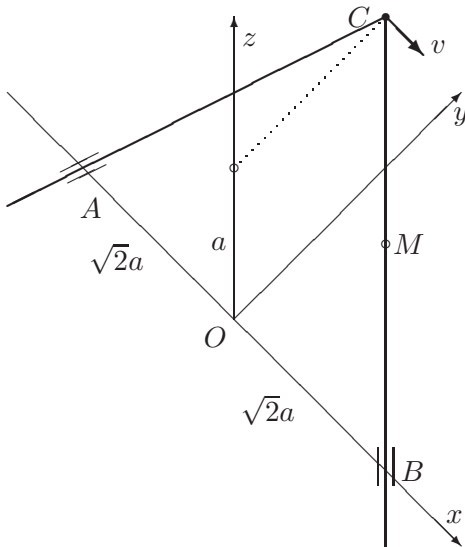


Figura 4.30: Problema 4.3

**Problema 4.4.** Una placa  $ABC$  tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles, con lados  $AB = BC = a\sqrt{2}$ . Se mueve en relación a un triedro  $Oxyz$  de forma que  $A$  desliza sobre el eje  $Oz$ ,  $B$  se mueve sobre una recta horizontal paralela a  $Ox$  que pasa por  $(0, a, 0)$ , según la ley  $x_B = a \text{sen } \omega t$ , y  $C$  se mantiene dentro del plano  $Oxy$ . En el instante inicial ( $t = 0$ )  $A$  está

en el lado positivo de  $Oz$ .

- Obtener la velocidad de  $A$  para un instante  $t$  genérico.
- Sea  $\theta$  el ángulo que forma  $AB$  con el eje  $Oz$  y  $\psi$  el que forma la proyección de  $AB$  sobre  $Oxy$  con  $Ox$ . Obtener las expresiones de ambos en función del tiempo para un instante genérico,  $\theta(t)$  y  $\psi(t)$ .
- Describir el movimiento instantáneo del sólido para un instante genérico, obteniendo la velocidad de rotación  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  y la velocidad mínima o velocidad de deslizamiento.

(Examen final, 16/1/1995)

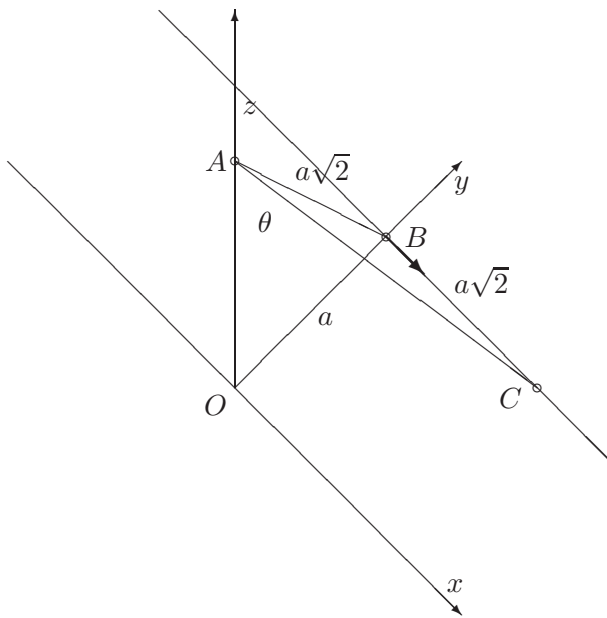


Figura 4.31:  
Problema 4.4; configuración inicial de la placa

**Problema 4.5.** El dispositivo de la figura consta de un eje vertical  $AC$  de longitud  $h$  que gira con velocidad cte  $\dot{\psi}$ . Dicho eje mueve un árbol horizontal  $CD$ , de longitud  $l$ , en cuyo extremo  $D$  se halla un disco con una ranura que gira con velocidad  $\dot{\phi}$  cte respecto al eje  $CD$ . Por la ranura se mueve una partícula  $P$  con velocidad  $v$  en dirección vertical hacia abajo en el instante considerado y aceleración  $a$  vertical hacia arriba en ese mismo instante. Se pide:

- Aceleración angular del disco.
- Considerando la referencia  $\{D, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  solidaria al disco, como sistema de referencia móvil, aceleraciones absoluta, de arrastre, relativa y de Coriolis de  $P$ .

(Examen final, 20/6/1995)

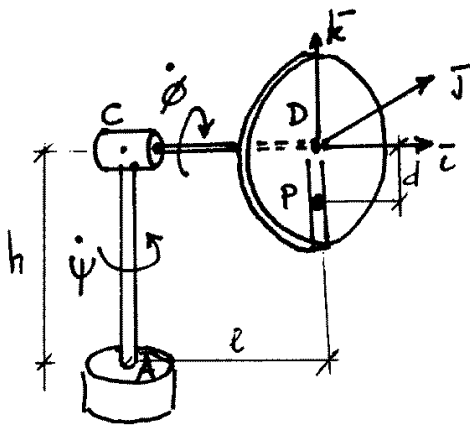


Figura 4.32: Problema 4.5

**Problema 4.6.** Una placa cuadrada  $ABCD$  de lado  $a\sqrt{2}$  se mueve de forma que dos vértices  $A$  y  $B$  describen sendas circunferencias paralelas con el mismo eje, de radios  $2a$  y  $a$  respectivamente, situada esta última a una distancia  $a$  de la primera. La velocidad con que recorre el punto  $B$  la circunferencia superior es constante, y vale  $v_B = a\omega$ . Al tiempo, la placa gira alrededor del eje  $AB$  con velocidad angular  $\omega$ . Se pide:

- velocidad y aceleración angular de la placa;
- definir el movimiento helicoidal tangente (eje y velocidad mínima);
- en una posición en que  $B$  y  $C$  se hallen en el plano  $Oyz$ , obtener la aceleración del punto  $C$ .
- axoides del movimiento.

(Examen final, 19/1/1996)

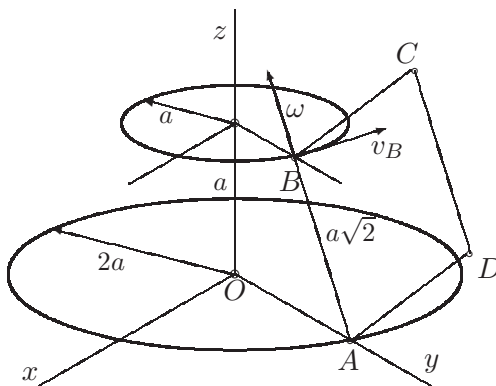


Figura 4.33: Problema 4.6

**Problema 4.7.** En el sistema mecánico de la figura (correspondiente a un rodamiento de bolas) el cilindro de radio interior  $3R$  y el cono de semiángulo  $30^\circ$  son coaxiales y giran respecto de su eje independientemente. Entre los dos está encajada una esfera de radio  $R$  que rueda sin deslizar sobre el plano fijo inferior, apoyándose asimismo en el cono y en el cilindro sin deslizamiento. El movimiento de éstos es tal que los puntos de contacto  $A$  y  $B$  tienen constantemente velocidades  $-V$  y  $+V$  respectivamente (positivas en sentido hacia fuera del plano del papel). Se pide, justificando adecuadamente:

- describir el movimiento, discutiendo si el eje del movimiento helicoidal tangente corta al eje del cono en un punto fijo y definiendo los axoides;
  - velocidades angulares de rodadura y pivotamiento de la esfera sobre el plano inferior, así como la velocidad del centro ( $C$ ) de ésta;
  - aceleración angular de la esfera;
  - aceleración del punto de la esfera en contacto con el plano;
- (Examen parcial, 9/2/1996)

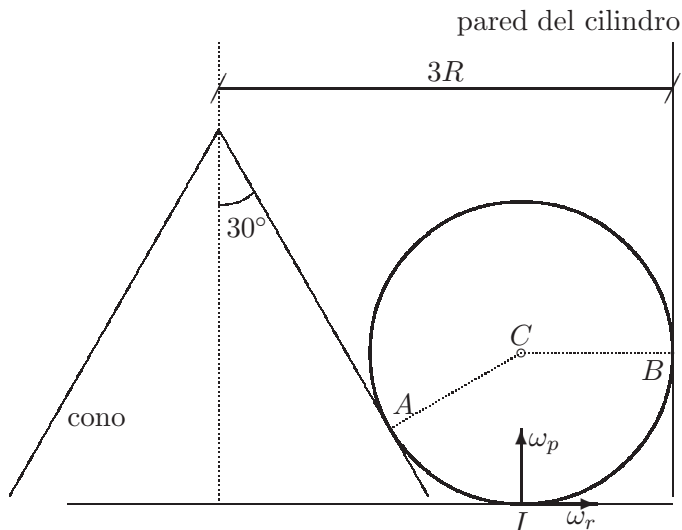


Figura 4.34:  
Problema 4.7

**Problema 4.8.** Un plano gira alrededor de un eje perpendicular por uno de sus puntos  $P$  con velocidad constante  $\Omega$ , mientras que  $P$  se traslada con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, de aceleración  $a$ . Se pide:

- Posición del centro instantáneo de rotación (C.I.R.) en un instante genérico
- Lugar geométrico que describe el C.I.R., respecto a las referencias fija ( $OXY$ ) y móvil ( $Pxy$ ) (polares).



- c. Lugar geométrico de los puntos del plano móvil con aceleración normal nula.
- d. Lugar geométrico de los puntos del plano móvil con aceleración tangencial nula.

(Examen final, 1988)

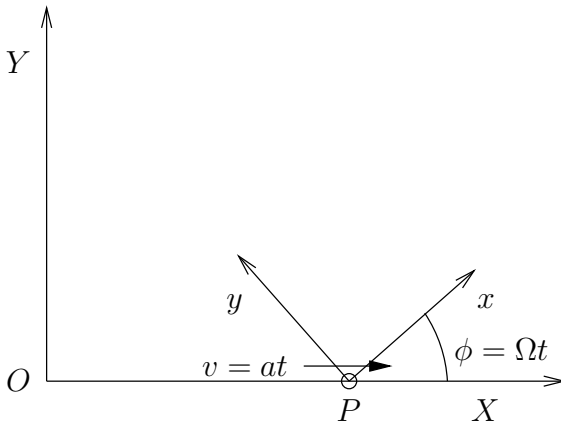


Figura 4.35:  
Problema 4.8

**Problema 4.9.** Un segmento de longitud  $l$  se mueve de forma que sus extremos  $A$  y  $B$  recorren dos rectas fijas  $r$  y  $r'$  que forman entre sí un ángulo  $\alpha$ . La velocidad del extremo  $A$  es constante y de valor  $v$ . Se pide:

- a. Obtener el centro instantáneo de rotación (C.I.R.) en una posición genérica.
- b. Lugar geométrico que describe el C.I.R., respecto a las referencias fija (rectas) y móvil (segmento) (polares).
- c. Velocidad de  $B$  y aceleración del punto del plano móvil situado sobre el C.I.R. en un instante genérico.
- d. Lugar geométrico de los puntos del plano móvil con aceleración normal nula.

**Problema 4.10.** El sistema de la figura está formado por una barra  $AB$  que se mueve permaneciendo tangente a un disco  $C$  fijo. La barra  $AB$  está inicialmente horizontal como se representa. El punto  $A$  comienza a ascender ligado al eje de ordenadas  $Y$  con aceleración  $a$  positiva y constante. Se pide calcular en un instante genérico:

- a. Velocidad y aceleración del punto de contacto de la barra con el disco en función del ángulo  $\theta$  que la barra forma con la vertical.
- b. Posición del C.I.R. y polares del movimiento de la barra.

- c. Particularizar los resultados anteriores para  $\theta = \pi/3$ .

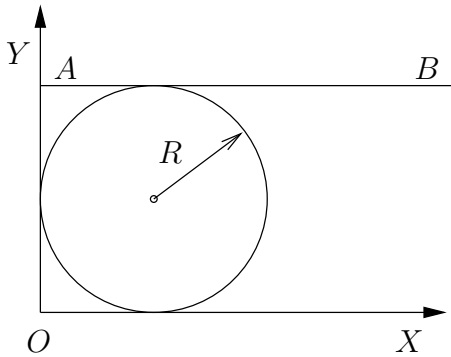


Figura 4.36: Problema 4.10

**Problema 4.11.** Un cono de vértice  $A$ , base circular  $BC$  de radio  $\overline{DB} = 2a/\sqrt{3}$  y altura  $\overline{DA} = a$  se mueve en el espacio de forma que la circunferencia del borde de la base del cono rueda sin deslizar sobre una circunferencia fija de radio  $\overline{OB} = 2a$  con centro  $O$ . Este punto  $O$  es a su vez el centro de una esfera de radio  $a$  en la que se apoya y desliza la base del cono. El movimiento del cono es tal que su vértice  $A$  describe otra circunferencia de centro  $O'$  y radio  $(3/2)a$  (en un plano paralelo a la de centro  $O$ ), con movimiento uniforme de periodo  $\tau$ , de forma que el eje  $DA$  del cono se mantiene en todo momento dentro del plano vertical por  $OB$ . Del movimiento así definido se pide:

- velocidad del punto  $C$  del cono (diametralmente opuesto a  $B$ ) y aceleración del vértice  $A$  del mismo;
- velocidad y aceleración angular del cono;
- Axoides del movimiento.

(Examen final, 28/6/96)

**Problema 4.12.** Se da un conjunto de cuatro varillas  $AB, BC, CD, DE$  articuladas entre sí, cuyas longitudes son:  $\overline{AB} = \overline{DE} = b$ ;  $\overline{BC} = \overline{CD} = 2b$ . Se mueve cumpliendo las siguientes condiciones: 1) el extremo  $A$  permanece fijo; 2) el extremo  $E$ , así como los puntos medios de  $BC$  y  $CD$ , recorren una recta fija  $r$ , que pasa por  $A$ ; 3) la varilla  $AB$  tiene en todo instante una velocidad angular con dos componentes constantes, según  $r$ , de valor  $\Omega_1$ , y según la normal al plano determinado por  $AB$  y  $r$ , de valor  $\Omega_2$ . Se pide:

- Determinar los axoides fijo y móvil del movimiento de  $AB$ .
- Definir completamente los movimientos relativos, respecto de  $AB$ , de las varillas  $CD$  y  $DE$ .

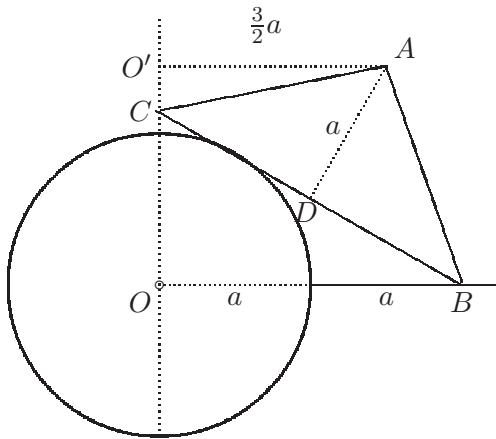


Figura 4.37: Problema 4.11

- c. Calcular la velocidad y la aceleración absolutas del punto  $P$  de corte de las rectas soporte de  $AB$  y  $DE$ .

(Examen final, 16/9/96)

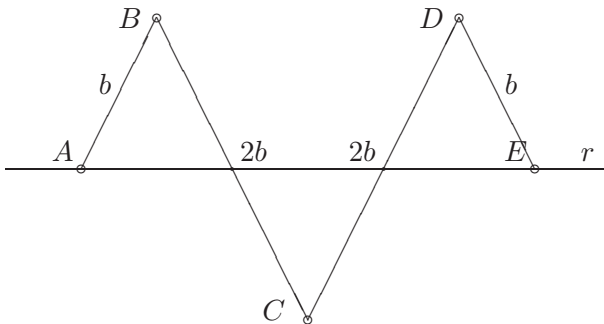


Figura 4.38: Problema 4.12

**Problema 4.13.** En el mecanismo plano de la figura, la barra  $OA$  gira alrededor del punto fijo  $O$  con velocidad angular  $\dot{\phi} = \text{cte}$ . Un disco de radio  $R$  se mueve de forma que desliza sobre el eje  $X$  a la vez que rueda sin deslizar sobre la barra  $OA$ . Se pide:

- Velocidad y aceleración angular del disco.
- Velocidad y aceleración del centro  $C$  del disco.
- Ecuación de la polar fija referida a  $OXY$ .
- Velocidad y aceleración del punto  $B$  cuando la barra forma  $60^\circ$  con la horizontal.

**Problema 4.14.** Se considera un sistema compuesto por una mesa giratoria y un disco que se apoya en ella, como muestra la figura adjunta. La mesa

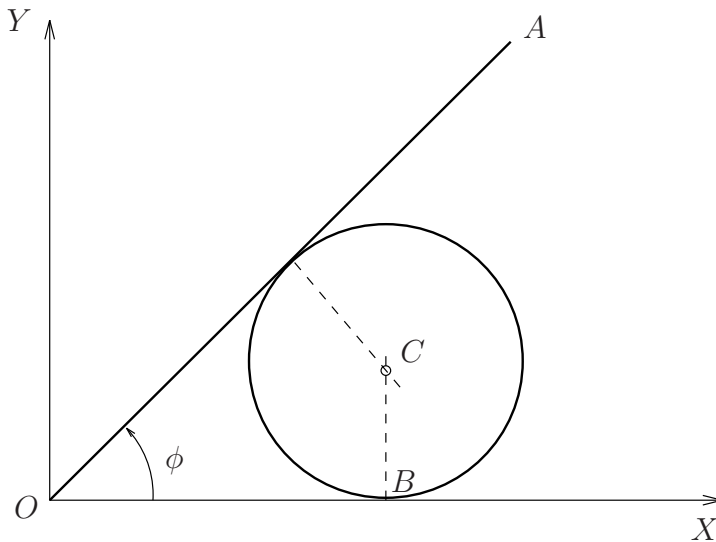


Figura 4.39:  
Problema  
4.12

gira con velocidad  $\omega_1$  constante alrededor de un eje vertical. Además, existe un árbol vertical  $OO'$  que gira con velocidad  $\omega_2$  constante. El disco, de masa  $m$  y radio  $R$ , está ligado al árbol  $OO'$  por un eje  $OO''$  de longitud  $L$  y masa despreciable que pivota sin rozamiento en el punto  $O$ . La altura sobre la mesa del punto  $O$  es tal que el eje  $OO''$  forma un ángulo  $\alpha$  con la vertical. El disco rueda sin deslizar sobre la mesa, y se admite que no llega nunca a levantarse sobre ella.

Adicionalmente, se define el triedro  $S$  formado por los vectores  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , siendo  $\mathbf{i}$  el versor según un diámetro horizontal del disco,  $\mathbf{j}$  según un diámetro de máxima pendiente del disco, y  $\mathbf{k}$  el eje normal al disco. Se pide:

- Expresar la velocidad del centro  $O''$  del disco.
- Expresar la velocidad de rotación del disco, tanto relativa a la mesa giratoria como absoluta, mediante sus componentes en el triedro  $S$ .
- Describir el lugar geométrico que define el eje de rotación, tanto relativo al disco móvil como en una referencia absoluta (axoides).
- Expresar la aceleración angular absoluta del disco.
- Expresar el momento en el punto  $O$  de las fuerzas aplicadas al disco, considerando que la reacción de la mesa móvil sobre el disco es normal a la mesa.

(Examen final, 30/1/1999)

**Problema 4.15.** Un disco circular homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$  rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, de forma que mantiene en todo

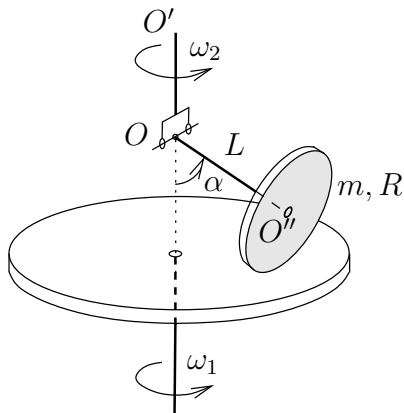


Figura 4.40: Problema 4.14

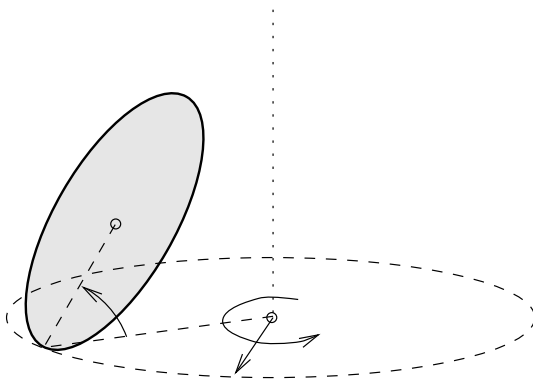


Figura 4.41: Problema 4.15

momento una inclinación constante de  $45^\circ$ , y el punto de contacto con el plano describe sobre él una circunferencia de radio  $a = R(1 + \sqrt{3})/\sqrt{2}$  con velocidad uniforme de valor  $a\omega$ . Suponiendo el movimiento dado del disco sin atender a sus causas:

- describir el campo de velocidades del disco, especificando el eje del movimiento helicoidal tangente, la velocidad de rotación y la velocidad mínima;
- calcular la aceleración angular del disco y la aceleración de su centro;
- calcular la velocidad y aceleración del punto del disco que en un instante dado se encuentra en el extremo superior de su perímetro.



## Capítulo 5

# Fuerzas centrales y órbitas gravitatorias

En este capítulo empezaremos a tratar sistemas dinámicos de varias partículas, comenzando por los más sencillos: aquellos que están constituidos por dos cuerpos o a lo sumo tres, sometidos a fuerzas internas centrales. Como aplicación importante surge el movimiento en órbitas gravitatorias, aspecto que históricamente ha jugado un papel central en el desarrollo de la mecánica, y continúa siendo relevante en la actualidad con el progreso de la tecnología espacial.

Admitiremos las siguientes hipótesis simplificadoras a lo largo de este capítulo.

1. Se puede despreciar el efecto del resto de los cuerpos del universo por su lejanía. Así, nuestro estudio se limitará a dos cuerpos (sistema binario) o tres cuerpos (sistema ternario).
2. Es válido idealizar los cuerpos como partículas puntuales. Es posible demostrar que, para el caso de esferas homogéneas en campos gravitatorios, el efecto es equivalente al de toda la masa concentrada en el centro, independientemente del tamaño. Sin embargo, en un caso real en que los cuerpos no sean exactamente esféricos se cometerá un pequeño error.

### 5.1. Reducción del sistema binario

Sea un sistema binario aislado, formado por dos cuerpos de masas  $m_0$  y  $m_1$ , sometidos únicamente a las fuerzas internas ejercidas entre ellos,

descritos en una referencia inercial ( $I$ ) por sus vectores de posición  $\mathbf{r}_0$  y  $\mathbf{r}_1$  respectivamente.

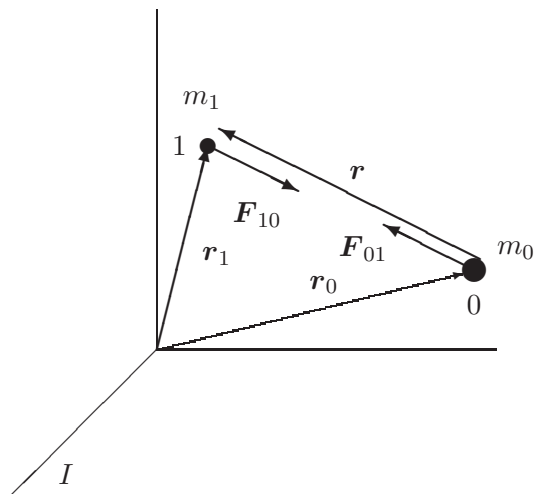


Figura 5.1: Sistema binario aislado formado por dos cuerpos de masas  $m_0$  y  $m_1$ .

Las ecuaciones del movimiento son:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{10}; \quad m_0 \ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{F}_{01} = -\mathbf{F}_{10} \quad (5.1)$$

donde  $\mathbf{F}_{10}$  es la fuerza ejercida sobre  $m_1$  por  $m_0$ , y viceversa. Sumando las dos ecuaciones se obtiene

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_0 \ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}. \quad (5.2)$$

Definimos el centro de masa por:

$$\mathbf{r}_G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_0 \mathbf{r}_0}{m_1 + m_0} \quad (5.3)$$

cumpliéndose entonces, en virtud de (5.2),  $\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{0}$ : el centro de masa se mueve con velocidad rectilínea y uniforme. Buscaremos entonces la ecuación de la dinámica para el movimiento relativo; definiendo

$$\mathbf{r} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \quad (5.4)$$

mediante las ecuaciones (5.1) se llega a

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m_1} \mathbf{F}_{10} - \frac{1}{m_0} \mathbf{F}_{01} = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \mathbf{F}_{10}. \quad (5.5)$$



El cociente  $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}$  se denomina *masa reducida*, y permite interpretar el movimiento relativo de  $m_1$  respecto de  $m_0$  expresado por (5.5), para una fuerza dada, como si su masa tuviese este valor  $\mu$ .

Conviene observar que la ecuación (5.5) expresa la dinámica en un sistema de referencia no inercial ( $R$ ), con origen en  $m_0$  y ejes paralelos al inercial  $I$ . Por este motivo, sería incorrecto establecer la ecuación fundamental de la dinámica directamente empleando la aceleración relativa a este sistema. Sin embargo, el resultado obtenido permite reducir el movimiento relativo en el sistema binario, pudiendo estudiarse como si fuera inercial, es decir, como si la masa  $m_0$  fuese fija, sin más que cambiar  $m_1$  por la masa reducida  $\mu$ .

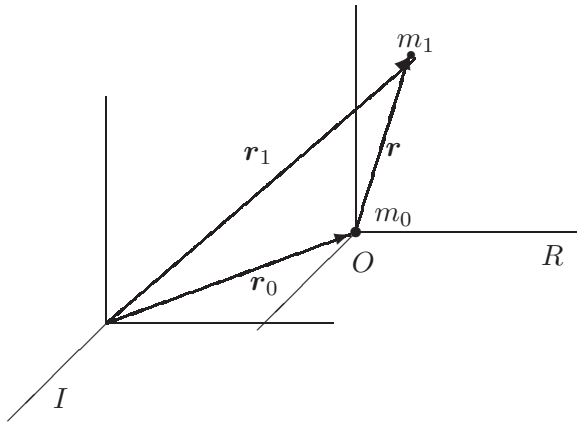


Figura 5.2: Sistema binario; referencias inercial  $I$  y relativa a  $m_0$  (no inercial),  $R$ .

Otro resultado interesante se puede obtener al expresar la energía cinética  $T = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_0\dot{\mathbf{r}}_0^2$  eliminando  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_0$  en función de  $\mathbf{r}_G$  y  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_G + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{r}; \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_G - \frac{\mu}{m_0}\mathbf{r}$$

resultando finalmente

$$T = \frac{1}{2}(m_0 + m_1)\dot{\mathbf{r}}_G^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2.$$

Esta expresión descompone la energía cinética en dos términos, uno correspondiente al movimiento del centro de masas, caracterizado por la masa total  $(m_0 + m_1)$ , y otro del movimiento relativo caracterizado por la masa reducida  $\mu$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Esta expresión resulta ser la aplicación a este caso del Teorema de König, que se verá más adelante (capítulo 6, ecuación (6.25))

### 5.1.1. Sistema binario gravitatorio

Consideramos ahora el caso particular de un sistema formado por dos cuerpos de masas  $M$  y  $m$ , que se atraen mediante fuerzas de tipo gravitatorio (figura 5.3). La *ley de la gravitación universal* de Newton (apartado 1.6, ecuación (1.3)) establece esta atracción mutua como proporcional a las masas y al inverso del cuadrado de la distancia. En nuestro caso, las fuerzas ejercidas entre  $M$  y  $m$  son:

$$\mathbf{F}_{mM} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}; \quad \mathbf{F}_{Mm} = -\mathbf{F}_{mM} = G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r} \quad (5.6)$$

**Reducción al movimiento relativo a uno de los cuerpos.**— Sustituyendo en la ecuación del sistema reducido (5.5) el valor de esta fuerza gravitatoria,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{M+m}{mM} \left( -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r} \right) = -G \frac{M+m}{r^3} \mathbf{r}. \quad (5.7)$$

Se observa pues que es posible estudiar el movimiento relativo de  $m$  respecto a  $M$  a todos los efectos, como si  $m$  estuviera atraída gravitatoriamente por una *masa eficaz*, fija, de valor  $(M+m)$ , situada en el lugar de  $M$ .

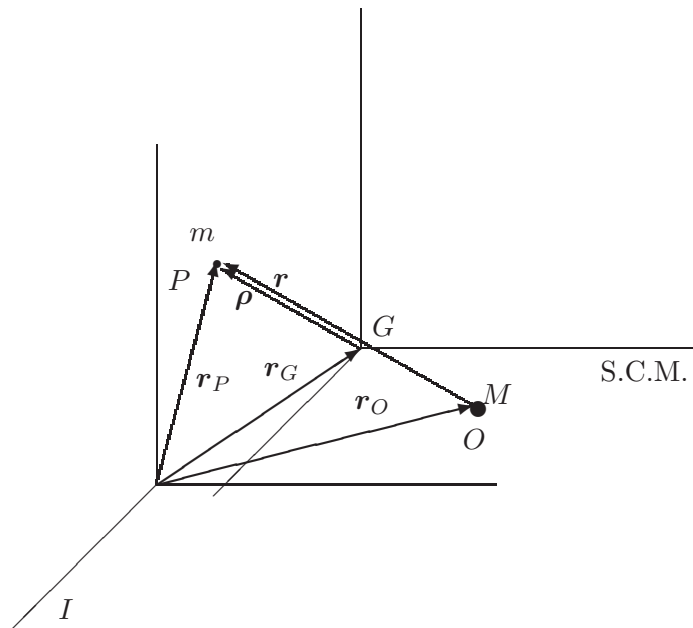


Figura 5.3: Sistema binario gravitatorio; referencias relativas a la masa  $M$  y al centro de masa  $G$  (S.C.M.).

**Reducción al centro de masas.**— Para el sistema gravitatorio anterior, el centro de masas ( $G$ ) queda definido por (5.3). Es posible estudiar el movimiento relativo a  $G$ , tomando un sistema de referencia con origen en  $G$  y direcciones paralelas al inercial, que llamaremos «Sistema del Centro de Masa» (S.C.M.). A diferencia del caso anterior (reducción al movimiento relativo respecto de una masa), si el sistema binario está aislado, este sistema sí será inercial, ya que se deduce inmediatamente de (5.2) y (5.3) que  $\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{0}$ .

Medida en el S.C.M., la posición de un punto genérico  $P$  es:

$$\boldsymbol{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_G; \quad (5.8)$$

empleando (5.3) se obtiene

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_P - \frac{M\mathbf{r}_O + m\mathbf{r}_P}{M+m} = \frac{M\mathbf{r}}{M+m}, \quad (5.9)$$

donde  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O$ . Empleamos ahora la ecuación (5.7), en la cual eliminamos  $\mathbf{r}$  en favor de  $\boldsymbol{\rho}$  mediante (5.9):

$$\frac{M+m}{M} \ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{G(M+m)}{\left(\frac{M+m}{M}\rho\right)^3} \frac{M+m}{M} \boldsymbol{\rho},$$

resultando finalmente:

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -G \frac{M^3/(M+m)^2}{\rho^3} \boldsymbol{\rho}}. \quad (5.10)$$

Por tanto el movimiento equivale también en esta referencia a una atracción gravitatoria hacia una masa ficticia situada en  $G$ , como si estuviese fija, de valor:  $M^* = M^3/(M+m)^2$ . A este movimiento relativo habrá que sumar el propio de  $G$ .

Esta última reducción del movimiento<sup>2</sup> presenta la ventaja de que  $G$  a menudo tiene un movimiento conocido, al menos de manera aproximada. Por ejemplo, en un sistema aislado,  $G$  se mueve con velocidad rectilínea y uniforme. Sin embargo, la interpretación es menos intuitiva que si el movimiento se refiere a una de las dos masas, ya que  $G$  no coincide con ningún punto material fijo; su posición se puede calcular, pero no corresponde a ningún punto «físico» observable como tal.

<sup>2</sup>Otra manera de obtener la reducción (5.10) es, considerando que para un sistema aislado el S.C.M. es inercial, por lo que es válida la ecuación  $m\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -GmM\mathbf{r}/r^3$ ; empleando (5.9) se llega a  $\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -[GM^3/(M+m)^2] \boldsymbol{\rho}/\rho^3$ .

## 5.2. Movimiento bajo fuerzas centrales

Las fuerzas gravitatorias son un caso particular de fuerzas centrales. Veamos, en primer lugar, algunas propiedades generales del movimiento para este tipo de fuerzas. Todo lo que sigue es aplicable para una fuerza central desde un punto fijo, o bien aplicando alguna de las reducciones anteriores, desde otra masa o desde el centro de masas.

### 5.2.1. Propiedades del movimiento

Consideraremos fuerzas centrales aquellas que están dirigidas constantemente hacia un centro  $O$ , y toman la forma general

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (5.11)$$

donde  $F(r)$  es una función escalar de  $r = |\mathbf{r}|$  que supondremos al menos continua.

Es inmediato comprobar que las fuerzas centrales siempre derivan de un potencial, definido por

$$V(r) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{r_0}^r F(r) dr, \quad (5.12)$$

integral que existe siempre al ser  $F(r)$  continua. Si además el potencial es un campo constante (es decir,  $\partial V/\partial t = 0$ ) las fuerzas centrales serán además conservativas.

Otra característica importante de las fuerzas centrales es que el momento de  $\mathbf{F}$  respecto del centro  $O$  es nulo, por lo que se conserva el momento cinético:

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v} = \mathbf{cte}.$$

Recordemos (ver apartado 2.1.2) las dos propiedades que se deducen de esta conservación:

1.  $\mathbf{r}$  es perpendicular al vector constante  $\mathbf{H}_O$ , por lo que la *trayectoria está contenida en un plano*.
2. El módulo  $|\mathbf{H}_O| = H_O$ , también constante, es igual a:

$$H_O = m \frac{|\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}|}{dt} = 2m \frac{dS}{dt}$$

Siendo  $dS$  el elemento diferencial de área barrida en  $dt$ . Así, podemos afirmar que *la velocidad aerolar es constante*. La manera usual de

expresar esta última propiedad es mediante la «constante de las áreas» ( $C$ ), definida como:

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{H_O}{m} = 2 \frac{dS}{dt} \quad (5.13)$$

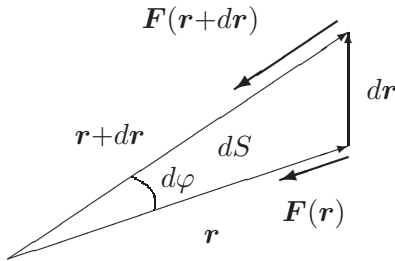


Figura 5.4: Velocidad areolar bajo fuerzas centrales.

### 5.2.2. Ecuaciones del movimiento

Expresamos la posición mediante las coordenadas polares ( $r, \varphi$ ) tomando como origen el centro de fuerzas  $O$ .

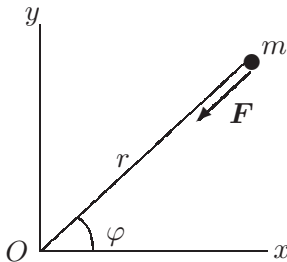


Figura 5.5: Coordenadas polares para el movimiento de  $m$  atraída desde  $O$ .

La constancia de la velocidad areolar (5.13) da lugar a la siguiente ecuación:

$$dS = \frac{1}{2} r (r d\varphi) \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = r^2 \dot{\varphi}.} \quad (5.14)$$

Se obtiene otra ecuación al aplicar la ley fundamental de la dinámica en la dirección (radial) de la fuerza:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m \left( \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} \right) = F(r).} \quad (5.15)$$

A esta expresión se podría haber llegado igualmente a partir de la ecuación de la energía cinética (2.6) (ejercicio que se deja para el lector).

Las expresiones (5.14) y (5.15) son ecuaciones diferenciales del movimiento en función de las variables  $r$  y  $\varphi$ . Cabe resolverlas de dos maneras:

1. En función de  $t$ , para hallar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria (*Ecuaciones horarias*):  $r = r(t)$ ;  $\varphi = \varphi(t)$ .
2. Eliminando  $t$ , para hallar la ecuación intrínseca de la trayectoria:  $r = r(\varphi)$ .

Plantaremos a continuación un método general para resolver las ecuaciones diferenciales anteriores, válido para fuerzas centrales (5.11) en general, reduciendo el problema a cuadraturas. Recordemos en primer lugar, que según lo expuesto en el apartado 5.2.1, las fuerzas centrales provienen siempre de un potencial:

$$F(r) = -\frac{dV(r)}{dr}.$$

Admitiendo que  $\partial V/\partial t = 0$ , podemos expresar la conservación de la energía total  $E \stackrel{\text{def}}{=} T + V$ :

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \overbrace{r^2\dot{\varphi}^2}^{C^2/r^2}) + V(r),$$

de donde, despejando  $\dot{r}$ ,

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - C^2/r^2}. \quad (5.16)$$

Integrando esta expresión se obtiene:

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - C^2/r^2}}.$$

Una vez realizada esta última integral (o cuadratura) para obtener  $t(r)$ , invirtiendo obtendríamos  $r(t)$ , y entrando en la ecuación (5.14), mediante una cuadratura adicional, se obtendría  $\varphi(t)$ .

Para obtener la ecuación implícita de la trayectoria, se podría eliminar  $t$  de la siguiente manera:

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} dr$$

y eliminando  $\dot{\varphi}$  a partir de (5.14),

$$d\varphi = \frac{C/r^2}{\dot{r}} dr.$$

Empleando la expresión anterior (5.16) para  $\dot{r}$  e integrando se llega a

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{C \, dr}{\pm r^2 \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - C^2/r^2}}.$$

Resolviendo esta integral obtendríamos  $\varphi(r)$ , e invirtiendo,  $r(\varphi)$ .

El procedimiento expuesto permite resolver el movimiento reduciéndolo a cuadraturas, en un caso general de fuerzas centrales.

### 5.2.3. Fórmula de Binet

Expondremos a continuación otro procedimiento para resolver las ecuaciones diferenciales (5.14) y (5.15). Este procedimiento da lugar a la denominada *fórmula de Binet*, que resulta especialmente útil para el caso de fuerzas gravitatorias, como se verá más abajo.

Para ello, efectuaremos un cambio de variable, de  $r$  a  $u = 1/r$ . Expresemos en primer lugar la derivada de la nueva variable  $u$  respecto a  $\varphi$ :

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \underbrace{=}_{C=r^2\dot{\varphi}} -\frac{\dot{\varphi} \, dr}{C \, d\varphi} \underbrace{=}_{\frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{dt}} -\frac{\dot{r}}{C};$$

despejando de aquí  $\dot{r}$  y derivando de nuevo respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left[ -C \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) \right] = -C \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) \dot{\varphi} \\ &= -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Empleando esta expresión podemos eliminar  $\ddot{r}$  de la ecuación (5.15), obteniendo

$$F(r) = m \left[ -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{C^2}{r^3} \right],$$

o bien,

$$\boxed{F(r) = -\frac{mC^2}{r^2} \left[ \frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) \right]}. \quad (\text{Fórmula de Binet}) \quad (5.17)$$

### 5.3. Órbitas gravitatorias

La fórmula de Binet (5.17) es válida para cualquier tipo de fuerza central. En el caso de las fuerzas gravitatorias, si se particulariza para

$$F(r) = -G \frac{Mm}{r^2},$$

se obtiene la *Ecuación diferencial de la órbita gravitatoria*:

$$\boxed{\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{C^2}}$$

Como se ve, resulta una ecuación diferencial lineal en  $1/r$ , de segundo orden, análoga a la ya conocida del oscilador armónico (capítulo 3). Tan sólo cambia la variable, que ahora es  $u = 1/r$ . La solución general para esta ecuación es:

$$\frac{1}{r} = \underbrace{A \cos \varphi}_{\substack{\text{sol. gral.} \\ \text{homogénea}}} + \underbrace{\frac{GM}{C^2}}_{\substack{\text{sol. part.} \\ \text{completa}},$$

donde al integrar hemos elegido convenientemente el origen de ángulos, sin pérdida de generalidad, considerando  $\varphi_0 = 0$ . Transformando ligeramente los parámetros en esta expresión, se obtiene:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}}, \quad (5.18)$$

siendo  $p \stackrel{\text{def}}{=} C^2/(GM)$ ,  $e \stackrel{\text{def}}{=} AC^2/(GM)$ .

La ecuación (5.18) es la expresión general de una cónica en coordenadas polares. En ésta  $r$  representa la distancia al foco ( $F$ ) de la cónica, y  $\varphi$  el ángulo con el eje focal ( $FF'$ ).  $p$  es el llamado *parámetro* de la cónica, y  $e$  la *excentricidad* de la misma. El valor de esta última caracteriza el tipo de cónica:

$$\begin{aligned} 0 \leq e < 1 &: \text{ elipse } (e = 0 : \text{ circunferencia}) \\ e = 1 &: \text{ parábola} \\ e > 1 &: \text{ hipérbola} \end{aligned}$$

Otra forma de definir con carácter general una cónica es como el lugar geométrico de los puntos  $X$  cuyas distancias respecto a uno dado (foco  $F$ ) y a una recta dada (directriz  $d$ ) estén en una relación constante e igual a  $e > 0$ :

$$\frac{\text{dist}(X, F)}{\text{dist}(X, d)} = e.$$



Tanto la elipse como la hipérbola son curvas simétricas respecto a un eje perpendicular al plano focal, con un centro ( $O$ ) y dos focos ( $F, F'$ ). El eje focal se denomina también mayor, y el eje perpendicular a éste por su centro se denomina menor o secundario. Se llaman vértices de la cónica a los puntos de la misma sobre los ejes. La distancia de un eje focal al vértice correspondiente se llama *semieje mayor*,  $a$ . La semidistancia focal se denomina  $c$ , cumpliéndose  $c = ae$ .

**Elipse.**— En el caso de trayectoria elíptica, la masa atractora, situada en el origen de las coordenadas polares, corresponde a uno de los focos de la elipse. Se puede definir ésta de una manera general como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos  $F$  y  $F'$  (focos) es constante:  $PF + PF' = 2a$ . A continuación se resumen algunas relaciones geométricas útiles para la elipse (ver también la figura 5.6):

$$a = p/(1 - e^2); \quad c = ae$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1 - e^2) = pa$$

$$\text{Area} = \pi ab$$

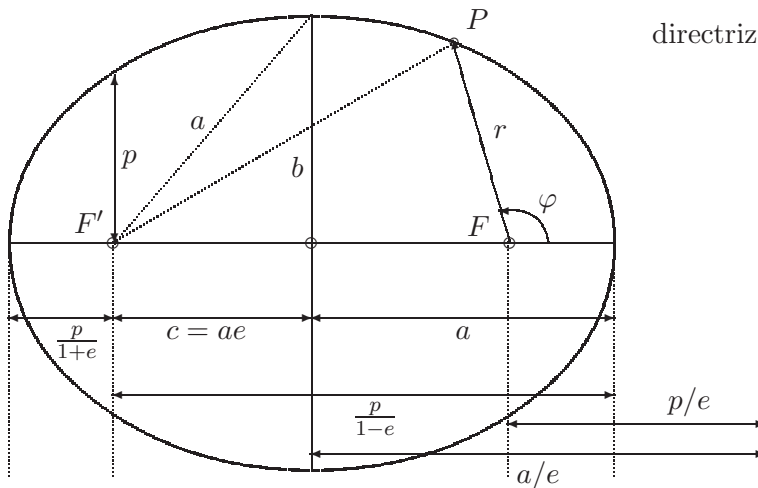


Figura 5.6: *Trayectoria elíptica; relaciones geométricas.*

Estableciendo unos ejes  $Oxy$ , con direcciones según el eje focal y el eje secundario respectivamente, la ecuación reducida de la elipse sería

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se puede asimismo establecer las ecuaciones paramétricas de la elipse de la forma

$$\begin{aligned} x &= a \cos u; \\ y &= b \operatorname{sen} u. \end{aligned}$$

El significado del parámetro  $u$  se verá más adelante (aptdo. 5.6.1), denominándose *anomalía excéntrica*. (El ángulo  $\varphi$  medido desde el foco  $F$  se denomina *anomalía verdadera*.)

**Hipérbola.**— En este caso también se cumple que la masa atractora  $M$  está en uno de los focos. La hipérbola se define como el lugar geométrico de los puntos cuyas diferencias de distancias a  $F$  y  $F'$  (focos) es constante:  $PF - PF' = 2a$  (figura 5.7). A continuación se resumen algunas relaciones

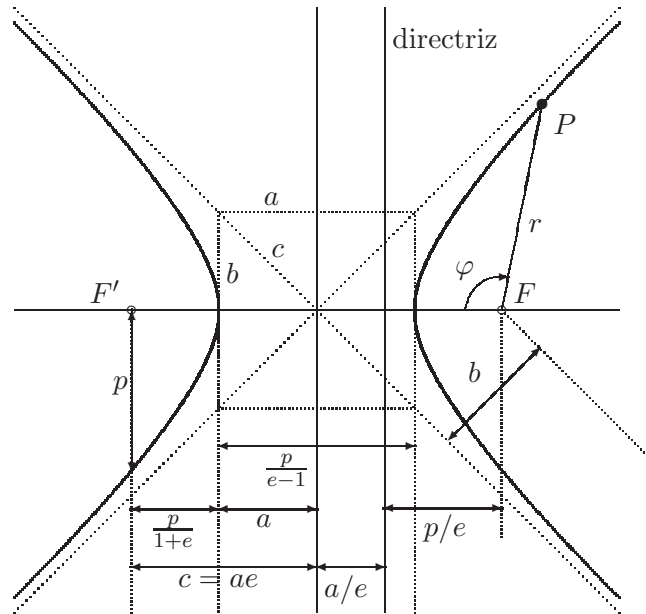


Figura 5.7: Trayectoria hiperbólica; relaciones geométricas.

geométricas útiles para la hipérbola:

$$\begin{aligned} a &= p/(e^2 - 1); & c &= ae \\ b^2 &= c^2 - a^2 = a^2(e^2 - 1) = pa \\ \varphi_{\text{asíntota}} &= \pm \operatorname{arc} \cos \left( \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

La ecuación reducida de la hipérbola se establece, análogamente a la elipse, en unos ejes  $Oxy$  con origen en el centro de la cónica y dirección  $x$  según el eje focal:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Igualmente, puede escribirse la ecuación en forma paramétrica:

$$\begin{aligned} x &= \pm a \cosh u; \quad (2 \text{ ramas}) \\ y &= b \sinh u \end{aligned}$$

En este caso, el parámetro  $u$  se denomina *anomalía virtual*.

**Parábola.**— Se define como caso límite de la elipse o de la hipérbola, cuando  $e = 1$ . La trayectoria no está acotada, aunque en cambio no posee asíntotas. Puede definirse también la parábola como lugar geométrico de puntos cuya distancia a un foco ( $F$ ) y a una recta directriz ( $d$ ) sean iguales (figura 5.8). El eje de la parábola se define como la recta por  $F$  perpendicular a  $d$ . Estableciendo una referencia  $Oxy$  con origen en el vértice de la parábola y dirección  $x$  según el eje de la misma, la ecuación reducida es

$$y^2 = 2px.$$

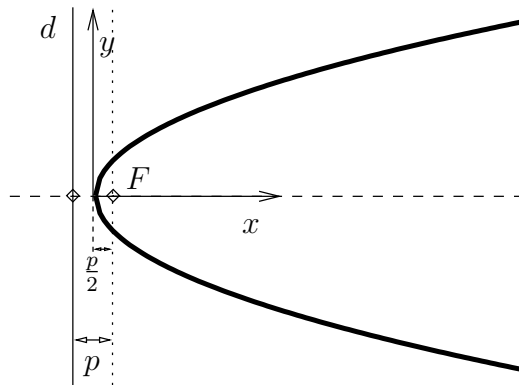


Figura 5.8: Trayectoria parabólica; relaciones geométricas.

La trayectoria elíptica es el único caso de los anteriores en que la órbita es cerrada, manteniéndose la partícula dentro de una distancia acotada a la masa atractora; es por tanto la que siguen los planetas y los satélites. La

mínima distancia —en el punto denominado «perigeo» o «perihelio» según se trate de órbitas alrededor de la Tierra o del Sol— vale  $r_{\min} = p/(1 + e)$  (particularizando para  $\varphi = 0^\circ$ ); la máxima distancia (en el «apogeo» o «afelio» respectivamente) vale  $r_{\max} = p/(1 - e)$ . La distancia media entre los dos extremos<sup>3</sup> es por tanto:

$$r_{\text{med}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{p}{1 + e} + \frac{p}{1 - e} \right] = \frac{p}{1 - e^2} = a.$$

El término «órbita» suele estar asociado a una trayectoria acotada, por lo que las parábolas y las hipérbolas no se pueden considerar órbitas hablando con propiedad, ya que la partícula atraída pasa cerca de la masa atractora y se aleja después al infinito. La parábola es el caso límite para que la partícula se marche al infinito, teniendo la energía justa para escapar de la acción gravitatoria. Las hipérbolas corresponden a los casos en los que una partícula proveniente del infinito se ve desviada en su trayectoria por otra masa  $M$ , efectuando un cambio de ángulo: viene por una asíntota y se marcha por otra.

## 5.4. Energía de las órbitas gravitatorias

Aplicando la definición (5.12) del Potencial  $V$  para el caso de fuerzas gravitatorias, se puede expresar:

$$dV = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = G \frac{Mm}{r^2} dr;$$

e integrando:

$$V = \int_{r_0}^r G \frac{Mm}{r^2} dr = -G \frac{Mm}{r} + G \frac{Mm}{r_0}$$

Fijamos convencionalmente que para  $r_0 \rightarrow \infty$ ,  $V(r) \rightarrow 0$  (es decir,  $V(\infty) = 0$ ). Así:

$$\boxed{V(r) = -G \frac{Mm}{r}.} \quad (5.19)$$

Esta expresión equivale a considerar el potencial  $V(r)$  como el trabajo que realizan las fuerzas del campo gravitatorio, al desplazarse una partícula

<sup>3</sup>Téngase en cuenta que este valor medio no coincide con la media temporal de la distancia, a lo largo del movimiento. Si se define la media temporal de una variable  $y(t)$  durante un periodo  $\tau$  como  $\bar{y} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau y(t) dt$ , el valor medio de la distancia  $r$  durante una órbita completa resulta ser  $\bar{r} = a(1 + e^2/2)$ . Se deja como ejercicio al lector el realizar la integral correspondiente para comprobar este resultado.

desde un punto situado a distancia  $r$  hasta el infinito. Como se ve en la expresión anterior, dicho trabajo es negativo, lo que quiere decir que el campo gravitatorio se opone a dicho desplazamiento, ya que las fuerzas son atractivas.

La energía total es la suma de  $T$  y  $V$ :

$$E \stackrel{\text{def}}{=} T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - G\frac{Mm}{r}. \quad (5.20)$$

Al no existir más fuerzas que las centrales del campo gravitatorio, que como se vió son conservativas,  $E$  se mantiene constante. Podemos calcular su valor en el perigeo, sabiendo que en cualquier otro punto mantendrá ese valor. En el perigeo es  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\dot{r} = 0$ :

$$v^2 = r^2\dot{\varphi}^2 \underbrace{=}_{r^2\dot{\varphi}=C} \frac{C^2}{r^2} \underbrace{=}_{p=C^2/(GM)} \frac{GMp}{r^2},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\frac{GMp}{r^2} - \frac{GMm}{r} \\ &= \frac{GMm}{r} \left[ \frac{1}{2}\frac{p}{p/(1+e)} - 1 \right] = \frac{1}{2}\frac{GMm}{p}(1+e)[1+e-2], \end{aligned}$$

luego

$$\boxed{E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{p}(1-e^2)}. \quad (5.21)$$

A este mismo resultado se podría llegar desarrollando la expresión de la energía total en un punto genérico que no sea el perigeo ni el apogeo, aunque este desarrollo requeriría algunas operaciones más. Dejamos este ejercicio de comprobación para el lector.

Así, la ecuación (5.21) permite clasificar las trayectorias posibles según un criterio energético:

- $e < 1$ : *Elipse*, Energía total negativa ( $E < 0$ ). Una partícula en este tipo de trayectoria nunca llega al infinito, que correspondería a  $E = 0$ .
- $e = 1$ : *Parábola*, Energía total nula ( $E = 0$ ). Tiene la energía justa para llegar al infinito con  $v_\infty = 0$ , agotando en el camino toda su energía cinética.
- $e > 1$ : *Hipérbola*, Energía total positiva ( $E > 0$ ). Llega al infinito sin agotar la energía cinética ( $v_\infty \neq 0$ ).

Es útil expresar la energía dada por (5.21) en función del parámetro « $a$ » (semieje mayor) de la trayectoria, que según el tipo de cónica vale  $a = p/(1 - e^2)$  para la elipse, o  $a = p/(e^2 - 1)$  para la hipérbola (Conviene notar que se verifica  $a > 0$  siempre, y que en el caso de la parábola, al ser  $e = 1$ , se verifica  $a \rightarrow \infty$ ). De esta manera, resultan las expresiones que se resumen en el cuadro siguiente:

<b>Elipse:</b>	$E = -\frac{GMm}{2a}, \quad v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$	(5.22)
<b>Parábola:</b>	$E = 0, \quad v^2 = GM\frac{2}{r}$	
<b>Hipérbola:</b>	$E = \frac{GMm}{2a}, \quad v^2 = GM\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)$	

En el cuadro anterior se han incluido también las expresiones de  $v^2$  en cada caso, obtenidas a partir de:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r}.$$

Cabe observar que las expresiones de  $E$  en (5.22) sólo dependen de  $a$ . Se deduce así que pueden existir diversas órbitas con igual energía y distintas excentricidades, con tal de que el valor de  $a$  sea el mismo. Sin embargo, al tener en común el foco y no el centro, dichas órbitas isoenergéticas no serían tangentes entre sí (figura 5.9).

**EJEMPLO 5.1:** Sobre la superficie de la tierra, en un punto de latitud  $\phi = 40^\circ$  N, se lanza un proyectil en dirección N con una velocidad inicial  $v_0 = 28\,800$  km/h y una inclinación de  $85^\circ$  respecto al suelo. La tierra se supone esférica de radio 6400 km, homogénea, fija y sin atmósfera. Tomar  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>. Se pide:

- a. Trayectoria que describe el proyectil, altura máxima y latitud del punto de caída
- b. Velocidades máxima y mínima;
- c. Velocidad y altura en el punto de latitud  $43^\circ$  N.

*Solución.*

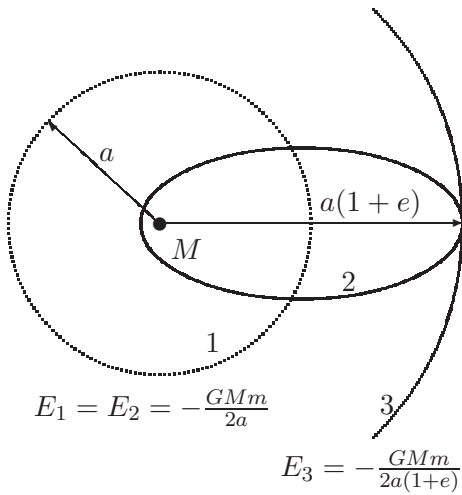


Figura 5.9: Las órbitas 1 y 2 son isoenergéticas, mientras que la 3 tiene una energía mayor.

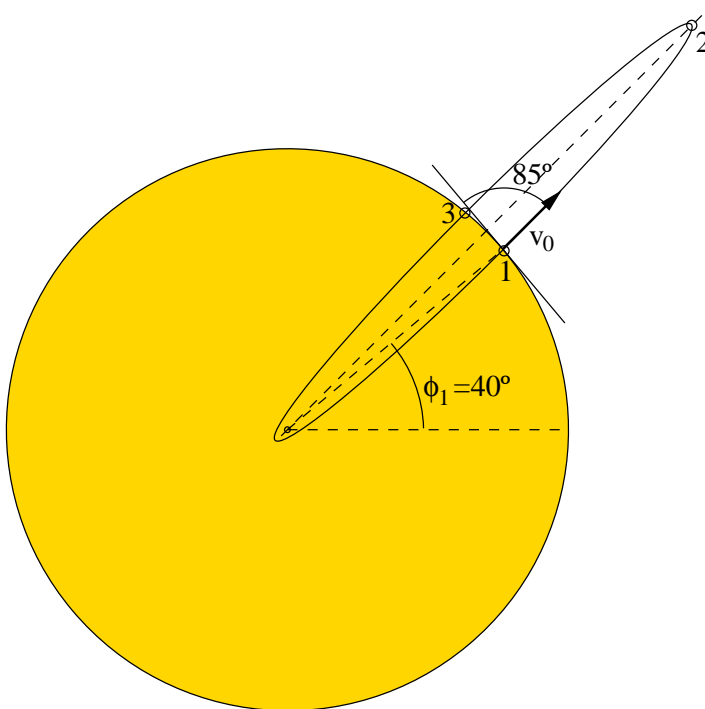


Figura 5.10: Ejemplo 5.1; Proyectil que se lanza desde 1 con velocidad  $v_0$  y ángulo de  $85^\circ$ .

a.— La velocidad de escape es:

$$\frac{1}{2}m \frac{v_E^2}{R_T} = \frac{GMm}{R_T^2} \Rightarrow v_E = \sqrt{GM \frac{2}{R_t}} = \sqrt{2gR_T} \approx 40\,340,6 \text{ km/h} > v_0,$$

luego la trayectoria del proyectil es elíptica.

Para calcular los puntos de máxima y mínima altura, tendremos en cuenta que son los vértices del semieje mayor de la elipse, y planteamos la conservación de la energía y del momento cinético:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{Gmm}{R_T} &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gmm}{r_2} \\ mv_0 \cos 85^\circ \cdot R_T &= mr_2v_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_2 = \begin{cases} 13\,028 \text{ km} \\ 24,826 \text{ km} \end{cases}$$

Por tanto, la altura máxima es  $h_{\max} = 13\,028 - 6\,400 = 6\,628$  km. La otra solución para  $r_2$  corresponde al otro vértice de la elipse, punto que lógicamente no se alcanzará en la trayectoria al caer antes sobre la superficie de la tierra.

Es interesante comprobar el error que resultaría de haber considerado la gravedad simplificada, en cuyo caso la altura máxima sería  $h_{\max} = (1/2)v_0^2/g = 3\,262$  km, es decir un 49% del valor correcto.

Los parámetros de la órbita son:

$$\left. \begin{aligned} a + c &= 13\,028 \\ a - c &= 24,826 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 6\,526,4 \text{ km} \\ c = 6\,501,6 \text{ km} \end{cases}$$

$$e = \frac{c}{a} = 0,9962; \quad p = a(1 - e^2) = 49,557 \text{ km}.$$

El punto de caída estará en la intersección entre la trayectoria elíptica y la superficie de la tierra:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + e \cos \theta} \\ r &= R_T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos \theta = -0,996 \begin{cases} \theta_1 = 174,9^\circ \\ \theta_2 = 185,1^\circ \end{cases}$$

El punto de caída tendrá por tanto una latitud de

$$\phi_3 = \phi_1 + (\theta_2 - \theta_1) = 50,2^\circ.$$

b.— La velocidad máxima es  $v_0$ , en los puntos de lanzamiento y caída. La velocidad mínima se alcanza en el punto de máxima altura,

$$v_2 = \sqrt{gR_T^2 \left( \frac{2}{r_2} - \frac{1}{a} \right)} = 342,6 \text{ m/s} (= 1\,233,37 \text{ km/h}).$$



c.— En el punto de  $\phi = 43^\circ$  el parámetro angular de la órbita es  $\theta = \theta_1 + 3^\circ = 177,9^\circ$ . Sustituyendo en la ecuación de la trayectoria,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = 11\,083,9 \text{ km},$$

luego la altura correspondiente es

$$h = 11\,083,9 - 6\,400 = 4\,683,9 \text{ km}.$$

Por último, la velocidad del proyectil en este punto es

$$v = \sqrt{gR_T^2 \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} = 3\,307,1 \text{ m/s} (= 11\,905,6 \text{ km/h}). \quad \square$$

### 5.4.1. Potencial efectivo

En la ecuación (5.20) de la energía total, podemos eliminar  $\dot{\phi}$ , quedando una expresión en función de  $r$  y  $\dot{r}$ :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{GMm}{r} \\ &= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \underbrace{m\frac{C^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r}}_{\text{Pot. efectivo, } V_{\text{ef}}(r)}, \end{aligned}$$

es decir, definiendo un «Potencial efectivo» como

$$V_{\text{ef}}(r) \stackrel{\text{def}}{=} m \left( \frac{C^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} \right) \quad (5.23)$$

la energía queda descompuesta en dos sumandos,  $V_{\text{ef}}(r)$ , término que depende únicamente de la distancia  $r$ , y  $m\dot{r}^2/2$ , término esencialmente positivo, que corresponde a una parte de la energía cinética del cuerpo (la debida a la velocidad radial):

$$E = V_{\text{ef}}(r) + \frac{m\dot{r}^2}{2} \quad (5.24)$$

Para cada valor dado de  $C$  (constante de las áreas), se obtiene una función  $V_{\text{ef}}(r)$  determinada. El análisis de la representación gráfica de esta función (figura 5.11) permite observar algunas características interesantes del movimiento:

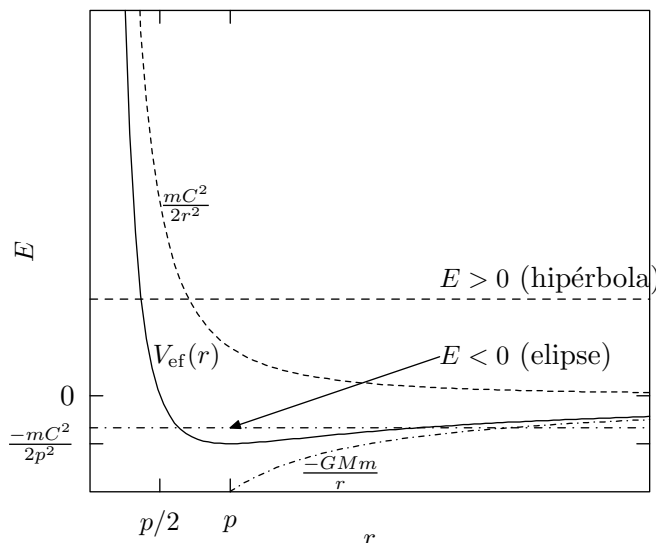


Figura 5.11: Gráfico del potencial efectivo; según el nivel energético, las órbitas son elipses ( $E < 0$ ), parábolas ( $E = 0$ ) o hipérbolas ( $E > 0$ ).

- Las distintas órbitas vienen caracterizadas por una Energía total  $E = \text{constante}$ , que corresponde a líneas horizontales en la gráfica. Puesto que la diferencia  $E - V_{\text{ef}}(r)$  en (5.24) es esencialmente positiva, el movimiento se restringe a los valores de  $r$  para los que el potencial efectivo es menor que la energía total,  $V_{\text{ef}}(r) < E$ . Así, podemos distinguir las curvas de  $V_{\text{ef}}(r)$  correspondientes a:
  - *hipérbolas*, cuando se produce un sólo punto de corte de  $V_{\text{ef}}(r)$  con la recta  $E = \text{cte}$ , movimiento restringido a  $r_{\text{min}} < r < \infty$ ;
  - *parábolas*, similar al caso anterior, en el caso límite  $E = 0$ ;
  - *elipses*, con dos puntos de corte con  $E < 0$ , zona admisible  $r_{\text{min}} < r < r_{\text{max}}$ ,
  - *circunferencias* ( $r = \text{cte.}$ ). Es inmediato comprobar que para un valor dado de  $C$ , la circunferencia es la trayectoria de energía mínima.
- El punto  $V_{\text{ef}}(r) = 0$  corresponde a:

$$\frac{C^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{p}{2},$$

o bien  $r \rightarrow \infty$  (asíntota horizontal).

- El mínimo de  $V_{\text{ef}}(r)$ , para un valor dado de  $C$ , ocurre para

$$\frac{d}{dr} V_{\text{ef}} = -\frac{C^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = p,$$

y particularizando, el mínimo resulta

$$r = p \quad \Rightarrow \quad (V_{\text{ef}})_{\text{min}} = -\frac{mC^2}{2p^2};$$

La órbita circular es aquella en que  $E = (V_{\text{ef}})_{\text{min}}$ , en ella la energía es:

$$E = -\frac{mC^2}{2p^2} = -\frac{GMm}{2p} = -\frac{GMm}{2a} = -\underbrace{\frac{GMm}{a}}_V + \underbrace{\frac{GMm}{2a}}_T$$

- Para el caso de la hipérbola, la velocidad radial para  $r \rightarrow \infty$  es:

$$\dot{r}_{\infty} = \sqrt{2E/m};$$

mientras que para la parábola  $\dot{r}_{\infty} = 0$ .

## 5.5. Leyes de Kepler

El astrónomo Johannes Kepler (1571-1630), tras un minucioso análisis de las observaciones de los planetas y fundamentalmente de Marte, enunció al principio del siglo XVII tres leyes empíricas sobre su movimiento. En ese momento no se conocía un modelo teórico que las explicase. No fué hasta finales del mismo siglo (1686) que Newton, con la publicación de sus *Principia*, pudo explicar las observaciones de Kepler a partir de una axiomática y un modelo matemático coherente.

Por su especial interés en la historia de la mecánica y puesto que ayudan a comprender los conceptos tratados en este capítulo citaremos aquí estas leyes.

*‘PRIMERA LEY. Los planetas describen órbitas elípticas, con foco en el Sol.’*

Más arriba (5.18) se demostró que las órbitas son necesariamente cónicas.

*‘SEGUNDA LEY. Las áreas barridas en tiempos iguales son iguales.’*

Como se ha visto (5.13) se trata de una propiedad general de los movimientos bajo fuerzas centrales.

*‘TERCERA LEY. Los cuadrados de los períodos son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas.’*

Esta última ley se deduce de la constancia de la velocidad areolar, como veremos a continuación.

En efecto, al ser ésta constante (5.13) la podemos igualar a su valor medio, que será igual al área barrida en la órbita completa dividida por el período  $T$ :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} = \frac{\pi ab}{T} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2};$$

considerando las relaciones  $b^2/a = p$  y  $C^2/GM = p$ , se obtiene:

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}} \quad \text{c.q.d.}$$

**EJEMPLO 5.2:** Calcular la altura a la que debe situarse un satélite artificial, para seguir una órbita geoestacionaria alrededor de la tierra. (Nota: se denomina geoestacionaria la órbita de un satélite que se sitúa siempre sobre el mismo punto de la superficie de la tierra).

*Solución.* Consideramos los datos siguientes:

- Radio de la tierra  $\approx 40\,000 \text{ km}/2\pi = 6,366 \times 10^6 \text{ m}$ .
- $GM = gR^2 = 397,58 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$ .
- Periodo de rotación de la tierra (día sidéreo):  $T = 86\,164 \text{ s}$ .

Por tanto, el semieje mayor de la órbita es

$$a^3 = \frac{86\,164^2 \times 397,58 \times 10^{12}}{4\pi^2} \quad \Rightarrow \quad a = 42\,128 \text{ km}$$

La altura sobre la superficie de la tierra será  $a - R = 35\,762 \text{ km}$ .      □

Para un satélite no geoestacionario de órbita baja, el periodo suele ser mucho menor. Por ejemplo, si es  $T = 2 \text{ h}$ , corresponde a un semieje  $a = 8\,052 \text{ km}$ , y por tanto a una altura media de  $1\,686 \text{ km}$ . En este caso el satélite no puede mantenerse sobre la vertical de un mismo punto de la superficie de la tierra.

**Unidades astronómicas.**—

A menudo se emplean en astronomía estas unidades, definidas como:

**Longitud:** Unidad Astronómica (U.A.)  $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Semieje mayor de la órbita Tierra-Sol } (= 1,49598 \times 10^{11} \text{ m}).$

**Tiempo:** Año sidéreo (= 365,25636 días solares)<sup>4</sup>

**Masa:** Masa del Sol (=  $1,9891 \times 10^{30} \text{ kg}$ ).

Estas unidades son particularmente adecuadas para el sistema solar, simplificando considerablemente la aritmética. Por ejemplo, en ellas, La constante gravitatoria para planetas en órbita solar sería

$$GM_{\text{sol}} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = 4\pi^2.$$

**5.6. Ecuaciones horarias**

En los apartados 5.3 y 5.4 se ha discutido la trayectoria de las órbitas gravitatorias, en cuanto a su ecuación intrínseca y sus propiedades generales. El cálculo de las ecuaciones horarias es la otra integración que cabe hacer de las ecuaciones (5.14) y (5.15) del movimiento, a la que se aludió en el apartado 5.2.2. Estas ecuaciones son de gran importancia, pues directamente de la ecuación implícita de la trayectoria no es posible calcular la posición de un planeta o satélite en un instante dado.

**5.6.1. Trayectoria elíptica**

Estudiaremos primero el caso del movimiento en órbita elíptica. Para ello se debe efectuar un cambio de variable mediante la «construcción de Kepler», según la figura 5.12.

Cambiaremos la variable  $\varphi$ , llamada «anomalía verdadera,» por  $u$ , llamada «anomalía excéntrica». La diferencia estriba en que  $\varphi$  es el ángulo  $\widehat{AFP}$  que forma el radio vector, trazado desde el foco, con el semieje mayor, mientras que  $u$  es el ángulo  $\widehat{AOP}'$  que forma el radio desde el centro de la circunferencia.

Teniendo en cuenta:  $OF = c$ ;  $OA = OP' = a$ , podemos escribir:

$$a \cos u - r \cos \varphi = c \quad \Rightarrow \quad \cos u = e + \frac{r}{a} \cos \varphi; \quad (5.25)$$

---

<sup>4</sup>Día solar = 24 h = 86 400 s; Día sidéreo = 86 164 s; Año trópico = 365,2422 días solares = 366,2422 días sidéreos.

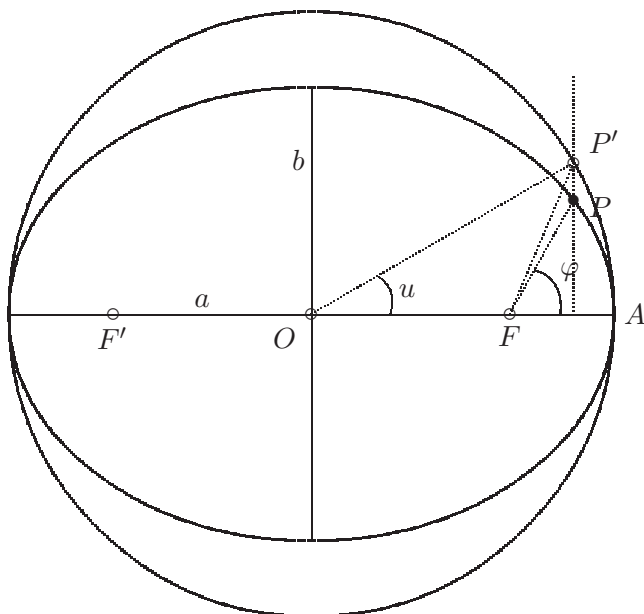


Figura 5.12:  
Construcción de Kepler para la determinación de la anomalía excéntrica  $u$ .

considerando  $r = p/(1 + e \cos \varphi)$  obtenemos:

$$\cos u = \frac{e + \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u},$$

ecuación que expresa la relación entre  $\varphi$  y  $u$  y que también se puede escribir como:

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \tan\left(\frac{u}{2}\right) \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.$$

Planteamos ahora la constancia de la velocidad areolar; Calcularemos para ello el área barrida en el movimiento elíptico (sector  $FAP$ ) como la correspondiente a la circunferencia afín (sector  $FAP'$ ) multiplicada por la relación de afinidad  $b/a$ :

$$\begin{aligned} A_{FAP'} &= A_{OAP'} - A_{OFP'} \\ &= a^2 \frac{u}{2} - \frac{ca \operatorname{sen} u}{2} = \frac{a^2}{2} (u - e \operatorname{sen} u); \end{aligned}$$

por otra parte:

$$\begin{aligned} A_{FAP} &= t \frac{C}{2} = \frac{t}{2} \sqrt{GMp} \\ &= \frac{t}{2} b \sqrt{GM/a} = \frac{t}{2} \frac{2\pi ab}{T}, \end{aligned}$$

donde se han empleado las relaciones  $p = b^2/a$ ;  $T^2 = 4\pi^2 a^3/GM$ .

Así, igualando  $(b/a)A_{FAP'} = A_{FAP}$ , y definiendo la constante  $n \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi/T$  (llamada «movimiento medio»), se llega a:

$$\boxed{u - e \operatorname{sen} u = nt} \quad (\text{Ecuación de Kepler}). \quad (5.26)$$

Esta ecuación es inmediata de resolver si lo que se pretende es obtener el instante  $t$  en que se ocupará una posición  $\varphi$  dada, a partir del simple cálculo de la anomalía excéntrica correspondiente ( $u$ ) en (5.25).

Sin embargo, si lo que se pretende es obtener la posición  $\varphi$  para un instante dado, (5.26) resulta ser una ecuación intrínseca no lineal, que es necesario resolver por algún procedimiento numérico iterativo, como puede ser el método de Newton, el de bisección, etc.<sup>5</sup>

### 5.6.2. Movimiento hiperbólico

En este caso no es posible emplear un procedimiento geométrico como para la elipse, por lo que obtendremos las ecuaciones de forma analítica. Partimos de las ecuaciones paramétricas de la hipérbola, medidas desde el centro de la cónica:

$$x = \pm a \cosh u; \quad y = b \operatorname{senh} u,$$

donde el parámetro  $u$  se denomina *anomalía virtual*. Calculamos la expresión de la distancia  $r$  medida desde el foco  $F$ :

$$r = \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = a(e \cosh u - 1).$$

Igualando este valor con el que proporciona la ecuación focal de la cónica,  $r = p/(1 + e \cos \varphi)$ , resultan las expresiones

$$\cosh u = \frac{e + \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}; \quad \cos \varphi = \frac{\cosh u - e}{1 - e \cosh u},$$

ecuaciones análogas a las obtenidas antes para la elipse, pero con funciones hiperbólicas. Igualmente, de éstas se deduce

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tgh} \left( \frac{u}{2} \right).$$

<sup>5</sup>Para una descripción de estos métodos, consultar algún texto de análisis numérico, como p.ej. J. Puy: *Algoritmos Numéricos en Pascal*, Servicio de Publicaciones de la E.T.S. de Ing. de Caminos de Madrid, o R.L. Burden y J.D. Faires: *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamericana, 1985

Emplearemos las relaciones anteriores para la ecuación de constancia de la velocidad areolar,

$$r^2 \dot{\varphi} = C. \quad (5.27)$$

Para realizar el cambio de variable de  $\varphi$  a  $u$  derivamos

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2(\varphi/2)} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \frac{\dot{u}}{\cosh^2(u/2)};$$

operando, resulta

$$\dot{\varphi} = \sqrt{e^2 - 1} \frac{\dot{u}}{e \cosh u - 1}.$$

Con esto, (5.27) resulta

$$C = a^2 \sqrt{e^2 - 1} (e \cosh u - 1) \dot{u};$$

e integrando, con la condición de borde  $u|_{t=0} = 0$  (el instante  $t = 0$  corresponde al vértice de la hipérbola):

$$ab(e \sinh u - u) = Ct.$$

En este caso no existe periodo real, pero por analogía con el movimiento elíptico, se puede definir un periodo virtual

$$T_v \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = \frac{2\pi ab}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{ab} = \frac{2\pi}{T_v} = n_v,$$

donde  $n_v$  se denomina *movimiento medio virtual*. Con esto, finalmente resulta

$$\boxed{e \sinh u - u = n_v t.}$$

La ecuación obtenida es no lineal, con funciones trascendentes. Además de esto, plantea la dificultad de que el primer término no está acotado, por lo que puede resultar más difícil escoger un valor inicial para la solución iterativa.

### 5.6.3. Movimiento parabólico

Seguiremos, al igual que en el caso de la hipérbola, un procedimiento analítico mediante n cambio de variable. La variable a emplear es

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}}.$$



Despejando, podemos expresar también

$$\cos \varphi = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2},$$

y sustituyendo en la ecuación focal de la cónica  $r = p/(1 + e \cos \varphi)$  resulta

$$r = \frac{p}{2}(1 + \tau^2).$$

Derivando esta expresión

$$\dot{\tau} = \frac{\dot{\varphi}}{2} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right) \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{2\dot{\tau}}{1 + \tau^2}.$$

Sustituyendo ahora en la ecuación de la velocidad areolar ( $r^2\dot{\varphi} = C$ ),

$$C = \frac{p^2}{2}(1 + \tau^2)\dot{\tau},$$

e integrando con la condición inicial  $\tau|_{t=0} = 0$  (en el instante  $t = 0$  estaría en el vértice):

$$\tau + \frac{\tau^3}{3} = \frac{2C}{p^2}t = \frac{2\sqrt{GM}}{p^{3/2}}t.$$

La ecuación obtenida sigue siendo no lineal, pero en este caso es cúbica, de la que puede hallarse una solución directa.

## 5.7. Estudio del sistema ternario

El problema de los tres cuerpos, al contrario que el de los dos cuerpos, no posee solución analítica en un caso general. Ha recibido a lo largo de la historia la atención de grandes matemáticos (Lagrange, Laplace, Jacobi). Poincaré en los albores del siglo XX, demostró que no posee solución analítica «cuantitativa». A raíz de ésto, adquirió un gran auge en la mecánica el empleo de métodos cualitativos que, entre otras cosas, persiguen estudiar la estabilidad de los sistemas dinámicos.

En un caso general, para su solución cuantitativa directa, es necesario emplear desarrollos en serie o métodos numéricos de integración directa en el tiempo. Tan sólo en algunos casos particulares, como el movimiento equilátero o el movimiento alineado, es posible plantear las soluciones analíticas.

### 5.7.1. Planteamiento de las ecuaciones

Sean tres masas ( $m_1, m_2, m_3$ ) descritas por sus vectores de posición respectivos ( $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ ) y que ejercen entre sí fuerzas gravitatorias (figura 5.13). Describimos el movimiento relativo a  $m_3$ :

$$\mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3$$

$$\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$$

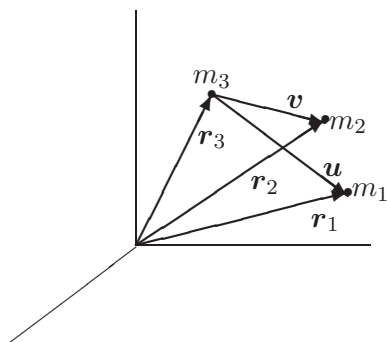


Figura 5.13: *Sistema Ternario.*

Sobre cada masa actúa la atracción gravitatoria de las otras dos; estableciendo así las expresiones dinámicas se llega a las ecuaciones del movimiento (absoluto) para  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  que son:

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = \frac{Gm_1}{u^3} \mathbf{u} + \frac{Gm_2}{v^3} \mathbf{v}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_3}{u^3} \mathbf{u} + \frac{Gm_2}{|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^3} (\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_3}{v^3} \mathbf{v} - \frac{Gm_1}{|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^3} (\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

Restando entre sí estas ecuaciones obtenemos el movimiento relativo,  $\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_3$ ,  $\ddot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_3$ :

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\frac{GM}{u^3} \mathbf{u} + Gm_2 \left( \frac{\mathbf{u}}{u^3} - \frac{\mathbf{v}}{v^3} + \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^3} \right), \quad (5.28)$$

$$\ddot{\mathbf{v}} = -\frac{GM}{v^3} \mathbf{v} - Gm_1 \left( \frac{\mathbf{u}}{u^3} - \frac{\mathbf{v}}{v^3} + \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^3} \right), \quad (5.29)$$

donde  $M \stackrel{\text{def}}{=} m_1 + m_2 + m_3$ . Con estas dos ecuaciones diferenciales queda definido el movimiento relativo a  $m_3$ .

### 5.7.2. Movimiento alineado

Se trata de un caso particular en el que existe solución analítica al problema de los tres cuerpos. Para ello imponemos que se cumpla constantemente  $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$ , siendo  $\lambda$  un escalar arbitrario. Esta condición impone la alineación de los tres cuerpos sobre una recta que puede a su vez girar en el espacio.

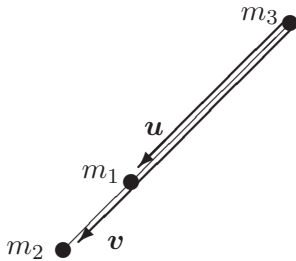


Figura 5.14: Sistema ternario alineado.

Sustituyendo la condición anterior en las ecuaciones (5.28), (5.29), resulta:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u^3} \left[ -GM + Gm_2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \right) \right] \quad (5.30)$$

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}}{u^3} \left[ -\frac{GM}{\lambda^2} - Gm_1 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \right) \right] \quad (5.31)$$

donde se ha supuesto  $\lambda > 1$ . Esto no supone restricción ninguna, ya que expresa simplemente que  $m_1$  sea la masa central y  $m_2$ ,  $m_3$  las laterales; el caso en que  $m_2$  fuese la masa central corresponde a  $0 < \lambda < 1$ , y para  $m_3$  en el centro sería  $\lambda < 0$ . Por lo tanto la solución tomada tiene validez general, obteniéndose los otros dos casos sin más que permutar el papel de las masas.

Por otra parte, si derivamos dos veces la expresión  $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$  se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{v}} = \lambda \ddot{\mathbf{u}} + 2\dot{\lambda} \dot{\mathbf{u}} + \ddot{\lambda} \mathbf{u}. \quad (5.32)$$

Las fuerzas están dirigidas según la recta de alineación, definida por el vector  $\mathbf{u}$ . Por tanto, las aceleraciones estarán dirigidas según la misma recta:  $\ddot{\mathbf{r}}_1 \parallel \mathbf{u}$ ;  $\ddot{\mathbf{r}}_2 \parallel \mathbf{u}$ ;  $\ddot{\mathbf{r}}_3 \parallel \mathbf{u}$ , y por tanto, sus diferencias  $\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_3$ ,  $\ddot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_3$ , han de ser también paralelas a  $\mathbf{u}$ . En un caso general  $\mathbf{u}$  puede girar, y  $\dot{\mathbf{u}}$  no llevaría necesariamente la dirección de  $\mathbf{u}$ , por lo que de la inspección de la expresión (5.32) se deduce que  $\dot{\lambda} = 0$ , es decir  $\lambda = \text{cte}$ . Así, (5.32) se reduce necesariamente a

$$\ddot{\mathbf{v}} = \lambda \ddot{\mathbf{u}}.$$

Esta expresión indica que las trayectorias de  $m_1$  y  $m_2$  relativas a  $m_3$  son homotéticas de razón  $\lambda$  (constante). Sustituyendo en esta ecuación las expresiones anteriores (5.30) y (5.31):

$$-M + m_2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \right) = -\frac{M}{\lambda^3} - \frac{m_1}{\lambda} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \right),$$

ecuación de quinto grado en  $\lambda$ , cuyas soluciones corresponden a las posiciones de equilibrio. Es posible demostrar que esta ecuación posee una única solución real en el rango de validez física ( $\lambda > 1$ ). De forma similar, si se hubieran hecho otras hipótesis respecto al valor de  $\lambda$ , se habrían obtenido sendas soluciones adicionales, correspondientes como se ha dicho a  $m_2$  o  $m_3$  en el centro. Estas soluciones constituyen tres de los llamados «puntos de Lagrange».

Para fijar ideas, pongamos como ejemplo el caso en que sea  $m_2 = m_3 = m$ ,  $m_1 = M'$ . Es fácil comprobar que  $\lambda = 2$  es una solución, que corresponde al caso trivial de dos cuerpos iguales, describiendo órbitas simétricas respecto de un tercero  $M'$ , equidistante de los dos.



Figura 5.15: Posición de equilibrio en el movimiento alineado.

Sin embargo, se puede demostrar que estas órbitas serían *inestables*<sup>6</sup>. Caso de existir una pequeña perturbación, lo que en la práctica es inevitable, se perdería la posición de equilibrio.

### 5.7.3. Movimiento equilátero

Investigamos ahora la posibilidad de que los tres cuerpos se encuentren formando un triángulo equilátero, de lado  $a(t)$  (variable con el tiempo).

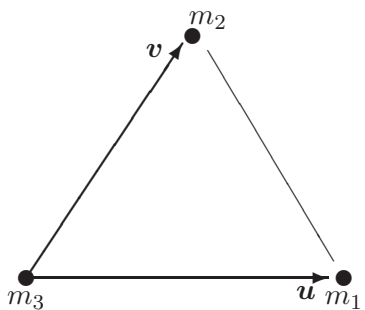


Figura 5.16: Movimiento ternario equilátero

<sup>6</sup> véase por ejemplo E. Neal Moore: *Theoretical Mechanics* (Cap. 4), Wiley, 1983

Se verificará:

$$a(t) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$$

Particularizando en las ecuaciones diferenciales (5.28), (5.29), los términos entre paréntesis se anulan, quedando:

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\frac{GM\mathbf{u}}{a^3}; \quad \ddot{\mathbf{v}} = -\frac{GM\mathbf{v}}{a^3}.$$

Estas ecuaciones corresponden a una atracción gravitatoria desde  $m_3$  como si fuera un punto fijo con la masa total  $M$ . Por tanto,  $m_1$  y  $m_2$  describirán elipses en torno a  $m_3$ . El período de este movimiento es:

$$T = \frac{2\pi\sqrt{a^3}}{\sqrt{GM}}.$$

Existen dos posiciones de equilibrio posibles, según que  $m_2$  esté a un lado o a otro del eje  $m_1 - m_3$ . Estas dos soluciones, al igual que las tres antes obtenidas para el movimiento alineado, son también puntos de Lagrange. En total existen pues cinco puntos de Lagrange, soluciones del sistema ternario.

Se puede probar por métodos de perturbaciones<sup>7</sup> que estas nuevas configuraciones de equilibrio son *estables* tan sólo bajo ciertas condiciones.

En concreto, para:

$$m_1 \ll m_2; \quad m_1 \ll m_3,$$

es decir, si una masa es mucho más pequeña que las otras dos (lo que se llama el problema restringido de tres cuerpos), y además  $m_3 \leq 4\% m_2$ , la estructura equilátera se mantiene estable. Este podría ser, por ejemplo, el caso de  $m_1 =$  satélite artificial,  $m_3 =$  Luna,  $m_2 =$  Tierra, en cuyo caso se verifican las condiciones anteriores entre las masas. Sería necesario obviamente para obtenerse este movimiento el partir de las condiciones iniciales adecuadas.

En el sistema solar existe un ejemplo real de movimiento equilátero, el de los asteroides Troyanos. Estos están situados en el cinturón de asteroides del sistema solar, y se concentran en dos grupos que forman aproximadamente triángulos equiláteros junto con el Sol y Júpiter. La masa de los asteroides es despreciable frente a las de Júpiter y el Sol, y la de Júpiter es menor que el 4% de la del Sol.

---

<sup>7</sup>Ver J.A. Fernández Palacios: *Mecánica Teórica de los Sistemas de Sólidos Rígidos* (cap.20).

## 5.8. Problemas propuestos.

**Problema 5.1.** Un satélite artificial de masa  $m = 1000$  kg sigue una órbita elíptica alrededor de la tierra, con semieje mayor  $a = 10000$  km y excentricidad  $e = 0,01$ . En el apogeo le alcanza otro satélite de masa  $M = 5000$  kg, teniendo la velocidad de ambos cuerpos antes del contacto la misma dirección. El proceso de acoplamiento es instantáneo y ambos satélites quedan perfectamente unidos después de él. Calcular la velocidad relativa necesaria entre ambos satélites para conseguir que la órbita del satélite conjunto resultante sea circular.

*Nota:* el radio de la tierra es  $R = 6366$  km.

(Examen final, 14/6/1993)

**Problema 5.2.** Dos satélites artificiales  $S_1$  y  $S_2$  se encuentran en órbitas coplanarias, siendo la del primero circular, de radio  $2R$ , y la del segundo elíptica, de semieje mayor  $a = 5R$  y excentricidad  $e = 3/5$ .  $R$  es el radio de la tierra que habrá de suponerse perfectamente esférica. Inicialmente  $S_2$  se encuentra en su perigeo y  $S_1$  en oposición respecto de él, con referencia al centro de la tierra. En ese instante inicial en el satélite  $S_1$  se reduce la velocidad (sin cambio de dirección) de forma que esta reducción representa el mínimo indispensable para que alcance la superficie terrestre en la nueva órbita. Se pide:

- determinar el tiempo que tarda en producirse el contacto de  $S_1$  con la superficie terrestre;
- ¿podrá ser observado el impacto desde  $S_2$ ? (lógicamente la tierra debe considerarse como opaca)

(Examen final, 30/1/1999)

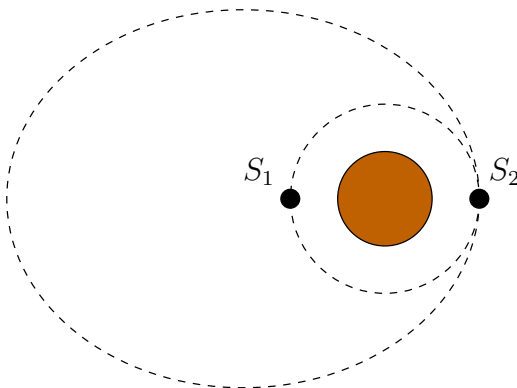


Figura 5.17: *Problema 5.2; situación inicial de los satélites y órbitas, antes de la reducción de velocidad de  $S_1$*

**Problema 5.3.** Dos partículas de masa  $m$  cada una están unidas mediante un hilo inextensible, de forma que una de ellas desliza sobre una mesa horizontal lisa y la otra cuelga del hilo que pasa a través de un pequeño orificio practicado en la mesa. Inicialmente la partícula sobre la mesa se halla a distancia  $b$  del orificio, moviéndose con velocidad  $v_0$  normal al hilo, mientras que la otra está en reposo en la vertical del hilo. Se pide:

- ecuación diferencial del movimiento en función de la distancia  $r$  de la partícula superior al orificio;
- tensión del hilo en función de  $r$ ;
- valor que habría de tomar  $v_0$  para que la masa inferior permanezca inmóvil.

(Examen parcial 9/2/1996)

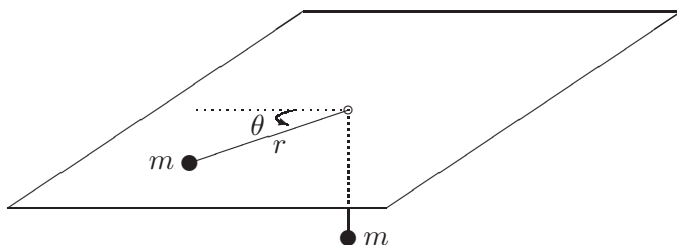


Figura 5.18: *Problema 5.3*

**Problema 5.4.** Un proyectil se lanza desde la superficie de la tierra con una determinada velocidad inicial  $v_0$ . Despreciando la resistencia de la atmósfera, calcular la velocidad necesaria para que alcance una órbita elíptica de semieje mayor 80000 km. Calcular asimismo la excentricidad de la órbita si la dirección de lanzamiento forma un ángulo de  $45^\circ$  con la vertical. Se puede suponer que la tierra es esférica, con perímetro máximo 40000 km).

(Examen final 20/6/1994)

**Problema 5.5.** El radio de la órbita de Venus es 0,72 veces el de la Tierra (se suponen ambas órbitas circulares y coplanarias). Una nave espacial viaja de la Tierra a Venus siguiendo una órbita elíptica que es tangente a cada una de las órbitas planetarias y es la órbita de viaje más económica (órbita de transferencia). Se pide:

- Hallar la velocidad relativa de la nave respecto a la Tierra justo después del lanzamiento, y respecto a Venus justo después de llegar a su órbita, despreciando en cada caso la atracción gravitatoria del planeta. (Velocidad orbital terrestre = 30 Km/s).

- b. Hallar el tiempo necesario para realizar el viaje en las condiciones anteriores.
- c. ¿En que parte de su órbita respecto a la tierra debe estar Venus en el momento del lanzamiento para asegurar que estará en el sitio correcto cuando llegue la nave?.

(Examen final 20/6/1995)



## Capítulo 6

# Teoremas generales de dinámica de sistemas.

Al estudiar los sistemas con varias partículas surgen varios elementos adicionales, como son los enlaces o ligaduras entre puntos, tanto internos al sistema como externos, y las fuerzas interiores. Uno de los casos más representativos es el de los sistemas rígidos, con enlaces de distancia constante entre partículas.

En principio, la aplicación de las leyes de Newton se hará realizando la suma para todas las partículas, obteniendo así leyes globales en función de las magnitudes cinéticas resultantes o suma para todo el sistema. A la hora de obtener estas resultantes convendrá tener en cuenta las interacciones entre partículas del sistema.

Un caso especial es el principio del momento cinético, que de manera estricta no se deduce de las leyes de Newton, sino que son necesarias hipótesis adicionales. Este principio es debido a Euler.

Adicionalmente, introduciremos los métodos de trabajos virtuales, de gran potencia para plantear las ecuaciones de la estática o de la dinámica directamente para el conjunto del sistema.

### 6.1. Morfología de los sistemas

Antes de desarrollar los principios y teoremas fundamentales, es conveniente definir primero algunos conceptos y elementos básicos que se emplearán en el estudio de los sistemas de varias partículas.

### 6.1.1. Sistema mecánico

Se llama así a un conjunto de varias partículas, de número finito o infinito, de las cuales queremos estudiar su movimiento. En el estudio de un sistema mecánico se prescinde pues de otras características físicas como la carga eléctrica, color, temperatura, ...

En el capítulo 2 se estudió el tipo de sistema más simple, reducido a una sola partícula, mientras que en el capítulo 5 se analizaron sistemas formados por 2 ó 3 partículas bajo fuerzas centrales. Los cuerpos que observamos a simple vista están formados por un gran número de partículas, macroscópicas, atómicas o subatómicas. Sólo en ciertos casos es válida la simplificación que supone el modelo de la masa puntual. En otros casos, por el contrario, será necesario considerar el sistema como formado por varias partículas.

Se llama configuración de un sistema a la posición de cada una de sus partículas en un instante dado. Para definir la configuración se necesita un determinado número de parámetros, según el sistema de que se trate. Por ejemplo, una partícula libre precisa tres parámetros: las coordenadas cartesianas,  $(x, y, z)$ . Un sistema de  $n$  partículas libres queda definido por  $3n$  parámetros. Sin embargo, si existen ligaduras que restrinjan el movimiento, el número de parámetros preciso para definir la configuración será menor. Se denominan *grados de libertad* de un sistema al conjunto mínimo de parámetros necesario para definir unívocamente la configuración del mismo, y que puedan variarse de manera independiente (es decir, sin ecuaciones de ligadura).

### 6.1.2. Fuerzas

Las fuerzas ejercidas sobre las partículas de un sistema son las causantes de la variación del movimiento de las mismas. Podemos clasificarlas atendiendo a varios criterios:

- *Exteriores*, si son ejercidas por agentes externos al sistema, o *interiores* en caso contrario. En este último caso, tanto la acción como la reacción se producen sobre partículas del propio sistema.
- *Activas* o *Reactivas*, según que actúen «motu proprio», o bien como respuesta a un movimiento determinado que intentan impedir, en cuyo caso sólo se dan cuando existe la tendencia a este movimiento. Estas últimas se llaman también fuerzas de enlace.

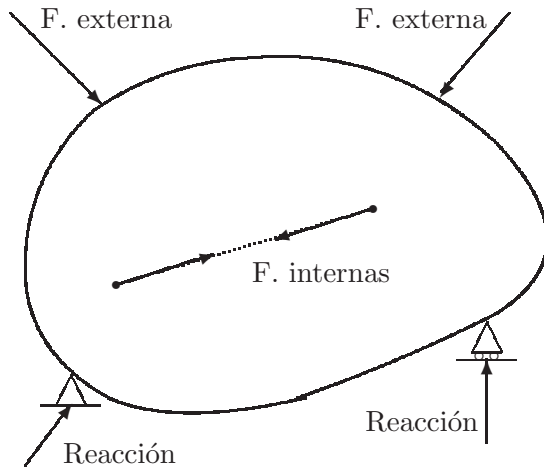


Figura 6.1: Tipos de fuerzas en un sistema

### 6.1.3. Enlaces

La existencia de enlaces o ligaduras impone restricciones al movimiento de las partículas, reduciendo el número de grados de libertad con respecto al caso en que todas las partículas fuesen libres. El número de grados de libertad se verá reducido, respecto del caso sin ligaduras, por el número de ecuaciones de enlace independientes.

Los enlaces se pueden clasificar, según diversos criterios, en:

- *Exteriores*, para las ligaduras con puntos externos, e *interiores*, para las ligaduras entre puntos del mismo sistema.
- *Lisos* (no disipativos) y *rugosos* (disipativos), atendiendo a que las fuerzas de enlace disipen o no energía para los movimientos permitidos por los mismos (figura 6.2). Se entiende que para que tenga sentido hablar de enlace liso o rugoso, éste debe permitir algún movimiento, pues en caso de restricción total no cabe esta clasificación.
- *Holónomos* y *Anholónomos*. Se consideran holónomos cuando es posible expresar la condición de ligadura mediante una relación entre las posiciones de las partículas y el tiempo exclusivamente:

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0. \quad (6.1)$$

A su vez, los enlaces holónomos se denominan *esclerónomos* si no dependen del tiempo, y *reónomos* en caso contrario (figura 6.3).

Los enlaces anholónomos son en general todos aquellos que no son holónomos, no pudiendo expresarse mediante ecuaciones del tipo (6.1).

El caso más usual de enlace anholónomo es aquél que depende también de la velocidad, mediante relaciones del tipo:

$$\Phi(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) = 0, . \tag{6.2}$$

El caso más sencillo es el de expresiones lineales en  $\dot{\mathbf{r}}_i$ , del tipo:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + b = 0$$

pudiendo ser  $\mathbf{a}_i$  y  $b$  funciones de la posición ( $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i(\mathbf{r}_i)$ ,  $b = b(\mathbf{r}_i)$ )

- *Unilaterales y bilaterales.* Los unilaterales se definen mediante desigualdades, por ejemplo (figura 6.4):

$$z \geq 0,$$

implicando restricción en un sentido tan sólo. Por el contrario, los bilaterales implican restricción en ambos sentidos.

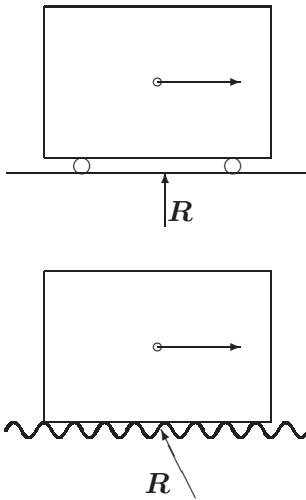


Figura 6.2: Enlaces liso y rugoso; para el movimiento permitido por el enlace (deslizamiento horizontal) la reacción lisa no realiza trabajo, mientras que en el caso rugoso sí.

**EJEMPLO 6.1:** Establecer los enlaces internos de un sólido rígido (considerado como un medio continuo), obteniendo el número de grados de libertad del mismo.

*Solución.* La hipótesis de medio continuo implica que es infinitamente subdivisible, constando de un conjunto infinito de partículas. En principio, esto

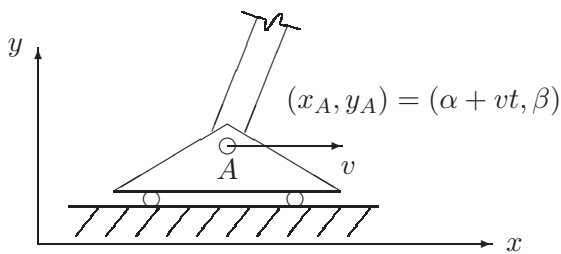
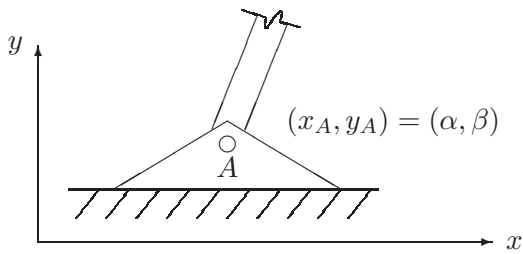


Figura 6.3: Enlaces holónomos; a) esclerónomo (no depende del tiempo), b) reónomo (dependiente del tiempo o enlace móvil).

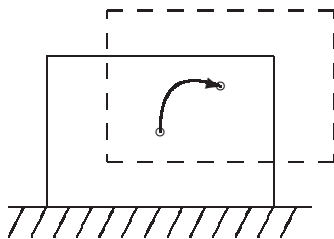


Figura 6.4: Enlace unilateral, que permite el movimiento vertical en un sólo sentido.

conllevaría asimismo infinitos grados de libertad. Sin embargo, las ligaduras internas del sólido obligan a que se mantenga constante la distancia entre dos partículas cualesquiera; a su vez, esto da lugar a infinitas coacciones. El número de grados de libertad no se puede obtener pues directamente, ya que resultaría indeterminado ( $\infty - \infty$ ).

Para determinar el número de grados de libertad del sólido podemos basarnos en la descripción que sigue de su movimiento.

- Elegimos una partícula  $A$  cualquiera (figura 6.5); su posición estará definida por tres parámetros: sus tres coordenadas cartesianas,  $(x_A, y_A, z_A)$ .
- Una segunda partícula  $B$ , al estar obligada a mantener la distancia  $\overline{AB}$ , vendrá definida por dos parámetros adicionales (por ejemplo dos ángulos en esféricas respecto de  $A$ :  $\varphi_B, \lambda_B$ ).
- Definida la posición de las dos partículas  $A$  y  $B$ , una tercera partícula  $C$  precisa de un único parámetro más para definir su posición, por ejemplo, el ángulo de giro alrededor del eje  $AB$ ,  $\theta_C$ .

Cualquier otra partícula del sólido tiene ya definida su posición al estar definidas  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Por tanto no aportan grados de libertad adicionales.

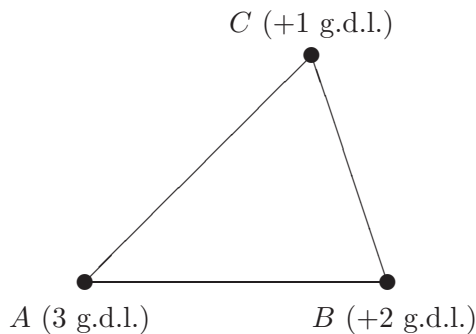


Figura 6.5: Grados de libertad del sólido rígido. Su movimiento queda determinado por el del triángulo rígido  $ABC$ , con  $3 + 2 + 1 = 6$  g.d.l.

Así, el número de grados de libertad de un sólido rígido es  $3 + 2 + 1 = 6$ . Existen múltiples maneras de elegir estos 6 g.d.l., aunque la descomposición usual es tomar las tres coordenadas de su centro de masas, y tres ángulos o parámetros que definan la orientación del sólido, como los ángulos de Euler (se verán en el capítulo 8). Es posible también escoger otros conjuntos de parámetros, según convenga en cada caso.  $\square$

**EJEMPLO 6.2:** Expresar los enlaces de un disco vertical de radio  $a$  que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, de forma que se mantiene vertical en todo instante, admitiendo pivotamiento libre.

*Solución.* Sea el plano horizontal  $Oxy$  (figura 6.6). Denominamos  $(x, y, z)$  a las coordenadas del centro del disco,  $\psi$  al ángulo que forma el eje del disco (perpendicular al mismo por su centro) con la horizontal,  $\theta$  al ángulo que forma este mismo eje con la dirección  $Ox$  del plano horizontal, y  $\varphi$  al ángulo girado por el disco alrededor de su propio eje.

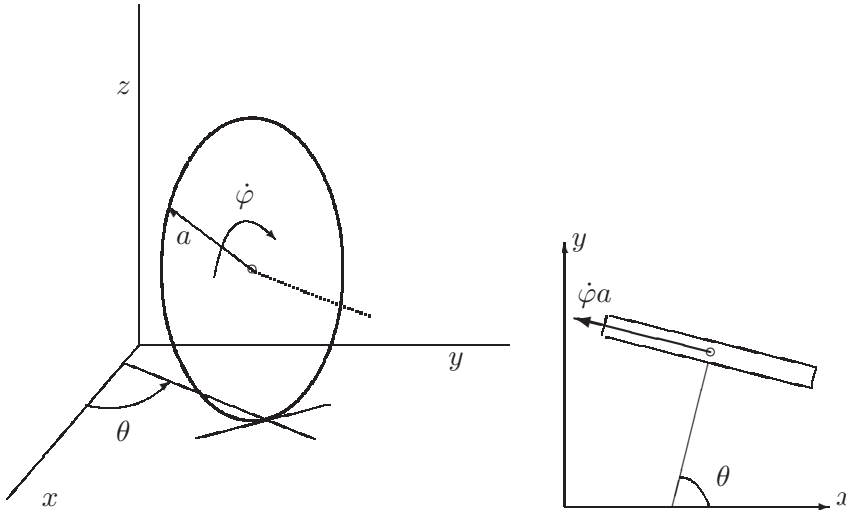


Figura 6.6: *Movimiento de un disco vertical rodando sin deslizar sobre un plano. La velocidad del centro del disco vertical tiene las componentes  $(-\dot{\varphi}a \sin \theta, \dot{\varphi}a \cos \theta)$  sobre las direcciones horizontales  $x$  e  $y$ .*

Los enlaces son cuatro: dos holónomos,

$$\begin{aligned} z &= a \quad (\text{altura constante del centro del disco}), \\ \psi &= 0 \quad (\text{disco vertical}), \end{aligned}$$

y dos no holónomos,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\dot{\varphi}a \sin \theta \\ \dot{y} &= \dot{\varphi}a \cos \theta. \end{aligned}$$

En un caso general en que  $\theta(t)$  no sea constante, éstas últimas relaciones no se pueden integrar, siendo por tanto enlaces anholónomos. El sistema queda definido por cuatro parámetros  $(x, y, \theta, \varphi)$  y dos ecuaciones de ligadura independientes, es decir, tiene  $6 - 4 = 2$  grados de libertad.

En el caso particular en que fuese  $\theta = \text{cte.}$ , el disco rodaría apoyado sobre una línea recta, dentro de un plano vertical fijo. Tomando el eje  $Ox$

según la dirección  $\theta = 0$ , resulta  $\dot{\varphi}a = -\dot{x} \Rightarrow x = -\varphi a$ . La ecuación es integrable y el enlace sería anholónomo sólo en apariencia.  $\square$

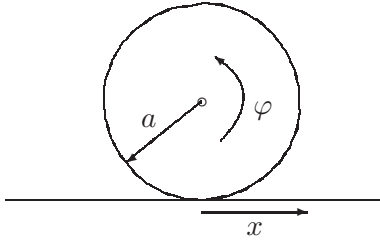


Figura 6.7: Disco rodando con  $\theta = cte$ ; el movimiento equivale al movimiento plano de rodadura sobre una recta, con la ligadura holónoma  $x = -\varphi a$ .

EJEMPLO 6.3: Expresar los enlaces de una esfera rodando sin deslizar sobre un plano, con pivotamiento libre.

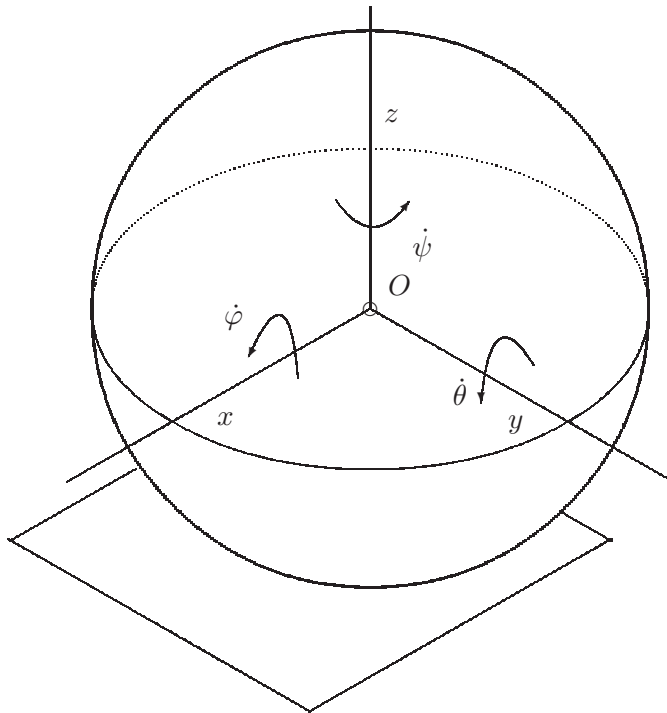


Figura 6.8: Componentes de la velocidad de rotación de una esfera rodando sin deslizar sobre un plano horizontal, según el triedro móvil  $Oxyz$ .

*Solución.* Tomamos unos ejes móviles  $(Oxyz)$ , de forma que  $O$  es el centro de la esfera,  $Oz$  es un eje vertical, mientras que  $Ox$  y  $Oy$  pivotan con la esfera manteniéndose horizontales en todo momento. Por otra parte, consideramos también el triedro fijo  $(O'XYZ)$ , en el que podemos expresar las coordenadas del centro de la esfera  $(X_O, Y_O, Z_O)$ . El ángulo girado por



pivotamiento (alrededor de  $Oz$ ) lo llamaremos  $\psi$ . Denominamos  $\dot{\varphi}$  y  $\dot{\theta}$  respectivamente a las componentes de la velocidad de rotación de la esfera según los ejes  $Ox$  y  $Oy$ .

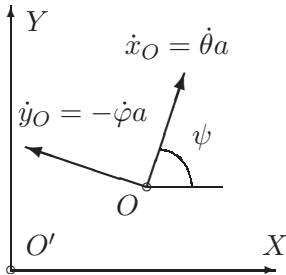


Figura 6.9: *Proyecciones de la velocidad del centro de la esfera en el plano horizontal.*

Los enlaces son:

$$\begin{cases} Z_O = a & \text{(holónimo)} \\ \dot{X}_O = \dot{\varphi}a \sin \psi + \dot{\theta}a \cos \psi & \text{(anholónimo)} \\ \dot{Y}_O = -\dot{\varphi}a \cos \psi + \dot{\theta}a \sin \psi & \text{(anholónimo)} \end{cases}$$

La esfera posee por tanto  $6 - 3 = 3$  grados de libertad, con dos enlaces anholónomos. □

## 6.2. Principios y teoremas de la dinámica de Newton-Euler

### 6.2.1. Principio de la cantidad de movimiento

Consideramos un sistema formado por un número finito de partículas,  $\{m_i, i = 1, \dots, N\}$ .

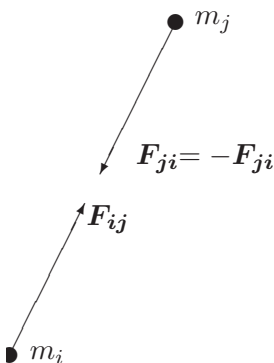


Figura 6.10: *Fuerzas internas centrales entre dos partículas  $m_i$  y  $m_j$  del sistema.*

## 6.10 Capítulo 6. TEOREMAS GENERALES DE DINÁMICA DE SISTEMAS.

Aplicando el principio de la cantidad de movimiento (2.<sup>a</sup> ley de Newton) a cada partícula  $m_i$  del sistema, siendo  $\mathbf{F}_i$  la resultante de todas las fuerzas sobre dicha partícula,

$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i). \quad (6.3)$$

Descompondremos las fuerzas en internas y externas al sistema:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{F}_i^{int};$$

las fuerzas internas sobre la partícula  $i$ ,  $\mathbf{F}_i^{int}$ , son el resultado de las acciones del resto de las partículas  $j \neq i$ :

$$\mathbf{F}_i^{int} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij},$$

donde la nomenclatura  $\mathbf{F}_{ij}$  indica la acción de  $m_j$  sobre  $m_i$ . Por la ley de acción y reacción ó 3.<sup>a</sup> ley de Newton,  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$  (figura 6.10). Así, al sumar las ecuaciones (6.3) para todas las partículas del sistema, las fuerzas internas se anulan dos a dos, resultando:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ext} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}}_{=0} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{d}{dt} m_i \mathbf{v}_i \right).$$

Llamando  $\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ext} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$  (resultante de fuerzas externas sobre el sistema), y  $\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i$  (cantidad de movimiento del sistema), resulta la expresión:

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{P}.} \quad (6.4)$$

Expresión que se puede considerar como principio básico de la dinámica de sistemas, enunciándose como sigue:

*«La derivada respecto del tiempo de la cantidad de movimiento del sistema es igual a la resultante de las fuerzas exteriores.»*

Podemos obtener otra expresión equivalente para esta ecuación a partir del movimiento del centro de masas  $G$ . Se define éste como:

$$\mathbf{r}_G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M}, \quad (6.5)$$

Siendo  $M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i$ , masa total del sistema.

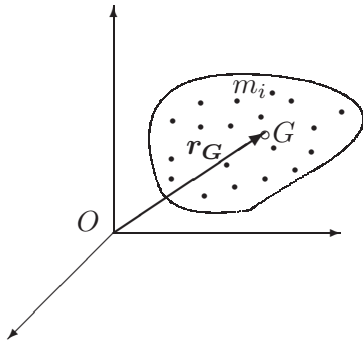


Figura 6.11: Centro de masas  $G$  de un sistema de varias partículas.

Derivando (6.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right] &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{P} \\ &= M \mathbf{v}_G, \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde  $\mathbf{v}_G \stackrel{\text{def}}{=} d\mathbf{r}_G/dt$  es la velocidad del centro de masas. Sustituyendo en (6.4), y llamando  $\mathbf{a}_G \stackrel{\text{def}}{=} d^2\mathbf{r}_G/dt^2$  a la aceleración del mismo, se llega a:

$$\boxed{\mathbf{F} = M\mathbf{a}_G} \quad (6.7)$$

Este resultado se denomina «teorema del movimiento del centro de masa», constituyendo una expresión alternativa para la ecuación (6.4). Se lee de la siguiente manera:

*«Se puede estudiar el movimiento del Centro de Masas  $G$  de un sistema como si fuera una partícula, concentrando toda la masa del sistema, sometida a la resultante de fuerzas exteriores sobre el sistema.»*

Como corolario se puede deducir el teorema de conservación correspondiente:

$$\text{si } \mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_G = \mathbf{cte} \quad (6.8)$$

*«Si la resultante de las fuerzas exteriores sobre el sistema es nula, la cantidad de movimiento del sistema se conserva, por lo que el centro de masas sigue un movimiento rectilíneo y uniforme.»*

La condición de conservación se cumple obviamente para un sistema aislado, o en cualquier otro que aún sin estar aislado esté sometido a un conjunto de fuerzas con resultante nula. A estos efectos conviene recordar lo estudiado para el sistema binario en el apartado 5.1.

### 6.2.2. Principio del momento cinético

La ecuación de balance del momento cinético (2.4) aplicada a una partícula  $m_i$  del sistema se expresa como:

$$\mathbf{M}_O^i = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O^i, \quad (6.9)$$

donde  $\mathbf{M}_O^i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i$ , y  $\mathbf{H}_O^i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$  ( $i$  no sumado). Si sumamos (6.9) para todo el sistema, realizando la descomposición habitual entre fuerzas internas y externas:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{M}_O^i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \left( \overbrace{\sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}}^{\mathbf{F}_i^{\text{int}}} \right) \quad (6.10)$$

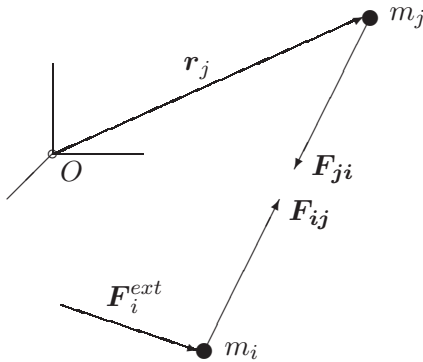


Figura 6.12: Fuerzas internas y externas sobre dos partículas cualesquiera del sistema.

Admitiremos que se cumple la ley de acción y reacción con su enunciado más fuerte: no sólo son  $\mathbf{F}_{ij}$  y  $\mathbf{F}_{ji}$  iguales y opuestas, sino que supondremos que son *fuerzas centrales*, siguiendo la misma recta de acción que une  $m_i$  con  $m_j$ :

$$\mathbf{F}_{ij} = F_{ij}(r_{ij}) \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}} \quad (r_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|). \quad (6.11)$$

Entonces, para dos partículas cualesquiera:

$$\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \wedge (-\mathbf{F}_{ij}) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \wedge \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0} \quad (i, j \text{ no sumados})$$

De esta forma, la suma de los momentos de las fuerzas interiores en (6.10) se anula, al cancelarse dos a dos los sumandos. Definiendo el momento cinético del sistema respecto a  $O$ :

$$\mathbf{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{H}_O^i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$$

y el momento de las fuerzas exteriores respecto de  $O$ :

$$\mathbf{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{M}_O^i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$$

se obtiene finalmente:

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O} \quad (6.12)$$

Esta expresión, que llamaremos también «ecuación de balance del momento cinético», se puede considerar como principio básico de la dinámica de sistemas, con el siguiente enunciado:

*«El momento de las fuerzas exteriores de un sistema respecto de un punto  $O$  fijo es igual a la derivada respecto del tiempo del momento cinético del sistema respecto del mismo punto.»*

Como corolario, cuando  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ , se obtiene el teorema de conservación correspondiente:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_O = \text{cte.} \quad (6.13)$$

La constancia de  $\mathbf{H}_O$  puede ocurrir en los casos siguientes:

- Sistema aislado, sobre el que no actúa ninguna fuerza exterior. El momento cinético del sistema respecto de cualquier punto se conserva.
- Fuerzas centrales (todas dirigidas hacia un mismo punto fijo), en cuyo caso se conserva el momento cinético respecto del centro de fuerzas, aunque no necesariamente respecto de otros puntos distintos.

En lo anterior se ha admitido que las fuerzas internas son todas centrales (6.11). Las interacciones de tipo gravitatorio o electrostático cumplen muy aproximadamente esta condición, pero otro tipo de fuerzas como las electrodinámicas no la cumplen necesariamente. De hecho, en sistemas con cargas

eléctricas móviles, se puede violar la ley de acción y reacción, tanto en su enunciado fuerte (fuerzas centrales) como en su enunciado más débil. En el caso de un sólido las interacciones entre partículas se deben a fuerzas de contacto, de naturaleza compleja, que tampoco resulta evidente que deban ser centrales. Sin embargo, en los casos en los que existan fuerzas internas del tipo mencionado, generalmente se puede encontrar una generalización de  $\mathbf{P}$  ó de  $\mathbf{H}_O$  que verifica los teoremas de conservación enunciados. Por lo tanto, en lo que sigue supondremos que, independientemente de la naturaleza de las fuerzas internas, se verifica el principio del momento cinético expresado por (6.12). Puesto que esta afirmación se postula como base de partida, es más apropiado referirse a ella como «principio» que como «teorema».

Conviene realizar una aclaración importante, previniendo del grave error que resultaría de confundir en (6.12) la resultante de los momentos,  $\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext}$ , con el momento de la resultante, que si suponemos a ésta aplicada en  $G$ , sería  $\mathbf{r}_G \wedge (\sum_i \mathbf{F}_i^{ext}) \neq \mathbf{M}_O$ . De caer en esta confusión, se llegaría a contradicciones tan graves como que un sistema sometido a un par de fuerzas (que tiene resultante nula) no se movería.

**Momento cinético en un punto cualquiera  $Q$ .**— Tanto el momento cinético de un sistema como el momento de las fuerzas tienen la naturaleza de campos de momentos, es decir, conocidos el momento en un determinado punto de referencia y la resultante, se puede expresar el momento en cualquier otro punto a partir de la ecuación característica del campo de momentos, con una expresión análoga a la (4.10) del campo de velocidades del sólido.

En efecto, calculemos el momento cinético en un punto cualquiera  $Q$ , no necesariamente fijo, definido por el vector posición  $\mathbf{r}_Q$ . La resultante del campo de vectores es en este caso  $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_G$ . Operando,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_Q &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \wedge m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i - \mathbf{r}_Q \wedge \underbrace{\left( \sum_i m_i \mathbf{v}_i \right)}_{\mathbf{P} = M\mathbf{v}_G} \\ &= \mathbf{H}_O + \mathbf{P} \wedge \mathbf{r}_Q. \end{aligned} \quad (6.14)$$

La expresión anterior es generalizable para dos puntos ( $P, Q$ ) cualesquiera,

$$\mathbf{H}_Q = \mathbf{H}_P + \mathbf{P} \wedge \mathbf{r}_{PQ}.$$

Análogamente, para el momento de las fuerzas las expresiones son

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_Q &= \mathbf{M}_O + \mathbf{F} \wedge \mathbf{r}_Q \\ &= \mathbf{M}_P + \mathbf{F} \wedge \mathbf{r}_{PQ}.\end{aligned}$$

Sin embargo, sería un grave error aplicar la ecuación de balance del momento cinético (6.12) en un punto cualquiera; esta ecuación sólo es válida si  $O$  es un punto fijo<sup>1</sup>, ya que la deducción anterior se hizo basada en que constituye el origen de un sistema de referencia inercial. En efecto, si derivamos  $\mathbf{H}_Q$  dado por la expresión (6.14):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{H}_Q &= \frac{d}{dt}\mathbf{H}_O + \frac{d\mathbf{P}}{dt} \wedge \mathbf{r}_Q + \mathbf{P} \wedge \mathbf{v}_Q \\ &= \mathbf{M}_O + \mathbf{F} \wedge \mathbf{r}_Q + \mathbf{P} \wedge \mathbf{v}_Q \\ &= \mathbf{M}_Q + M\mathbf{v}_G \wedge \mathbf{v}_Q.\end{aligned}$$

Comprobamos que en la ecuación de balance aparece un término corrector  $M\mathbf{v}_G \wedge \mathbf{v}_Q$  que no tiene porqué anularse en un caso general. Una excepción importante es el caso del centro de masas, como se verá más adelante (apartado 6.3).

### 6.2.3. Teorema de la energía cinética

La ecuación de la energía cinética (2.6) aplicada a cada partícula  $m_i$  expresa:

$$dW_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = d\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) \quad (i \text{ no sumado})$$

Al igual que en los casos anteriores, para obtener las magnitudes cinéticas del sistema conjunto, sumamos para todas las partículas del mismo:

$$\begin{aligned}T &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 \quad \Rightarrow \quad dT = d\left[\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2\right] \\ dW &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i^{(ext)} \cdot d\mathbf{r}_i}_{dW^{ext}} + \underbrace{\sum_i \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i}_{dW^{int}},\end{aligned}$$

<sup>1</sup>El significado de «fijo» en esta expresión se debe entender en el sentido de la transformación de Galileo; cualquier punto que pueda ser el origen de un sistema inercial podrá ser considerado fijo. Si se trata de un punto con velocidad no nula, pero que se mantiene constante, todo lo dicho es válido, pero refiriendo las velocidades para el cálculo de (6.9) a un sistema con origen en dicho punto.

obteniéndose finalmente:

$$dT = dW$$

En las ecuaciones de la cantidad de movimiento (6.4) y del momento cinético (6.12), el efecto de las fuerzas interiores desaparecía al sumar para todo el sistema. Sin embargo, en un caso general el trabajo debido a las fuerzas interiores no se anula:

$$dW^{int} \neq 0.$$

Merece la pena analizar de forma detallada el trabajo de las fuerzas interiores para comprender mejor el significado de la observación anterior. Sean dos partículas cualesquiera del sistema,  $m_i$  y  $m_j$ , situadas inicialmente en  $A$  y  $B$  (figura 6.13). Suponemos que al cabo de un movimiento elemental arbitrario están situadas en dos puntos cualesquiera  $A'$  y  $B'$ . Podemos descomponer el movimiento elemental total en:

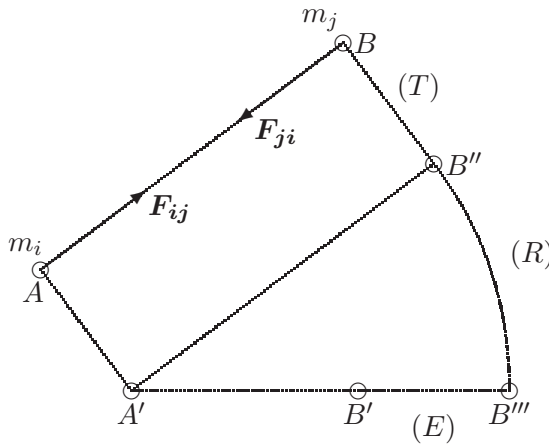


Figura 6.13: Descomposición de un movimiento elemental general en traslación, rotación y estiramiento.

1. Traslación (T) pasando  $A$  a  $A'$  y  $B$  a  $B''$ :

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_i^T &= d\mathbf{r}_j^T \\ dW^T &= \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i^T + (-\mathbf{F}_{ij}) \cdot d\mathbf{r}_i^T = 0 \end{aligned}$$

2. Rotación (R) alrededor de  $A'$ , en el plano definido por  $A'B''B'$ , quedando fijo  $m_i$  y pasando  $m_j$  a  $B'''$ :

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_j^R &= dt\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i); \quad d\mathbf{r}_i^R = \mathbf{0} \\ dW^R &= \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j^R = \mathbf{F}_{ji} \cdot [dt\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)] = 0 \end{aligned}$$

donde se ha supuesto que  $\mathbf{F}_{ij}$  lleva la dirección de  $(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$ , es decir, se trata de fuerzas centrales.



3. Estiramiento ( $E$ ), quedando fija  $m_i$  y pasando finalmente  $m_j$  a  $B'$ :

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_j^E; \quad d\mathbf{r}_i^E &= \mathbf{0}, \\ dW^E &= \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j^E \neq 0. \end{aligned}$$

En resumen, los movimientos de traslación y rotación son movimientos de sólido rígido y no producen trabajo de las fuerzas interiores. Por el contrario, las deformaciones internas (distorsiones o estiramientos), que no corresponden a movimientos de sólido rígido, sí producen un trabajo neto de las fuerzas interiores.

En definitiva, se puede escribir:

$$\boxed{dT = dW = dW^{int} + dW^{ext}} \quad (6.15)$$

«La variación de la energía cinética conjunta de un sistema es igual al trabajo realizado por las fuerzas, tanto internas como externas.»

La consideración del trabajo de las fuerzas interiores es imprescindible para el cálculo de estructuras y la mecánica de los medios continuos deformables, en los que la deformación viene gobernada por la energía interna de deformación acumulada. Los métodos y teoremas energéticos proporcionan algunos de los procedimientos más potentes de cálculo en este caso.

Si todas las fuerzas (tanto externas como internas) provienen de un potencial independiente del tiempo, se verificará:

$$dW = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -dV,$$

deduciéndose entonces de (6.15) el teorema de conservación de la energía:

$$dT + dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = T + V = \text{cte.}} \quad (6.16)$$

Conviene recalcar que en esta ecuación la energía potencial  $V$  corresponde a la *Energía Potencial Total*, derivándose de ella tanto las fuerzas interiores como las exteriores. Como ejemplo, en el caso de las estructuras o de los medios elásticos deformables,  $V$  debe incluir tanto el potencial de las cargas externas aplicadas como la energía de deformación debida a las fuerzas interiores.

Si las fuerzas internas en el sistema son centrales en el sentido de (6.11), según se vió en el apartado 5.2.1, provienen de un potencial expresado por (5.12):

$$V_{ij}(r_{ij}) = - \int F_{ij}(\rho) d\rho;$$

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (6.17)$$

Es posible demostrar en este caso que el potencial conjunto de las fuerzas interiores es

$$V^{\text{int}} = \sum_i \sum_{j>i} V_{ij}. \quad (6.18)$$

(La limitación  $j > i$  sirve para no sumar dos veces el potencial de interacción entre cada dos partículas.) De esta forma la ecuación (6.15) se convierte en

$$d(T + V^{\text{int}}) = dW^{\text{ext}}.$$

En este caso, si se trata de un *sistema aislado* se verificaría

$$\boxed{E = T + V^{\text{int}} = \text{cte.}} \quad (6.19)$$

**EJEMPLO 6.4:** Potencial de fuerzas internas de un sistema de partículas discretas, con atracción lineal en función de la distancia entre cada dos partículas.

*Solución.* Se trata de fuerzas análogas a resortes lineales ideales interpuestos entre cada dos partículas, siguiendo el esquema de fuerzas centrales. Suponiendo en primer lugar que la constante de todos estos resortes es la misma, el potencial de uno de ellos es

$$V_{ij} = \frac{1}{2}kr_{ij}^2,$$

siendo  $r_{ij}$  la distancia entre la pareja de puntos  $(i, j)$ . Teniendo en cuenta que  $\partial r_{ij}/\partial \mathbf{r}_i = -\mathbf{r}_{ij}/r_{ij}$ , la fuerza ejercida sobre  $i$  por  $j$  se obtiene siguiendo (6.17):

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = kr_{ij}.$$

La energía potencial total para todo el sistema, según (6.18), es

$$V^{\text{int}} = \sum_i \sum_{j>i} \frac{1}{2}kr_{ij}^2.$$

Un caso particular sería aquél en que las constantes de atracción entre cada dos partículas son proporcionales al producto de las masas,

$$\mathbf{F}_{ij} = \alpha m_i m_j \mathbf{r}_{ij}.$$

Sumando todas las fuerzas internas sobre una partícula dada,

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \alpha m_i m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \alpha m_i M (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_i)$$

siendo  $M = \sum_k m_k$  la masa total. Se obtiene por tanto una fuerza de atracción de cada partícula hacia el centro de masas del conjunto. El movimiento de cada partícula relativo a dicho centro de masas sería una órbita elíptica con centro en él (ver apartado 3.2). Es trivial comprobar que la suma de todas las fuerzas interiores dadas por la anterior expresión se anula.  $\square$

**EJEMPLO 6.5:** Energía potencial de deformación para fuerzas elásticas en una barra recta, como medio continuo, de longitud  $L$ , sección transversal  $A$  y módulo de elasticidad  $E$ .

*Solución.* Denominamos  $x$  a la coordenada según la barra,  $x \in [0, L]$  (figura 6.14). Suponemos que cada punto de la barra puede sufrir desplazamientos axiales, definidos por  $u(x)$ . Si imaginamos una *rebanada* de la barra, entre dos puntos  $x$  y  $x + dx$ , el desplazamiento relativo entre ambas caras será  $(u + du) - u = du$ . Se denomina *deformación unitaria*

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{du}{dx}.$$

Esta deformación provoca en el material una fuerza interna recuperadora,

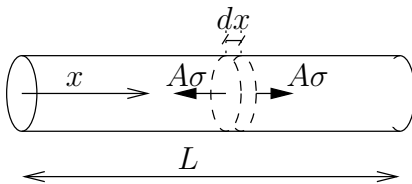


Figura 6.14: Barra recta continua sometida a deformación axial y tensiones internas  $\sigma$

$F^{\text{int}}$ , que se opone a la misma. La magnitud de dicha fuerza por unidad de área se denomina *tensión*,

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F^{\text{int}}}{A}.$$

En un material elástico lineal, se admite que la tensión depende linealmente de la deformación,

$$\sigma = E\varepsilon,$$

siendo  $E$  denominado *módulo de elasticidad* o *módulo de Young*.

Llamemos  $dU$  al trabajo realizado por las tensiones para alcanzar una deformación  $\varepsilon$  en una rebanada  $A dx$ . Éste se calcula integrando a lo largo

del proceso de deformación de la misma, variando el desplazamiento relativo entre ambas caras desde 0 hasta  $du$ . Para un incremento infinitesimal del mismo,  $\delta(du)$ , el trabajo elemental es

$$\delta(dU) = F^{\text{int}} \delta(du) = -E\varepsilon A \delta(du)$$

y en función de  $\varepsilon$  puede escribirse

$$\delta(dU) = -E\varepsilon A \delta\left(\frac{du}{dx}\right) dx = -E\varepsilon \delta\varepsilon A dx.$$

Llamando a la densidad de energía potencial de las fuerzas interiores por unidad de volumen

$$\widehat{V} = -\frac{1}{A} \frac{dU}{dx}$$

resulta

$$\delta\widehat{V} = E\varepsilon \delta\varepsilon.$$

Integrando a lo largo del proceso de deformación de la rebanada,

$$\widehat{V} = \int_0^\varepsilon E\varepsilon \delta\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \widehat{V} = \frac{1}{2} E\varepsilon^2.$$

Para el conjunto de la barra, integramos a lo largo de la misma,

$$V^{\text{int}} = \int_0^L \widehat{V}(x) A dx = \int_0^L \frac{1}{2} E\varepsilon^2 A dx.$$

En el caso particular de que la deformación sea homogénea,  $\varepsilon(x) = \Delta L/L$  (cte.), resulta

$$V^{\text{int}} = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 AL = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} (\Delta L)^2,$$

es decir, la barra se comportaría como un resorte de constante equivalente  $EA/L$ .  $\square$

#### 6.2.4. Teorema del virial

Los tres principios anteriores (cantidad de movimiento, momento cinético y energía cinética) establecen el balance de las magnitudes mediante ecuaciones diferenciales en el tiempo. En contraste con éstos, el teorema del virial no se expresa como una ecuación diferencial, sino como una relación entre valores medios a lo largo del tiempo.

Comenzamos por definir una función escalar  $G$ , característica del movimiento en un instante dado:

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i$$

donde  $\mathbf{p}_i \stackrel{\text{def}}{=} m_i \mathbf{v}_i$ , y el sumatorio se extiende a todas las partículas del sistema. Derivando esta expresión respecto del tiempo:

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i + 2T$$

Calculemos ahora la media temporal de esta derivada, que denotaremos por una raya superpuesta,  $\overline{dG/dt}$ . Para ello integramos sobre un intervalo  $[0, \tau]$  y dividimos por la duración del mismo:

$$\overline{\frac{dG}{dt}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG}{dt} dt = \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} = \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} + 2\overline{T}.$$

Supongamos ahora que el movimiento es periódico, siendo  $\tau$  el período del mismo. Se cumplirá entonces  $G(0) = G(\tau)$ , por lo que resulta:

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \underbrace{\overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i}}_{\text{Virial del sistema}} \quad (6.20)$$

La expresión a la derecha del signo  $=$  se denomina «virial». Por lo tanto, la ecuación anterior se lee:

*«Para un movimiento periódico, la media de la energía cinética sobre un periodo es igual al virial del sistema.»*

Es posible generalizar este resultado para un movimiento que no sea periódico, con tal de que esté acotado. En efecto, en este caso la media temporal

$$\overline{\frac{dG}{dt}} = \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau},$$

al tener  $G$  un valor acotado, tiende a cero para valores de  $\tau$  suficientemente grandes. En este caso, se cumplirá la relación (6.20) de manera aproximada, siendo exacta en el límite.

**EJEMPLO 6.6:** Aplicar el teorema del virial al caso de una partícula sometida a la acción gravitatoria.

*Solución.* El virial es en este caso:

$$-\frac{1}{2} \overline{\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i} = -\frac{1}{2} \overline{\left[ -\frac{GMm}{r^2} r \right]} = -\frac{1}{2} \overline{V}$$

y aplicando (6.20):

$$\boxed{\overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{V}.}$$

En efecto, según vimos en el capítulo 5, aplicando las ecuaciones (5.19) y (5.22) para la órbita elíptica se obtiene<sup>2</sup>:

$$V = -\frac{GMm}{r} \Rightarrow \overline{V} = -\frac{GMm}{a};$$

$$T = E - V = -\frac{GMm}{2a} + \frac{GMm}{r};$$

$$\overline{T} = -\frac{GMm}{2a} + \frac{GMm}{a} = \frac{GMm}{2a} = -\frac{1}{2} \overline{V}, \quad \square$$

### 6.3. El sistema del centro de masas

El sistema del centro de masas (S.C.M.) se define como un sistema de referencia cuyo origen está en el centro de masas  $G$  y que no experimenta rotación. Si se caracteriza mediante un triedro de coordenadas cartesianas, las direcciones de las mismas serán fijas y paralelas al sistema inercial de partida (figura 6.15).

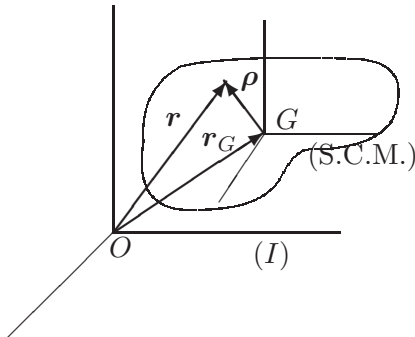


Figura 6.15: El sistema de referencia del centro de masas (S.C.M.), con origen en  $G$  y ejes paralelos al sistema inercial (I).

<sup>2</sup>La media temporal de  $1/r$  en una órbita gravitatoria elíptica resulta ser, desarrollando la integral correspondiente, la inversa del semieje mayor,  $1/\overline{r} = 1/a$ . Sin embargo, si la media de  $r$  resulta  $\overline{r} = a(1 + e^2/2)$  (consultar nota 3 al pie de la página 5.14).

Las expresiones de posición, velocidad y aceleración relativos al S.C.M. son respectivamente

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_G, \\ \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_G, \\ \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{a} - \mathbf{a}_G.\end{aligned}$$

Para obtener  $\boldsymbol{\nu}$  y  $\boldsymbol{\alpha}$  en estas expresiones, se ha derivado directamente de manera sucesiva la expresión de  $\boldsymbol{\rho}$ , sin resultar necesario emplear el término complementario de derivación  $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}$  establecido en la ecuación (4.6). Esto se debe a que por su definición el S.C.M. no gira ( $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ ) anulándose entonces dicho término.

Sin embargo, debe quedar claro que, aunque el S.C.M. no gire, en un caso general puede tener aceleración de traslación ( $\mathbf{a}_G \neq \mathbf{0}$ ), y que por lo tanto, *no se trata de un sistema inercial*<sup>3</sup>. A pesar de esto, su uso posee ventajas notables, ya que como veremos a continuación, se siguen cumpliendo los principios del momento cinético y de la energía cinética, exactamente como si se tratase de un sistema inercial. El principio de la cantidad de movimiento queda reducido a una igualdad trivial.

### 6.3.1. Cantidad de movimiento

En el S.C.M., la expresión de la cantidad de movimiento  $\mathbf{P}$  es:

$$\mathbf{P}^{SCM} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \boldsymbol{\nu}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i - \underbrace{\left( \sum_i m_i \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} M} \mathbf{v}_G = \mathbf{0},$$

donde se ha empleado (6.6). Así, resulta la expresión trivial:

$$\boxed{\mathbf{P}^{SCM} = \mathbf{0}}$$

### 6.3.2. Momento cinético

El momento cinético en un punto cualquiera viene dado por la expresión (6.14). Aplicando esta ecuación al centro de masas  $G$ :

$$\mathbf{H}_G = \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_G \wedge M \mathbf{v}_G. \quad (6.21)$$

---

<sup>3</sup>Una excepción a esto sería el caso de un sistema aislado, en el que  $G$  se mueve con velocidad rectilínea y uniforme, ver ecuación (6.8).

Conviene resaltar que en esta expresión del momento cinético se emplean velocidades absolutas.

Sin embargo, para calcular el momento cinético relativo al S.C.M., además de tomar momentos respecto de  $G$ , debemos emplear también las velocidades  $\mathbf{v}_i$  relativas al S.C.M.:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G^{SCM} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \wedge m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G) \\ &= \underbrace{\sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i}_{\mathbf{H}_O} - \underbrace{\sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_G}_{\mathbf{r}_G \wedge M \mathbf{v}_G} - \underbrace{\mathbf{r}_G \wedge \sum_i m_i \mathbf{v}_i}_{\mathbf{r}_G \wedge M \mathbf{v}_G} + \mathbf{r}_G \wedge M \mathbf{v}_G \\ &= \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_G \wedge M \mathbf{v}_G. \end{aligned}$$

Observamos pues que ambas expresiones resultan ser idénticas:  $\mathbf{H}_G^{SCM} = \mathbf{H}_G$ . Por tanto, a la hora de tomar momentos en  $G$ , no nos preocuparemos de este aspecto y escribiremos simplemente  $\mathbf{H}_G$ . Conviene advertir que esto no sucede en otros puntos distintos de  $G$ .

Derivando (6.21) respecto del tiempo:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}_G = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O - \underbrace{\mathbf{v}_G \wedge M \mathbf{v}_G}_{=0} - \mathbf{r}_G \wedge \underbrace{M \mathbf{a}_G}_{\mathbf{F}} = M \mathbf{O} - \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{F}$$

pero

$$\mathbf{M}_G = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{F}_i^{ext} = M \mathbf{O} - \mathbf{r}_G \wedge \underbrace{\left( \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} \right)}_{\mathbf{F}},$$

luego:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathbf{H}_G = \mathbf{M}_G} \quad (6.22)$$

Es decir, se verifica la ecuación del Momento Cinético (6.12) respecto del origen  $G$  del S.C.M., exactamente igual que si fuese inercial.

Por lo tanto, continuando con la discusión realizada al final del apartado 6.2.2, para aplicar la ecuación de balance del momento cinético (6.12), se debe tomar momentos bien respecto de un punto fijo  $O$ , o bien respecto del centro de masas  $G$  del sistema; En este último caso, las velocidades pueden ser las absolutas respecto de un sistema inercial, o las relativas al S.C.M., ya que según hemos visto ambas dan idéntico resultado.



Por el contrario, si empleamos un punto  $Q$  cualquiera, que no coincida necesariamente con  $G$  ni sea fijo, derivando la fórmula (6.14) resulta:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H}_Q = \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_O - \mathbf{r}_Q \wedge M\mathbf{v}_G) = \underbrace{M\mathbf{O} - \mathbf{r}_Q \wedge M\mathbf{a}_G}_{M_Q} - \mathbf{v}_Q \wedge M\mathbf{v}_G$$

Es decir:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H}_Q = M_Q - \mathbf{v}_Q \wedge M\mathbf{v}_G. \quad (6.23)$$

Es necesario pues añadir un término complementario  $\mathbf{v}_Q \wedge M\mathbf{v}_G$  respecto de las ecuaciones (6.12) ó (6.22). Por tanto, si se toman momentos respecto de otro punto  $Q$ , sólo se verificará la ecuación de balance del momento cinético (6.12) cuando se cumpla una de las condiciones siguientes:

- si el punto  $Q$  tiene velocidad nula,  $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ ;
- si el punto  $Q$  coincide con  $G$ , o por lo menos, su velocidad es paralela a la de  $G$ :  $\mathbf{v}_Q \parallel \mathbf{v}_G$ .

También podríamos haber calculado  $\mathbf{H}_Q^{SQ}$  empleando las velocidades en el «Sistema  $Q$ » (S.Q.), definido de forma análoga al S.C.M. como una referencia con origen en  $Q$  y ejes de direcciones fijas:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_Q^{SQ} &= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \wedge m_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_Q) \\ &= \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_G \wedge M\mathbf{v}_Q - \mathbf{r}_Q \wedge M\mathbf{v}_G + \mathbf{r}_Q \wedge M\mathbf{v}_Q \\ &= \mathbf{H}_Q + (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_G) \wedge M\mathbf{v}_Q. \end{aligned}$$

Observamos en primer lugar que  $\mathbf{H}_Q^{SQ} \neq \mathbf{H}_Q$ . Derivando,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{H}_Q^{SQ} &= \frac{d}{dt}\mathbf{H}_Q + \frac{d}{dt}[(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_G) \wedge M\mathbf{v}_Q] \\ &= M_Q - \mathbf{v}_Q \wedge M\mathbf{v}_G + (\mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_G) \wedge M\mathbf{v}_Q + (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_G) \wedge M\mathbf{a}_Q \\ &= M_Q + (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_G) \wedge M\mathbf{a}_Q \end{aligned} \quad (6.24)$$

Vemos que tampoco se cumple en este caso la ecuación de balance del momento cinético (6.12), debido al término complementario  $(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_G) \wedge M\mathbf{a}_Q$ , que sólo se anula si se verifica una de las condiciones siguientes:

- si el punto  $Q$  coincide con  $G$ :  $\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_G$ ;
- si el S.Q. es inercial:  $\mathbf{a}_Q = \mathbf{0}$  (en este caso no basta que sea  $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ ,  $Q$  debe ser un punto fijo, es decir, que esté constantemente en reposo);

- si, sin ser el S.Q. inercial, la aceleración de  $Q$  está dirigida hacia  $G$ :  
 $(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_G) \parallel \mathbf{a}_Q$ .

Como resultado de la discusión anterior se extrae una recomendación importante a efectos prácticos:

*no conviene nunca aplicar la ecuación del momento cinético (6.12) en puntos que no sean o bien fijos, o bien el centro de masas.*

La razón es que los términos correctores que habría que manejar en otro caso no tienen una interpretación física clara, siendo muy fácil que den lugar a confusiones.

A estos efectos es importante destacar que no es lo mismo un punto fijo que un punto que tenga velocidad nula en un instante (en este último caso el punto puede tener aceleración no nula, con lo que el término corrector en (6.24) sería no nulo). Otra posible fuente de error es confundir la velocidad de un punto definido por un criterio geométrico (velocidad de «sucesión»), con la velocidad del punto del sólido que coincide con él en un instante dado<sup>4</sup>.

### 6.3.3. Energía cinética

Calculamos primero la relación entre las medidas de la energía cinética  $T$  (absoluta) y  $T^{SCM}$  (relativa al S.C.M.):

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\nu}_i) \cdot (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\nu}_i) \\ &= \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2}_{\stackrel{\text{def}}{=} T^{SCM}} + \underbrace{\left( \sum_i m_i \boldsymbol{\nu}_i \right)}_{=0} \cdot \mathbf{v}_G + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_G^2, \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Esto último ocurre a menudo cuando se toman momentos respecto del punto de contacto de dos sólidos, como en la rodadura de un disco sobre una recta. El punto de contacto entre ambos se traslada sobre la recta al rodar el disco, por lo que su velocidad no es nula; sin embargo, es el centro instantáneo de rotación en cada instante, por lo que la velocidad del punto del disco situado sobre él en cada instante sí será nula. Por ejemplo, para un sólido plano que rueda sin deslizar sobre una recta, el momento cinético relativo al punto del sólido que está sobre el centro de rodadura es  $H_Q = I_Q \Omega$ , siendo  $I_Q$  el momento de inercia. No se cumple, salvo en algunos casos particulares, la ecuación  $M_Q = (d/dt)H_Q = I_Q \dot{\Omega}$ , por ser  $Q$  un punto cuya velocidad es instantáneamente nula pero que tiene aceleración no nula

es decir:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_G^2 + T^{SCM}} \quad (\text{Teorema de König}) \quad (6.25)$$

La energía cinética del sistema se puede descomponer por tanto en la suma de la de una partícula con toda la masa  $M$  que se moviera con  $G$ , más la energía cinética relativa al S.C.M. El primer sumando se puede interpretar como el debido al movimiento de traslación del sistema, mientras que el segundo corresponde al movimiento relativo al centro de masa.

Si se calcula lo mismo respecto al S.Q., resulta

$$T = T^{SQ} - \frac{1}{2} M v_Q^2 + M \mathbf{v}_Q \cdot \mathbf{v}_G$$

expresión que se reduce a la anterior para  $Q \equiv G$ . Volvemos a advertir al igual que ya se hizo para el momento cinético, para evitar posibles errores en la aplicación del teorema de König, de la inconveniencia de aplicar esta última reducción a un punto  $Q$  distinto de  $G$ .

Tomando una variación elemental (diferencial) de  $T^{SCM}$ ,

$$dT^{SCM} = \sum_i m_i (\boldsymbol{\alpha}_i dt) \cdot \boldsymbol{\nu}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{\alpha}_i \cdot d\boldsymbol{\rho}_i$$

Pero:

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i = m_i (\boldsymbol{\alpha}_i + \mathbf{a}_G) \quad \Rightarrow \quad m_i \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_G,$$

luego

$$dT^{SCM} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\boldsymbol{\rho}_i - \underbrace{\left( \sum_i m_i d\boldsymbol{\rho}_i \right) \cdot \mathbf{a}_G}_{=0} = \sum_i \underbrace{\mathbf{F}_i \cdot d\boldsymbol{\rho}_i}_{\stackrel{\text{def}}{=} dW^{SCM}}$$

Por lo tanto

$$\boxed{dT^{SCM} = dW^{SCM}},$$

es decir, se cumple también la ecuación de la energía cinética (6.15) en el sistema del centro de masa, a pesar de que no sea inercial.

### 6.3.4. Aplicación: sólidos rígidos con movimiento plano

Como aplicación de los teoremas generales expuestos arriba, resumimos a continuación los resultados principales para el caso concreto de sólidos rígidos con movimiento plano. No se pretende una exposición rigurosa ni

detallada de este tema, que se considera ya conocido a partir de cursos anteriores.

Se entiende por sólido rígido un sistema en el que la configuración relativa de todas sus partículas no sufre variación, no se producen distorsiones ni cambio de distancia entre las partículas del mismo. La condición de movimiento plano indica que las velocidades de todos los puntos pertenecen a un plano dado  $\Pi$ , es decir son perpendiculares a una determinada dirección  $\mathbf{k}$  fija (la normal a  $\Pi$ ). El plano del movimiento se puede caracterizar por las coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , o bien los versores de la base  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  (que forman un triedro a derechas con  $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$ ).

Además el sólido estará constituido en el caso más general por una masa distribuida a lo largo de un cierto dominio  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ , con densidad másica  $\rho$  por unidad de volumen. Considerando la sección  $\tilde{\mathcal{B}}$  de  $\mathcal{B}$  por el plano del movimiento, es posible también definir una densidad másica por unidad de área, que llamaremos  $\tilde{\rho}$  para diferenciarla de la volumétrica:

$$dm = \rho dV = \tilde{\rho} dA.$$

Así, la masa del sólido será

$$M = \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \tilde{\rho} dA. \quad (6.26)$$

El centro de masas se obtiene mediante

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \mathbf{r} \tilde{\rho} dA. \quad (6.27)$$

### Magnitudes cinéticas

**Cantidad de movimiento.**— Se expresa de la misma manera que un sistema general:

$$\mathbf{P} = \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \mathbf{v} \tilde{\rho} dA = M \mathbf{v}_G \Rightarrow \begin{cases} P_x = M \dot{x}_G \\ P_y = M \dot{y}_G \end{cases} \quad (6.28)$$

**Momento cinético.**— Para expresar el momento cinético debemos introducir una nueva magnitud definida por la geometría de masas del sólido, el *momento de inercia* respecto de un punto<sup>5</sup>  $O$ :

$$I_O = \int_{\tilde{\mathcal{B}}} r^2 \tilde{\rho} dA, \quad (6.29)$$

<sup>5</sup>Estrictamente hablando, sería el momento de inercia respecto de un eje perpendicular al plano que pasa por el punto dado.

donde las distancias  $r$  están medidas respecto al punto  $O$  en el que se toman momentos. Dada la constancia de la geometría de masas de un sólido rígido, el momento de inercia respecto a un punto dado del mismo es una constante. El teorema de Steiner permite relacionar el momento de inercia respecto a un punto cualquiera con el que corresponde al centro de masas:

$$I_O = I_G + M\overline{OG}^2. \quad (6.30)$$

Consideramos en primer lugar el momento cinético respecto de un punto con velocidad nula, que se toma como origen de coordenadas. La expresión es

$$\mathbf{H}_O = \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \tilde{\rho} dA. \quad (6.31)$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{v} = \Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{r}$ , la integral resulta

$$\mathbf{H}_O = \left( \int_{\tilde{\mathcal{B}}} r^2 \tilde{\rho} dA \right) \Omega \mathbf{k}. \quad (6.32)$$

Puesto que tanto el vector momento cinético como la velocidad angular necesariamente llevan la dirección del versor  $\mathbf{k}$  normal al plano, se puede prescindir del mismo en las expresiones. Empleando la definición del momento de inercia (6.29) resulta

$$\boxed{H_O = I_O \Omega.} \quad (6.33)$$

Tomando ahora para un caso general el momento respecto a  $G$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G &= \int_{\tilde{\mathcal{B}}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{v} \tilde{\rho} dA = \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \tilde{\rho} dA - \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{v} \tilde{\rho} dA \\ &= \mathbf{H}_O - \mathbf{r}_G \wedge M \mathbf{v}_G = I_O \Omega \mathbf{k} - \mathbf{r}_G \wedge M(\Omega \mathbf{k} \wedge \mathbf{r}_G) \\ &= (I_O - M r_G^2) \Omega \mathbf{k}; \end{aligned} \quad (6.34)$$

y teniendo en cuenta el teorema de Steiner (6.30),

$$\boxed{H_G = H_G^{SCM} = I_G \Omega.} \quad (6.35)$$

**Energía cinética.**— Consideramos en primer lugar el caso en que el origen  $O$  tenga velocidad nula:

$$T = \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \frac{1}{2} v^2 \tilde{\rho} dA = \int_{\tilde{\mathcal{B}}} \frac{1}{2} (\Omega r)^2 \tilde{\rho} dA \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} I_O \Omega^2.} \quad (6.36)$$

En el caso general, haciendo uso del teorema de König (6.25), y teniendo en cuenta que  $T^{SCM} = \frac{1}{2}I_G\Omega^2$ ,

$$\boxed{T = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\Omega^2.} \quad (6.37)$$

### Ecuaciones de la dinámica

**Balance de cantidad de movimiento.**— Las ecuaciones son las mismas que en el caso general:

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}_G \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} F_x = M\ddot{x}_G \\ F_y = M\ddot{y}_G \end{array}} \quad (6.38)$$

**Balance de momento cinético.**— En el caso en que  $O$  sea *un punto fijo*<sup>6</sup> las ecuaciones de balance resultan directamente de derivar 6.33,

$$\boxed{M_O = I_O\dot{\Omega}.} \quad (6.39)$$

En un caso general se puede derivar el momento cinético respecto a  $G$  (6.35):

$$\boxed{M_G = I_G\dot{\Omega}.} \quad (6.40)$$

Esta última expresión es de validez general, siendo posible emplearla en cualquier caso, con independencia de que exista o no un punto fijo.

Las tres ecuaciones (6.38)<sub>1</sub>, (6.38)<sub>2</sub> y (6.40) se denominan *ecuaciones cardinales de la dinámica*, siendo necesarias y suficientes para determinar en un caso general la dinámica de los tres grados de libertad del sólido en movimiento plano  $(x_G, y_G, \theta)$ .

**EJEMPLO 6.7:** Un semidisco homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$  se mueve en un plano vertical fijo, rodando sin deslizar sobre una recta horizontal. Se pide:

- Si el semidisco está en un instante determinado con su diámetro de borde vertical y con velocidad de rotación  $\Omega$  (figura 6.16), obtener la aceleración angular  $\dot{\Omega}$  y la reacción de la recta en el punto de contacto.
- Mismas cuestiones, pero ahora para el semidisco en una posición genérica definida por el ángulo  $\theta$  (figura 6.16).

---

<sup>6</sup>Es importante remarcar la condición de punto fijo en  $O$ , no bastando con que la velocidad instantánea sea nula. Por ejemplo, en un punto de rodadura no es posible tomar momentos en un caso general, ya que el punto  $O$  de rodadura varía con el movimiento, el momento de inercia  $I_O$  no correspondería a lo largo del tiempo al mismo punto material y por tanto, salvo casos particulares, tendrá derivada no nula.

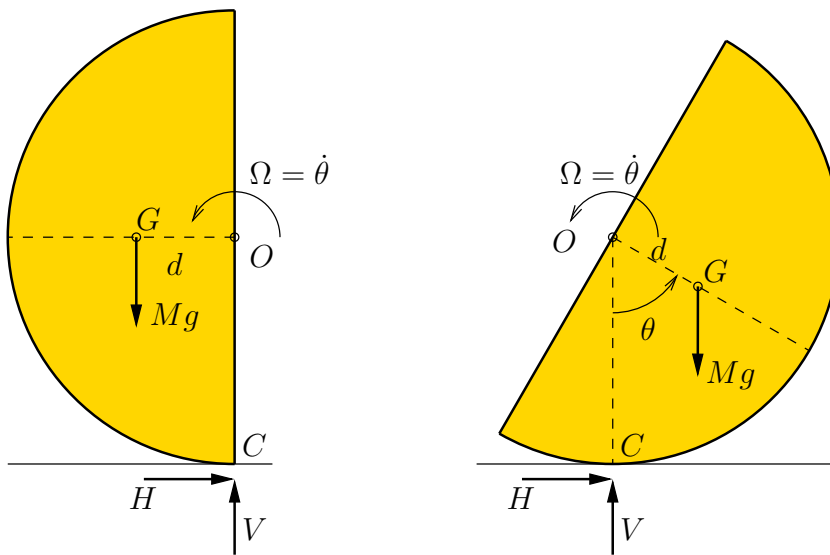


Figura 6.16: *Ejemplo 6.7*. Configuración con diámetro de borde vertical y configuración genérica, definida por el ángulo  $\theta$ .

*Solución.*

a.— Se trata de un sistema rígido y plano, que se puede resolver de forma general mediante las ecuaciones cardinales de la dinámica, que en este caso son tres (dos del balance de cantidad de movimiento y una del momento cinético en  $G$ ). La condición de rodadura restringe dos grados de libertad, por lo que el movimiento tiene un sólo grado de libertad, aunque además debemos considerar las incógnitas de las componentes de la reacción en la recta  $(H, V)$ .

En primer lugar, aplicando el teorema de Guldin calculamos la posición del centro de masas:

$$2\pi d \left( \frac{1}{2}\pi R^2 \right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad d = \overline{OG} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Las ecuaciones de la dinámica las aplicaremos tomando momentos en  $G$ , por lo que calculamos el momento de inercia en este punto. (Obsérvese que el punto de rodadura  $C$  no es un punto fijo, por lo que en general no es válido tomar momentos en él, aunque la tentación es fuerte ya que las reacciones

incógnita no dan momentos en este punto.)

$$I_O = \frac{1}{2}MR^2; \quad I_G = I_O - Md^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)MR^2$$

Mediante un análisis elemental del campo de aceleraciones resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_O &= -R\ddot{\theta}; & \ddot{y}_O &= 0; \\ \ddot{x}_G &= -R\ddot{\theta} - \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2; & \ddot{y}_G &:= -\frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \end{aligned}$$

Ya podemos escribir las ecuaciones cardinales de la dinámica. En primer lugar, las de balance de cantidad de movimiento:

$$H = M\ddot{x}_G = -M \left( R\ddot{\theta} + \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \right); \quad (6.41)$$

$$V - Mg = M\ddot{y}_G = -M\frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta}. \quad (6.42)$$

La ecuación del momento cinético es:

$$HR + V\frac{4R}{3\pi} = I_G\ddot{\theta} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)MR^2\ddot{\theta}. \quad (6.43)$$

Entre las tres ecuaciones (6.41), (6.42) y (6.43) se despeja para obtener el resultado pedido:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{8}{9\pi} \left( \frac{g}{R} + \dot{\theta}^2 \right); \\ H &= -\frac{4}{9\pi}M(2g - R\dot{\theta}^2); \\ V &= Mg - \frac{32}{27\pi^2}M(g + R\dot{\theta}^2) \end{aligned} \quad (6.44)$$

Puede comprobarse que, de haber tomado momentos en el punto de rodadura  $C$ , los resultados habrían sido distintos (e incorrectos).

b.— En este caso (figura 6.16), las componentes de la aceleración de  $G$  son:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_G &= -R\ddot{\theta} - \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{y}_G &= \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (6.45)$$



Las ecuaciones cardinales de la dinámica, tomando momentos en  $G$ , resultan:

$$\begin{aligned} H &= M \left( -R\ddot{\theta} - \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \cos \theta \right) \\ V - Mg &= M \left( \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2 \cos \theta + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta \right) \\ H \left( R - \frac{4R}{3\pi} \cos \theta \right) - V \frac{4R}{3\pi} \operatorname{sen} \theta &= \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) MR^2\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (6.46)$$

Con algo más de trabajo podemos despejar de estas tres ecuaciones los resultados buscados:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -8 \frac{(g/R + \dot{\theta}^2) \operatorname{sen} \theta}{9\pi - 16 \cos \theta} \\ H &= \frac{4}{3} M \frac{(6g\pi - 3R\dot{\theta}^2\pi + 8R\dot{\theta}^2 \cos \theta - 8g \cos \theta) \operatorname{sen} \theta}{\pi(9\pi - 16 \cos \theta)} \\ V &= Mg + \frac{1}{3} M \frac{-32g \operatorname{sen}^2 \theta + 36\pi R\dot{\theta}^2 \cos \theta - 32R\dot{\theta}^2(1 + \cos^2 \theta)}{\pi(9\pi - 16 \cos \theta)} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Como comprobación, podemos ver que al particularizar  $\theta = -\pi/2$  en estas expresiones se obtienen las mismas del caso anterior (6.44).  $\square$

**EJEMPLO 6.8:** Sea un sistema binario constituido por dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  que se atraen con una fuerza central proporcional a su distancia  $s$ , es decir,  $F = -ks$ . Además, el conjunto se halla sujeto al campo gravitatorio simplificado terrestre. Se pide:

- Obtener la expresión de la energía (potencial más cinética) del conjunto en *función exclusivamente* de las coordenadas de su C.D.M.  $(x_G, y_G)$ , su distancia  $(s)$ , y el ángulo  $(\varphi)$  que forma el segmento  $m_1 m_2$  con una dirección fija.
- Misma cuestión con la cantidad de movimiento y el momento cinético.
- Obtener las integrales primeras del movimiento para las coordenadas anteriores.
- Obtener la ecuación diferencial de 2.º orden del movimiento en función exclusivamente de la coordenada  $s$ .
- Tomando ahora como coordenadas las cartesianas absolutas de la partícula  $m_1$  que llamaremos  $(r_x, r_y)$  y las relativas de  $m_2$  que denominaremos  $(s_x, s_y)$ , obtener las ecuaciones de la dinámica y comprobar

que las trayectorias relativas de cada partícula respecto de la otra son elipses.

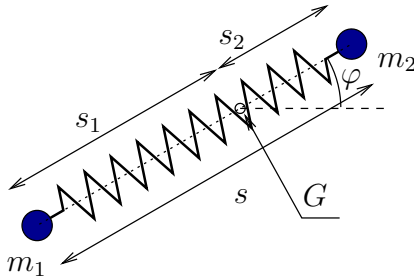


Figura 6.17: Ejemplo 6.8;

*Solución.*

a.— Al tratarse de fuerzas centrales el movimiento es plano y sólo se necesita estudiar la configuración dentro de un plano  $xy$  fijo, con los parámetros indicados en el enunciado  $(x_G, y_G, s, \varphi)$ .

Establecemos unos parámetros auxiliares  $(s_1, s_2)$  que definen las distancias de las partículas respecto al centro de masas  $G$  (figura 6.17). Aplicando la definición de centro de masas se tienen las relaciones

$$s_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} s, ; \quad s_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} s. \quad (6.48)$$

Aplicando el teorema de König (6.25), la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}m_1(\dot{s}_1^2 + s_1^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{s}_2^2 + s_2^2\dot{\varphi}^2);$$

teniendo en cuenta las expresiones (6.48), y llamando

$$\begin{aligned} M &= (m_1 + m_2) && \text{(masa total);} \\ \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} && \text{(masa equivalente),} \end{aligned}$$

se llega a:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2). \quad (6.49)$$

Por otra parte, la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}ks^2 + Mgy_G.$$

Por lo tanto la energía total resulta

$$E = T + V = \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}ks^2 + Mgy_G. \quad (6.50)$$

b.— La cantidad de movimiento resulta trivialmente

$$\mathbf{P} \equiv (M\dot{x}_G, M\dot{y}_G). \quad (6.51)$$

El movimiento es plano, por lo que el momento cinético puede caracterizarse por el valor escalar  $H_G$ :

$$H_G = m_1 s_1^2 \dot{\varphi} + m_2 s_2^2 \dot{\varphi},$$

y aplicando las expresiones (6.48) se llega a

$$H_G = \mu s^2 \dot{\varphi}. \quad (6.52)$$

c.— Las fuerzas aplicadas son o bien centrales (atracción elástica) o paralelas (gravedad simplificada), por lo que el momento de las mismas en  $G$  se anula, de donde se deduce la constancia del momento cinético:

$$M_G = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 \dot{\varphi} = C \quad (\text{cte.}) \quad (6.53)$$

Por otra parte, todas las fuerzas son conservativas, por lo que se conserva la energía total, dada por la ecuación (6.50). Dentro de esta ecuación podemos dividir la energía en dos componentes, una correspondiente al movimiento del C.D.M. y otra al movimiento relativo:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + Mgy_G}_{E_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}ks^2}_{E_2}. \quad (\text{cte.}) \quad (6.54)$$

La energía  $E_1$  del C.D.M. corresponde a un movimiento parabólico y es constante:

$$\frac{d}{dt}E_1 = \frac{1}{2}M(2\dot{x}_G \underbrace{\ddot{x}_G}_{=0} + 2\dot{y}_G \underbrace{\ddot{y}_G}_{=-g}) + Mg\dot{y}_G = 0;$$

por tanto podemos establecer como integral primera la constancia de la energía  $E_2$  del movimiento relativo:

$$E_2 = E - E_1 = \frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}ks^2 \quad (\text{cte.}) \quad (6.55)$$

Empleando la otra integral primera (6.53) se puede eliminar  $\dot{\varphi}$  para obtener finalmente

$$E_2 = \frac{1}{2}\mu \left( \dot{s}^2 + \frac{C^2}{s^2} \right) + \frac{1}{2}ks^2 \quad (\text{cte.}) \quad (6.56)$$

d.— Podemos obtener una ecuación diferencial de 2.º orden de la dinámica aplicando directamente la expresión (5.15) válida para sistemas con fuerzas centrales:

$$\mu \left( \ddot{s} - \frac{C^2}{s^3} \right) = F(r) = -ks. \quad (6.57)$$

Esta misma expresión se puede obtener derivando la ecuación que expresa la constante de la energía (6.56).

e.— Con los parámetros dados  $(r_x, r_y, s_x, s_y)$  se pueden plantear las ecuaciones fundamentales de la dinámica para cada masa y cada dirección:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{r}_x &= ks_x; \\ m_1 \ddot{r}_y &= -m_1 g + ks_y; \\ m_2 (\ddot{r}_x + \ddot{s}_x) &= -ks_x; \\ m_2 (\ddot{r}_y + \ddot{s}_y) &= -m_2 g - ks_y. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Mediante las ecuaciones (6.58)<sub>1</sub> y (6.58)<sub>3</sub> se puede eliminar  $\ddot{r}_x$ . Análogamente, mediante (6.58)<sub>2</sub> y (6.58)<sub>4</sub> se elimina  $\ddot{r}_y$ . De esta manera se obtienen las dos ecuaciones reducidas siguientes:

$$\mu \ddot{s}_x + ks_x = 0; \quad \mu \ddot{s}_y + ks_y = 0. \quad (6.59)$$

(Este razonamiento es análogo al que se aplica en el apartado 5.1 para realizar la reducción general del sistema de dos cuerpos.)

Las soluciones generales de las ecuaciones anteriores son

$$s_x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi_x); \quad s_y(t) = B \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi_y),$$

siendo  $\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$  y  $A, B, \phi_x, \phi_y$  constantes que dependerán de las condiciones iniciales. Estas ecuaciones definen paramétricamente una elipse, como se vió en el apartado 3.2. Por tanto, las trayectorias relativas de cada masa respecto de la otra son *elipses*.  $\square$

### 6.3.5. Constantes del movimiento en sistemas aislados

En un sistema aislado, todas las fuerzas exteriores desaparecen. Resumiendo los diferentes resultados presentados en apartados anteriores (veáanse las ecuaciones (6.8), (6.7), (6.19), (6.25), (6.22)), es posible establecer 10 integrales o constantes del movimiento:

$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_G = \text{cte.}$	Conserv. cantidad de movimiento
$\mathbf{r}_G(t) - \frac{\mathbf{P}}{M}t = \mathbf{r}_G(0)$	Th. movimiento del C.M.
$E = T + V^{int} = \frac{1}{2}Mv_G^2 + T^{SCM} + V^{int}$	Conserv. energía
$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_G + \mathbf{r}_G \wedge \mathbf{P}$	Conserv. momento cinético

(6.60)

Las magnitudes  $\{\mathbf{P}, \mathbf{r}_G(0), E, \mathbf{H}_O\}$  constituyen las diez constantes clásicas del movimiento del sistema de  $N$  partículas aislado.

Es posible demostrar<sup>7</sup> que estas diez constantes provienen de la invariancia de las leyes de la mecánica ante las transformaciones más generales que convierten un sistema inercial en otro inercial, es decir, que mantienen invariantes las leyes de la mecánica:

- *Rotación  $\mathbf{R}$* :  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r}$ , asociada a la conservación de  $\mathbf{H}_O$ . Al ser  $\mathbf{R}$  ortogonal<sup>8</sup> ( $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ ), este tensor de rotación depende sólo de tres parámetros.
- *Traslación  $\mathbf{a}$* :  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ , asociada a la conservación de  $\mathbf{P}$ .
- *Transformación de Galileo<sup>9</sup>  $\mathbf{w}$* :  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{w}t$ , asociada al Th. del movimiento del centro de masa.
- *Traslación de tiempo  $s$* :  $t \mapsto t' = t + s$ , asociada a la conservación de la energía  $E$ .

Un planteamiento similar se puede realizar a partir de la función Lagrangiana en dinámica analítica, cuestión que se describirá en el apartado 7.7.

## 6.4. Trabajos virtuales

Los principios y teoremas generales expuestos en los apartados 6.2 y 6.3 provienen directamente de las leyes de Newton, aunque deben reconocerse también algunas contribuciones clave debidas a Euler, como el principio del

<sup>7</sup>Ver p. ej. F. Scheck: *Mechanics—from Newton's Laws to Deterministic Chaos*, (2.<sup>a</sup> ed.), Springer-Verlag, Berlin (1990); apartados 1.12 y 1.13

<sup>8</sup>En el apartado 8.6.4 se discuten las rotaciones rígidas y se analiza la propiedad de ortogonalidad para las mismas.

<sup>9</sup>Una versión más simplificada de esta transformación se presentó en el apartado 1.3.

momento cinético. Por este motivo los métodos asociados se suelen denominar de «Newton-Euler».

En este apartado se presentan los principios y métodos basados en desplazamientos o trabajos virtuales. Sería posible postular estos principios básicos de manera independiente a los principios de Newton-Euler, pudiendo servir de base para construir sobre ellos toda la mecánica. A diferencia de las leyes de Newton, formulan directamente las ecuaciones para la estática o la dinámica de manera conjunta para todo un sistema, y no partícula a partícula, por lo que revisten un especial interés para el estudio de sistemas de varias partículas.

Comenzaremos por definir el concepto de *Desplazamientos virtuales*. En un sistema de  $N$  partículas, se denomina así a un conjunto de desplazamientos infinitesimales arbitrarios de cada partícula del sistema,  $\{\delta\mathbf{r}_i (i = 1, \dots, N)\}$ . En contraposición a los *desplazamientos infinitesimales reales*,  $\{d\mathbf{r}_i (i = 1, \dots, N)\}$ , los desplazamientos virtuales son una entelequia, que nos servirá para formular el principio de los trabajos virtuales; se trata de desplazamientos ficticios, inventados, que tienen lugar en un instante dado («congelado») de tiempo. Por el contrario, los desplazamientos infinitesimales reales  $\{d\mathbf{r}_i\}$  se producen en el movimiento real, durante un intervalo  $dt$ , y se pueden expresar como diferencial de las funciones que definen el movimiento,  $\{\mathbf{r}_i\}$ .

Aunque en principio  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$  son completamente arbitrarios (pudiendo violar incluso los enlaces del sistema), en la práctica emplearemos desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces en la mayoría de los casos.

Imaginemos en primer lugar un sistema en equilibrio, condición que queda expresada por  $\dot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0}$ , ( $i = 1, \dots, N$ ). Al ser la aceleración nula, la fuerza total sobre cada partícula debe ser nula; descomponiendo ésta como suma de las fuerzas activas ( $\mathbf{f}_i$ ) y reactivas ( $\mathbf{R}_i$ ),

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{R}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (6.61)$$

El trabajo virtual realizado por las fuerzas  $\mathbf{F}_i$  para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$  es, por tanto, también nulo:

$$\delta W \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \{\delta\mathbf{r}_i\}. \quad (6.62)$$

La equivalencia entre estas dos expresiones funciona también en sentido inverso: si se verifica la igualdad (6.62), se ha de verificar a su vez (6.61). Para demostrar esto bastaría ir tomando sucesivos conjuntos de desplazamientos virtuales, con una única componente no nula; la igualdad (6.62) obligaría a

la nulidad de la componente de la fuerza correspondiente; al verificarse esta ecuación  $\forall\{\delta\mathbf{r}_i\}$ , se deduce que todas las componentes de las fuerzas han de ser nulas.

Por tanto, la ecuación (6.62), enunciada para  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$  arbitrarios, es *condición necesaria y suficiente para el equilibrio*.

Aunque se podría tomar este enunciado, con  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$  arbitrarios, como expresión del Principio de los Trabajos Virtuales, no se suele hacer así por la escasa utilidad que tiene un planteamiento tan general. Es preferible formularlo en función de desplazamientos virtuales compatibles, como se describe a continuación.

### 6.4.1. El principio de los trabajos virtuales

Sea un sistema con enlaces lisos (recordamos la definición realizada en el apartado 6.1 como aquellos en que las fuerzas de enlace no realizan trabajo para los desplazamientos permitidos por los enlaces), y un conjunto de desplazamientos virtuales  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ , *compatible* con los enlaces. Al expresar el trabajo virtual, el término de las fuerzas de enlace se anula:

$$\delta W = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i + \underbrace{\sum_i \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i}_{=0} = 0, \quad \forall\{\delta\mathbf{r}_i\} \text{ comp.}$$

Por tanto el trabajo virtual  $\delta W$  se puede calcular a partir únicamente de las fuerzas activas ( $\mathbf{f}_i$ ), eliminando las fuerzas reactivas del cómputo del mismo. El principio de los trabajos virtuales reza entonces:

*“En un sistema material sometido a enlaces lisos, es condición necesaria y suficiente para el equilibrio que el trabajo de las fuerzas aplicadas para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces sea nulo:*

$$\boxed{\delta W = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad \forall\{\delta\mathbf{r}_i\} \text{ comp.}} \quad (6.63)$$

OBSERVACIONES:

- Es inmediato comprobar que (6.63) se cumple necesariamente si se verifica (6.61), es decir, se trata de una condición necesaria para el equilibrio en el sentido de Newton. Sin embargo, la suficiencia para garantizar el equilibrio no se puede deducir directamente, como ocurría en el caso de  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$  arbitrarias (6.62).

- Para una fuerza total  $\mathbf{F}_i$  sobre un punto dado, se verifica que  $\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ ,  $\forall i$  (no sumado); sin embargo, para la fuerza activa correspondiente  $\mathbf{f}_i$  en general es  $\mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \neq 0$ . Es decir, los términos individuales del trabajo virtual de las fuerzas activas no tienen por qué anularse, aunque la suma sí es siempre nula ( $\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ ).
- Las fuerzas activas  $\mathbf{f}_i$  deben incluir tanto las externas como las internas, que en un caso general sí realizan trabajo virtual. Por el contrario,  $\mathbf{f}_i$  excluyen a las fuerzas de reacción, que no desarrollan trabajo virtual.

Estas observaciones justifican la consideración del enunciado anterior (6.63) como «principio», que se postula sin necesidad de demostración. A pesar de esto conviene mencionar que es posible encontrar algunas demostraciones<sup>10</sup> que inciden en la equivalencia del principio de los trabajos virtuales con la estática.

Por último, conviene notar que la ventaja del principio de los trabajos virtuales es que plantea las condiciones para el equilibrio global del sistema, *sin emplear las reacciones de los enlaces lisos*, que no hace falta calcular en ningún momento.

También pueden tratarse problemas con enlaces no lisos, agregando a la expresión (6.63) el trabajo virtual correspondiente a las reacciones de los enlaces no lisos, como si se tratase de fuerzas activas. Dicho de otra forma, las únicas fuerzas de reacción que se eliminan de la expresión general del trabajo virtual son las de los enlaces lisos.

### 6.4.2. El principio de D'Alembert

Este principio extiende el de los trabajos virtuales a la dinámica. Partimos para ello de la segunda ley de Newton para una partícula cualquiera del sistema:

$$\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Pasando las «fuerzas de inercia» ( $-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ ) al lado izquierdo del signo igual, resulta una expresión del «equilibrio dinámico», análoga a (6.61):

$$\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (6.64)$$

Aplicamos ahora el principio de los trabajos virtuales al sistema de fuerzas nulo  $\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ , anulándose, al igual que antes, el trabajo de las fuerzas de reacción, bajo la hipótesis de enlaces lisos. Resulta entonces el enunciado siguiente del Principio de D'Alembert:

<sup>10</sup>por ejemplo, Appell y Dautheville, en «*Précis de Mécanique Rationnelle*»



“En un sistema material sometido a enlaces lisos, la evolución dinámica del sistema está determinada, como condición necesaria y suficiente, por la anulación en todo instante del trabajo de las fuerzas aplicadas más el trabajo de las fuerzas de inercia para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces:

$$\boxed{\underbrace{\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i}_{\delta W} - \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ comp.}} \quad (6.65)$$

OBSERVACIONES:

- Es inmediato comprobar que la condición enunciada (6.65) es necesaria, a partir de (6.64). Sin embargo, no es sencillo demostrar la suficiencia con carácter general.
- Para una partícula dada será en general  $(\mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i \neq 0$ , es decir que el sumando individual del trabajo virtual no se anula necesariamente, aunque la suma extendida a todo el sistema sí se anula siempre.
- Aplica la misma observación realizada arriba para el P.T.V. sobre la naturaleza de las fuerzas  $\mathbf{f}_i$ .

En consecuencia, el principio de D’Alembert (6.65) debe considerarse como un principio básico de la dinámica, alternativo a las leyes de Newton y a los principios de Newton-Euler para dinámica de sistemas. Como caso particular, el Principio de D’Alembert da lugar al Principio de los Trabajos Virtuales.

Al igual que en el principio de los trabajos virtuales, el principio de D’Alembert permite expresar la dinámica global del sistema en forma compacta, eliminando las fuerzas de reacción de los enlaces lisos.

Cuando lo que se busca es precisamente calcular el valor de alguna reacción, es posible realizarlo mediante trabajos virtuales empleando un truco. Para ello, se considera este vínculo «liberado» y la fuerza de reacción como una fuerza activa normal, que tendría el efecto precisamente del vínculo. esto nos permite tomar  $\delta \mathbf{r}_i$  vulnerando el vínculo. De esta manera, la reacción correspondiente sí realiza trabajo virtual, y la expresión de los trabajos virtuales (6.63) ó (6.65) permite calcular al final dicha reacción.

La importancia de los métodos basados en los trabajos virtuales radica en que permiten obtener formulaciones prácticas muy generales para la

estática o la dinámica de sistemas con varias partículas (ecuaciones de Lagrange, apartado 7.2). Asimismo son la base de métodos numéricos, muy extendidos en la práctica, para la resolución de problemas con numerosos grados de libertad, como el *método de los elementos finitos*. Estos métodos son de una gran importancia en la mecánica computacional y en el cálculo de las estructuras.

**EJEMPLO 6.9:** El sistema de la figura consta de dos poleas, una  $A$  fija, de la que cuelga una masa  $m_3$  y por el otro lado otra polea  $B$ . A su vez de esta segunda polea cuelgan dos masas  $m_2$  y  $m_3$ . Los hilos son inextensibles y las poleas lisas y sin inercia. Obtener las ecuaciones de la dinámica aplicando el principio de D'Alembert y las aceleraciones de cada una de las masas. (Problema de Poggendorf.)

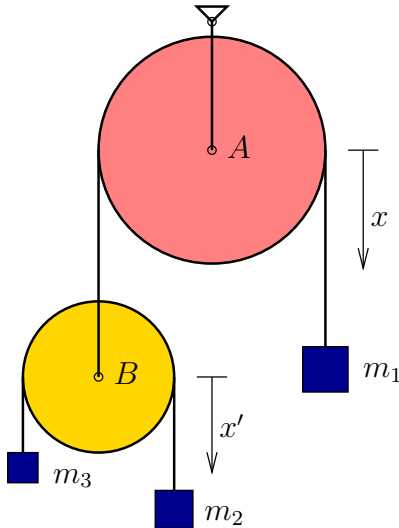


Figura 6.18: *Ejemplo 6.9; Problema de Poggendorf.*

*Solución.* Para definir el sistema se puede emplear la coordenada (absoluta)  $x$ , medida en sentido descendente y a partir de una posición dada de cada uno de los elementos:  $(x_1, x_2, x_3, x_B)$ . Así en principio el sistema tiene cuatro parámetros, aunque estos se encuentran ligados por dos ecuaciones de ligadura, por lo que el número de grados de libertad es de dos.

Empleando también la coordenada relativa  $x'$ , medida a partir de la posición del centro de la polea  $B$ , las ecuaciones de ligadura son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_B; \\ x'_2 &= -x'_3. \end{aligned} \tag{6.66}$$

Teniendo en cuenta la definición de las coordenadas relativas:

$$x'_2 = x_2 - x_B; \quad x'_3 = x_3 - x_B, \quad (6.67)$$

las ecuaciones (6.66) se convierten en la ecuación de ligadura siguiente en términos de  $(x_1, x_2, x_3)$ :

$$x_1 = -\frac{1}{2}(x_2 + x_3). \quad (6.68)$$

Esta ecuación de ligadura nos permitirá escribir las ecuaciones en función de las dos coordenadas libres  $(x_1, x_2)$ .

La expresión del principio de D'Alembert es:

$$\begin{aligned} \delta W &= m_1 g \delta x_1 + m_2 g \delta x_2 + m_3 g \delta x_3 \\ &= m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 + m_2 \ddot{x}_2 \delta x_2 + m_3 \ddot{x}_3 \delta x_3, \\ &\quad \forall (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3) \text{ compatibles.} \end{aligned} \quad (6.69)$$

A partir de la ecuación de ligadura (6.68) se deducen las siguientes dos expresiones inmediatas:

$$\delta x_3 = -2\delta x_1 - \delta x_2; \quad \ddot{x}_3 = -2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2. \quad (6.70)$$

Empleando estas ecuaciones en (6.69) y agrupando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} &(m_1 g - 2m_3 g) \delta x_1 + (m_2 g - m_3 g) \delta x_2 \\ &= [m_1 \ddot{x}_1 - 2m_3(-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)] \delta x_1 + [m_2 \ddot{x}_2 - m_3(-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)] \delta x_2, \\ &\quad \forall (\delta x_1, \delta x_2). \end{aligned} \quad (6.71)$$

Nótese que, al ser libres, no hace falta exigir en la expresión anterior ninguna condición de «compatibilidad con los enlaces» a  $(\delta x_1, \delta x_2)$ . Particularizando para los valores  $(\delta x_1 = 1, \delta x_2 = 0)$  y  $(\delta x_1 = 0, \delta x_2 = 1)$  se obtienen las dos ecuaciones de la dinámica:

$$\begin{aligned} m_1 g - 2m_3 g &= m_1 \ddot{x}_1 - 2m_3(-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2); \\ m_2 g - m_3 g &= m_2 \ddot{x}_2 - m_3(-2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \end{aligned} \quad (6.72)$$

Despejando de estas ecuaciones el valor de las aceleraciones:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= g \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 - 4m_3 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2} \\ \ddot{x}_2 &= g \frac{-3m_1 m_3 + m_1 m_2 + 4m_3 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2} \end{aligned} \quad (6.73)$$

Por último, empleando la expresión (6.70)<sub>2</sub> se obtiene la aceleración de  $m_3$ :

$$\ddot{x}_3 = g \frac{-3m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4m_3 m_2}. \quad (6.74)$$

□

## 6.5. Dinámica en sistemas no inerciales.

Las leyes de Newton son válidas en los sistemas de referencia denominados *inerciales*. Se postula, al formularlas, la existencia al menos de un tal sistema inercial; por el principio de relatividad de Galileo (apartado 1.3), sabemos que cualquier otro sistema de referencia que tenga un movimiento uniforme y rectilíneo respecto del primero también será inercial. En ocasiones llamamos al sistema inercial «fijo», aunque este adjetivo no se emplea con su significado estricto, sino como contraposición al carácter general de un sistema «móvil», no inercial.

Los sistemas de referencia que posean, bien aceleración lineal de su origen ( $\mathbf{a}_O \neq \mathbf{0}$ ), bien rotación ( $\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$ ), no serán inerciales. En ellos no se cumplen las leyes de Newton, por lo que no será posible, por ejemplo, aplicar a cada partícula la ecuación  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , si la medición de la aceleración la realiza un observador ligado al sistema móvil. Sin embargo, es posible estudiar la dinámica de estos sistemas aplicando ciertos términos correctores, lo que puede tener interés práctico en algunos casos. De este tema tratamos a continuación.

### 6.5.1. Dinámica de la partícula

Sea una partícula observada desde dos sistemas de referencia distintos:  $(S) \equiv (Qxyz)$ , inercial, y  $(S') \equiv (Ox'y'z')$ , no inercial:

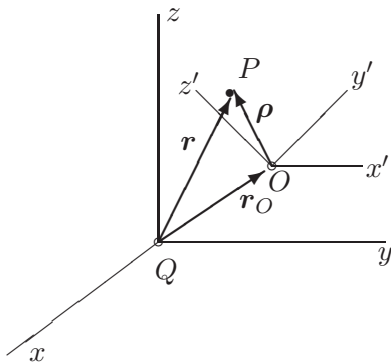


Figura 6.19: Coordenadas de la partícula en sistemas de referencia inercial  $(Qxyz)$  y no inercial  $(Ox'y'z')$ .

Recordemos las relaciones entre posición (4.7), velocidad (4.8) y acele-

ración (4.9) en ambos sistemas:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\rho}, \\ \mathbf{v} &= \underbrace{\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{v}_{\text{arr}}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}, \\ \mathbf{a} &= \underbrace{\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})}_{\mathbf{a}_{\text{arr}}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{\text{rel}}}_{\mathbf{a}_{\text{cor}}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}, \end{aligned}$$

donde  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a})$  son medidas que denominaremos «absolutas» (más precisamente, relativas a  $(S)$ ), mientras que  $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}_{\text{rel}}, \mathbf{a}_{\text{rel}})$  son relativas a  $(S')$ .

El término de arrastre es el que corresponde al movimiento del sólido rígido, es decir, el que tendría la partícula sin movimiento relativo a  $(S')$ . En el campo de velocidades es el único término complementario que aparece. En cambio, para las aceleraciones aparece otro término adicional denominado aceleración de Coriolis. Expresando el principio de la cantidad de movimiento (con aceleraciones absolutas, por supuesto):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} + \mathbf{a}_{\text{rel}});$$

para expresarlo en función de las observaciones relativas a  $(S')$  es necesario pasar los términos complementarios a la izquierda:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_{\text{arr}} - m\mathbf{a}_{\text{cor}} = m\mathbf{a}_{\text{rel}}. \quad (6.75)$$

Por tanto, para aplicar la ecuación de balance del principio, es necesario añadir a las fuerzas realmente actuantes  $\mathbf{F}$  unas *fuerzas de inercia ficticias*  $(-m\mathbf{a}_{\text{arr}})$  y  $(-m\mathbf{a}_{\text{cor}})$ , denominadas fuerzas de arrastre y de Coriolis respectivamente.

Desarrollando su expresión, comprobamos que la fuerza de arrastre es una función de punto, es decir, depende de  $\boldsymbol{\rho}$  además de otros parámetros que puedan definir el movimiento del sistema móvil  $(\mathbf{a}_O, \boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{\Omega}})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{arr}} &\stackrel{\text{def}}{=} -m[\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})] \\ &= -m\mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}_O, \boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{\Omega}}). \end{aligned}$$

Bajo ciertas condiciones, la fuerza de arrastre se puede expresar como el gradiente de un determinado campo escalar y, por tanto, resulta una fuerza conservativa. Por ejemplo, si se verifica que  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}$ ,

$$\mathbf{F}_{\text{arr}} = -m[\mathbf{a}_O - \Omega^2 \boldsymbol{\rho} + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\Omega}];$$

multiplicando escalarmente por  $d\boldsymbol{\rho}$  obtenemos el trabajo elemental de esta fuerza; si suponemos además que  $\mathbf{a}_O$  es constante, comprobamos que es una diferencial exacta:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{arr}} \cdot d\boldsymbol{\rho} &= -m\mathbf{a}_O \cdot d\boldsymbol{\rho} + m\Omega^2 \boldsymbol{\rho} \cdot d\boldsymbol{\rho} - m(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})(\boldsymbol{\Omega} \cdot d\boldsymbol{\rho}) \\ &= d[-m\mathbf{a}_O \cdot \boldsymbol{\rho} + \frac{m}{2}\Omega^2 \rho^2 - \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})^2]; \end{aligned}$$

la función potencial de la que deriva es un campo escalar constante,  $-V(\boldsymbol{\rho})$ , por lo que la fuerza es conservativa:

$$\mathbf{F}_{\text{arr}} \cdot d\boldsymbol{\rho} = -dV,$$

siendo

$$V(\boldsymbol{\rho}) \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{a}_O \cdot \boldsymbol{\rho} - \frac{m}{2}\Omega^2 \rho^2 + \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\rho})^2.$$

Por el contrario, la fuerza de Coriolis no tiene una interpretación clara, al depender, no sólo de la posición  $\boldsymbol{\rho}$ , sino también de la velocidad relativa  $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ .

### 6.5.2. Dinámica de sistemas de varias partículas

Para un sistema formado por un conjunto de partículas, el estudio en una referencia no inercial deberá hacerse aplicando las fuerzas ficticias (6.75) descritas en el apartado anterior a cada una de sus partículas. Al ser las expresiones de estas fuerzas lineales en  $\boldsymbol{\rho}$  y  $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ , parece lógico esperar que su resultante tenga también una expresión sencilla, en función del movimiento del centro de masas  $G$ .

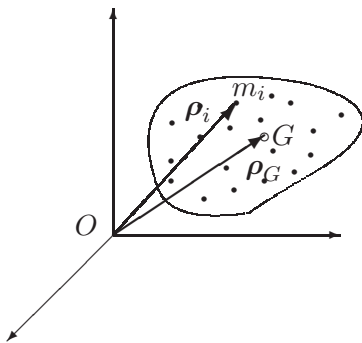


Figura 6.20: Sistema de varias partículas en una referencia no inercial; la posición de cada partícula es  $\boldsymbol{\rho}_i$ .

Supongamos un sistema de  $N$  partículas  $\{m_i\}$ , siendo:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i$$

$$M \boldsymbol{\rho}_G \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i$$

La resultante de las fuerzas de arrastre es:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{arr}} &\stackrel{\text{def}}{=} - \sum_i m_i (\mathbf{a}_{\text{arr}})_i = -[M \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i)] \\ &= -[M \mathbf{a}_O + M \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho}_G + M \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho}_G)], \end{aligned}$$

y la resultante de las fuerzas de Coriolis:

$$\mathbf{F}_{\text{cor}} \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_i m_i [2\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{v}_{\text{rel}})_i] = -[M 2\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{v}_G)_{\text{rel}}]$$

Expresiones que resultan de utilidad para aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento y determinar la posición del centro de masa. Sin embargo, las expresiones de la ecuación del momento cinético no son lineales en  $\boldsymbol{\rho}$  y, por tanto, no resultan tan útiles. Volveremos esto más adelante para el caso del sólido rígido (capítulo 9).

### 6.5.3. Ejes ligados a la superficie de la tierra

Un sistema muy aproximadamente inercial sería uno con origen en el centro del Sol y direcciones de los ejes fijas según las galaxias más lejanas. Este sistema es adecuado para observaciones astronómicas.

Es posible considerar también un sistema con origen en el centro de la Tierra y orientación fija en relación con las galaxias lejanas. Cometeríamos, respecto al caso anterior, el error debido a la aceleración del centro de la Tierra en su movimiento casi circular alrededor del Sol, es decir, la aceleración centrípeta. El error cometido por este término se ve muy aproximadamente compensado por la atracción gravitatoria del Sol:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{sol}} = m \mathbf{a}_O + m \mathbf{a}_{\text{rel}},$$

donde  $\mathbf{a}_O$  es la aceleración del centro de la tierra.  $\mathbf{F}_{\text{sol}} \approx m \mathbf{a}_O$ , por lo que eliminando estos dos términos queda:

$$\mathbf{F} \approx m \mathbf{a}_{\text{rel}}.$$

Es decir, si prescindimos de considerar la atracción gravitatoria del sol, el sistema resulta muy aproximadamente inercial.

Sin embargo, para describir movimientos «normales», en la superficie terrestre y a escala humana, los sistemas anteriores poseen una complejidad a todas luces excesiva. Es conveniente a menudo considerar un sistema de ejes ligados a la superficie de la Tierra, que giran con la misma, además de acompañarla en su movimiento de traslación alrededor del Sol. Debido al movimiento de rotación de la tierra estos ejes no son inerciales. A continuación evaluaremos el error que se comete aplicando en ellos las ecuaciones de la dinámica, con fórmulas aproximadas de corrección.

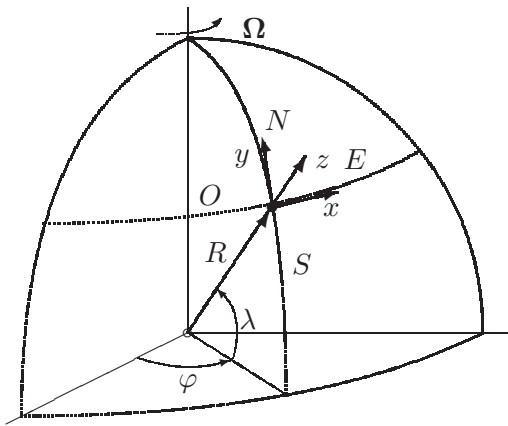


Figura 6.21: Triedro ligado a la superficie de la tierra, en un punto  $O$ . La dirección  $x$  apunta al este, la  $y$  al norte, y la  $z$  según la vertical ascendente.

Suponemos la Tierra esférica y, en cada punto de su superficie, los ejes siguientes:  $z$  según la vertical del lugar,  $x$  según el paralelo (positivo hacia el Este), e  $y$  según el meridiano (positivo hacia el Norte). Estudiamos en estos ejes en primer lugar el equilibrio de los cuerpos en reposo, y a continuación la dinámica de los cuerpos en movimiento de caída libre.

### Desviación de la plomada.—

Sea una partícula estacionaria en relación con la superficie de la tierra,  $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{0}$ . La única fuerza no inercial es la de arrastre, pues la fuerza de Coriolis se anula. El vector  $\boldsymbol{\Omega}$  de rotación de la Tierra, en función de los ejes que hemos definido es (figura 6.22):

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega(\cos \lambda \mathbf{j} + \sin \lambda \mathbf{k})$$

El vector posición (medido desde el centro de la Tierra) es

$$\mathbf{r} = R\mathbf{k} + \boldsymbol{\rho} \approx R\mathbf{k},$$



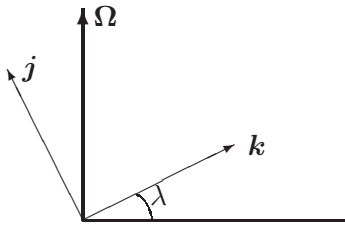


Figura 6.22: *Proyecciones de la velocidad de rotación  $\Omega$  sobre las direcciones  $Oz$  y  $Oy$  situadas en el plano del meridiano.*

restringiéndonos a puntos próximos a la superficie de la Tierra. Ésta tiene una velocidad de rotación constante en módulo y dirección (en una primera aproximación), siendo  $\Omega = 2\pi/86\,164$  rad/s<sup>11</sup>. Teniendo en cuenta que la aceleración del origen del triedro móvil (punto situado en la superficie de la Tierra) es  $\mathbf{a}_O = \Omega \wedge (\Omega \wedge R\mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned}
 -m\mathbf{a}_{\text{arr}} &= -m[\mathbf{a}_O + \Omega \wedge (\Omega \wedge \boldsymbol{\rho})] \\
 &= -m[\Omega \wedge (\Omega \wedge (R\mathbf{k} + \boldsymbol{\rho}))] \approx -m[\Omega \wedge (\Omega \wedge R\mathbf{k})] \\
 &= -m[(\Omega \cdot R\mathbf{k})\Omega - \Omega^2 R\mathbf{k}] \\
 &= -m\Omega^2 \underbrace{R \cos \lambda}_{\text{dist. al eje}} \underbrace{(\text{sen } \lambda \mathbf{j} - \text{cos } \lambda \mathbf{k})}_{\text{versor perp. eje}}
 \end{aligned}$$

Por tanto la plomada seguirá la dirección de una gravedad aparente  $\mathbf{g}'$  (figura 6.23) definida como:

$$\mathbf{g}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g} - \Omega^2 R \cos \lambda (\text{sen } \lambda \mathbf{j} - \text{cos } \lambda \mathbf{k}).$$

El efecto de modificación aparente de  $\mathbf{g}$ , en módulo, es máximo en el Ecuador. Allí, la disminución de  $g$  vale:

$$\Omega^2 R = \left( \frac{2\pi}{86\,164} \right)^2 \left( \frac{4 \times 10^7}{2\pi} \right) = 0,03367 \text{ m/s}^2$$

Lo que representa alrededor de un 0,3% del valor medio de  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>. Fuera del Ecuador, se ve también alterada la dirección de  $\mathbf{g}$ , no estando dirigida exactamente hacia el centro de la Tierra, aunque la modificación en módulo es progresivamente menor.

<sup>11</sup>La tierra efectúa una vuelta completa ( $2\pi$ ) en un día sidéreo (86 164 s). En un día solar (86 400 s) la rotación efectuada es algo mayor que  $2\pi$ , siendo éste necesario para volver a enfrentarse al sol al desplazarse la tierra en su órbita.

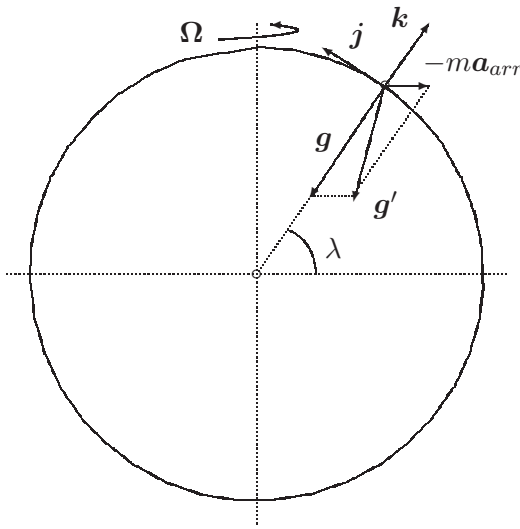


Figura 6.23: Desviación de la plomada por efecto de la fuerza de arrastre ( $-m\mathbf{a}_{arr}$ ), obteniéndose la «gravedad aparente»  $\mathbf{g}'$ .

### Desviación por la aceleración de Coriolis.—

Si el cuerpo está en movimiento respecto de la superficie terrestre ( $\mathbf{v}_{rel} \neq \mathbf{0}$ ) es necesario además considerar la fuerza de Coriolis. Hemos visto antes el efecto de modificación de la gravedad aparente ( $\mathbf{g}'$ ) por virtud de la fuerza de arrastre. La ecuación de la dinámica se puede expresar como:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m} + \mathbf{g}' - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{rel}$$

En el desarrollo que se realiza a continuación, admitiremos que el desplazamiento sobre la tierra es pequeño, por lo que se mantiene aproximadamente constante la latitud ( $\lambda$ ) así como la dirección de  $\mathbf{g}'$ , que como hemos visto antes sufre una desviación muy pequeña respecto a  $\mathbf{g}$ , dependiendo de la latitud. Tomamos los ejes de forma que  $\mathbf{k}$  coincida con esta vertical aparente, definida por  $\mathbf{g}'$ :

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_{rel} &= 2\Omega \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \cos \lambda & \sin \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \\ &= 2\Omega[(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda)\mathbf{i} + \dot{x} \sin \lambda \mathbf{j} - \dot{x} \cos \lambda \mathbf{k}]; \end{aligned}$$

si llamamos a las fuerzas aplicadas por unidad de masa  $\mathbf{F}/m = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ , resultan tres ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= X - 2\Omega(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) \\ \ddot{y} &= Y - 2\Omega\dot{x} \sin \lambda \\ \ddot{z} &= Z - g + 2\Omega\dot{x} \cos \lambda\end{aligned}\tag{6.76}$$

Estas ecuaciones son de aplicación general para el caso de proyectiles o cuerpos móviles de corto alcance, en que son válidas las hipótesis realizadas arriba. En caso contrario sería necesario considerar la variación de  $\lambda$  en el movimiento.

**EJEMPLO 6.10:** Caída de un cuerpo sometido únicamente a la gravedad terrestre, partiendo del reposo, desde una altura  $h$ .

*Solución.* Al no existir otras fuerzas será  $X = Y = Z = 0$ . Las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned}x_0 &= 0, & y_0 &= 0, & z_0 &= h, \\ \dot{x}_0 &= 0, & \dot{y}_0 &= 0, & \dot{z}_0 &= 0.\end{aligned}$$

Integrando las ecuaciones, para lo que suponemos  $\lambda = \text{cte.}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2\Omega[(z - h) \cos \lambda - y \sin \lambda] \\ \dot{y} &= -2\Omega x \sin \lambda \\ \dot{z} &= -gt + 2\Omega x \cos \lambda\end{aligned}$$

Sustituimos estos valores calculados para  $\dot{y}$  y  $\dot{z}$  de nuevo en la ecuación (6.76<sub>1</sub>). Para ello consideramos que, puesto que  $\Omega$  es pequeño, se pueden despreciar los términos de segundo orden ( $O(\Omega^2)$ ):

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -2\Omega[(-gt + 2\Omega x \cos \lambda) \cos \lambda + 2\Omega x \sin \lambda \sin \lambda] \\ &\approx 2\Omega gt \cos \lambda\end{aligned}\tag{6.77}$$

Las desviaciones en  $\ddot{y}$  y  $\ddot{z}$  son infinitésimos de segundo orden ( $O(\Omega^2)$ ), por lo que su efecto frente a  $\ddot{x}$  se puede despreciar:

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -2\Omega \sin \lambda \{-2\Omega[(z - h) \cos \lambda - y \sin \lambda]\} = O(\Omega^2) \\ \ddot{z} &= -g + 2\Omega \cos \lambda \{-2\Omega[(z - h) \cos \lambda - y \sin \lambda]\} = -g + O(\Omega^2)\end{aligned}$$

Por último, integrando dos veces la expresión aproximada (6.77):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Omega g t^2 \cos \lambda, \\ x &= \frac{\Omega}{3} g t^3 \cos \lambda. \end{aligned}$$

Este último valor indica una desviación hacia el Este (sentido positivo de  $x$ ). En función de la altura de caída, se puede escribir como

$$x = \frac{\Omega}{3} \sqrt{\frac{8h^3}{g}} \cos \lambda.$$

En las otras direcciones las desviaciones son pequeñas. □

EJEMPLO 6.11: Circulación atmosférica en zonas de bajas presiones.

*Solución.* En una zona de baja presión (lo que los meteorólogos llaman borrasca) las partículas de aire tienden a desplazarse hacia el punto de presión mínima, por efecto del gradiente de presión. La velocidad generada por este movimiento da lugar a una fuerza de inercia de Coriolis:

$$-2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} = 2m\Omega v [\text{sen } \lambda (\text{sen } \alpha \mathbf{i} - \text{cos } \alpha \mathbf{j}) + \text{cos } \lambda \text{cos } \alpha \mathbf{k}]$$

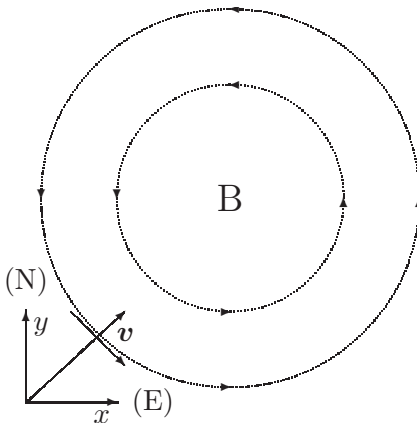


Figura 6.24: Líneas isobaras y circulación del aire en una borrasca por efecto de la aceleración de Coriolis (hemisferio Norte).

El primer término de esta fuerza es horizontal, y origina una desviación consistente hacia la derecha en el sentido del movimiento, siempre que sea  $\text{sen } \lambda > 0$  (es decir, en el hemisferio Norte). Eventualmente, se produce una circulación estacionaria alrededor del centro de bajas presiones, a modo de

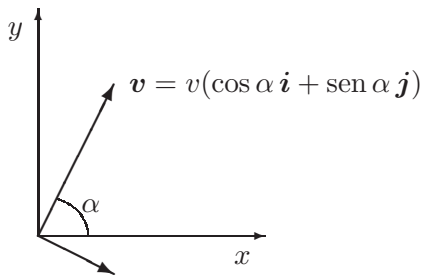


Figura 6.25: *Fuerza de Coriolis horizontal debida a la velocidad en la superficie de la tierra (hemisferio Norte).*

$$(\mathbf{F}_{cor})_H = 2m\Omega v \operatorname{sen} \lambda (\operatorname{sen} \alpha \mathbf{i} - \cos \alpha \mathbf{j})$$

remolino, cuando el gradiente de presiones es contrarrestado por la fuerza de Coriolis y por la propia fuerza centrífuga del movimiento circular. Este efecto produce una circulación en sentido antihorario en el hemisferio Norte. En el Sur es  $\operatorname{sen} \lambda < 0$ , por lo que la circulación de las borrascas será en sentido horario.  $\square$

## 6.6. Sistemas de masa variable

### 6.6.1. Sistema puntual: ecuación fundamental

En la mecánica clásica la masa de una partícula, o de un conjunto dado de partículas, es constante. Por tanto, un sistema mecánico que no pierda ni gane partículas mantiene su masa invariable.

La variación de masa en un sistema procede de la pérdida o ganancia de partículas. Esto puede ocurrir cuando el sistema quede definido por ejemplo por el criterio de las partículas contenidas dentro de un recinto determinado. Como veremos en lo que sigue, la variación de masa produce a su vez una variación de la cantidad de movimiento del sistema, interpretable a partir de una fuerza ficticia equivalente.

Consideramos en primer lugar un sistema asimilable a una partícula (es decir, un sistema del que sólo interesa estudiar el movimiento de su centro de masa  $G$ ). En un instante  $t$ , el sistema posee una velocidad  $\mathbf{v}$  y una masa  $m$ . Supondremos que la masa de este sistema varía, por efecto de la incorporación o pérdida de partículas, de forma que a lo largo de un intervalo infinitesimal  $dt$  se incorpora la masa  $dm$  con velocidad  $\mathbf{u}$  (en caso de pérdida de masa, será  $dm < 0$ ). En un instante inmediatamente posterior,  $t + dt$ , el sistema tendrá una masa  $m + dm$  y una velocidad  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . De forma

esquemática la variación de cantidad de movimiento se plantea como:

$$\begin{array}{ccc} \text{instante } t & \Longrightarrow & \text{instante } t + dt \\ m\mathbf{v} + dm\mathbf{u} & & (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) \end{array}$$

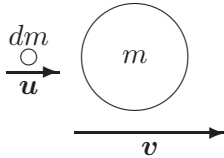


Figura 6.26: Variación de masa en un sistema por incorporación o pérdida de partículas.

La resultante de todas las fuerzas externas (resistencias pasivas, gravedad, etc.) la representaremos por  $\mathbf{F}$ . Expresando el balance de la cantidad de movimiento en ese intervalo infinitesimal:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}dt &= (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - (m\mathbf{v} + dm\mathbf{u}) \\ &= m d\mathbf{v} + dm(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + dm d\mathbf{v}, \end{aligned}$$

y despreciando infinitésimos de segundo orden, resulta:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{F}.$$

Definiendo:  $\mathbf{v}_{rel} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} - \mathbf{v}$ , velocidad relativa de la masa que se pierde o incorpora;  $q \stackrel{\text{def}}{=} dm/dt$ , tasa de incorporación de masa (será de pérdida si  $dm/dt < 0$ ), se obtiene la siguiente ecuación fundamental:

$$\boxed{m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v}_{rel} + \mathbf{F}.} \quad (6.78)$$

En definitiva, la variación de masa produce un término adicional a las fuerzas, de valor  $q\mathbf{v}_{rel}$ . Por ejemplo, en el caso de movimiento según un eje, la pérdida de masa ( $q < 0$ ) producirá un empuje neto en dirección de la marcha, siempre que la masa perdida salga despedida «hacia atrás» (es decir, si  $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$  lleva sentido opuesto a  $\mathbf{v}$ ).

### 6.6.2. Sistema con masa distribuida

Para el caso general de un sistema de varias partículas,  $\{m_i, i = 1, \dots, N\}$ , es preciso aplicar las ecuaciones generales de la dinámica de sistemas, junto con la ecuación fundamental (6.78) a cada parte del sistema asimilable a una partícula.

### Cantidad de Movimiento

Suponiendo constante la velocidad relativa de la masa que se incorpora o pierde,  $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i$ , y efectuando la suma para el conjunto de partículas,

$$\sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i \left[ \frac{dm_i}{dt} \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{F}_i \right]$$

es decir

$$\boxed{M \mathbf{a}_G = \frac{dM}{dt} \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{F}}, \quad (6.79)$$

por lo que el efecto sobre el movimiento del centro de masa coincide con lo visto para el caso de una partícula (6.78).

Supongamos ahora un caso más general en el que la velocidad relativa de incorporación de masa no sea necesariamente constante para todas las partículas, pero sí lo sean la velocidad absoluta de la masa incorporada o perdida  $\mathbf{u}$ , y la tasa específica de incorporación de masa  $\beta$ , definida por

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m_i} \frac{dm_i}{dt}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{dm_i}{dt} \mathbf{v}_i &= \beta \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \beta M \mathbf{v}_G = \frac{dM}{dt} \mathbf{v}_G \\ \sum_i \frac{dm_i}{dt} (\mathbf{u} - \mathbf{v}_i) &= \frac{dM}{dt} \mathbf{u} - \frac{dM}{dt} \mathbf{v}_G = \frac{dM}{dt} (\mathbf{u} - \mathbf{v}_G) \end{aligned}$$

Por lo que, llamando  $\mathbf{v}_{rel} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} - \mathbf{v}_G$ , se obtiene la misma expresión que antes (6.79).

### Momento Cinético

Para expresar el balance del momento cinético del sistema es necesario considerar el momento de las fuerzas debidas a la variación de masa:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O &= \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \left[ \frac{dm_i}{dt} (\mathbf{v}_{rel})_i + \mathbf{F}_i \right] \\ &= \mathbf{M}_O + \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \frac{dm_i}{dt} (\mathbf{v}_{rel})_i; \end{aligned}$$

no es posible simplificar más esta ecuación para establecer una expresión analítica general. Por ello, en cada caso particular será necesario tener en cuenta el momento debido a cada uno de estos sumandos.

### 6.6.3. Aplicaciones

#### Propulsión a Chorro en el Vacío

Un cohete o nave espacial en el vacío no puede impulsarse mediante hélices o turborreactor, ya que falta un medio en el que «apoyarse».

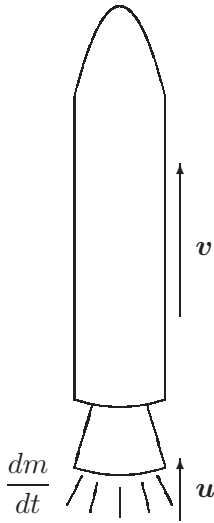


Figura 6.27: *Propulsión a chorro por expulsión del combustible quemado.*

La propulsión se produce por la pérdida de la masa de combustible quemado, que sale expulsada con una velocidad menor que la del cohete propulsado ( $u < v$ , siendo  $v$  positivo en la dirección de avance). Si el empuje se produce de forma simétrica, la resultante estará alineada con la dirección axial:

$$d\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{m}dt + \frac{dm}{m}\mathbf{v}_{rel}$$

Integrando entre el instante inicial ( $t = 0$ ) y un instante genérico  $t$ :

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \int_0^t \frac{\mathbf{F}}{m}dt + \int_0^t \frac{dm}{m}\mathbf{v}_{rel}$$

Si  $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{w}$  (cte.), entonces:

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \int_0^t \frac{\mathbf{F}}{m}dt - \mathbf{w} \ln \frac{m_0}{m}$$

Examinando esta expresión, se desprende que para optimizar la propulsión será conveniente:



1. Que la relación  $(m_0/m)$  sea máxima, lo que se consigue minimizando el peso muerto;
2. Disminuir las resistencias pasivas (incluidas en  $\mathbf{F}$ );
3. Aumentar la velocidad relativa a los gases de salida,  $\mathbf{w}$ .

### Turborreactor

En un turborreactor se produce una tasa de admisión de aire  $q_a$ , que es expulsado una vez ha reaccionado con el combustible, cuya tasa es  $q_c$ .

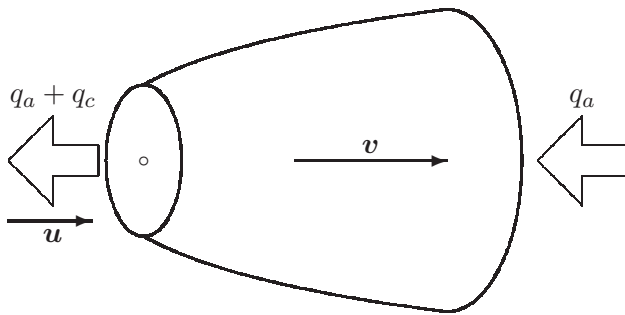


Figura 6.28: *Propulsión en un turborreactor; el empuje neto proviene de la admisión de aire ( $q_a$ ) y de la expulsión de productos de combustión ( $q_c + q_a$ ).*

Por lo general,  $q_c \ll q_a$ . En la dirección del eje, el empuje es:

$$e = \underbrace{-(q_c + q_a)}_{<0} \underbrace{(u - v)}_{v_{rel} < 0} + q_a(0 - v)$$

Se define el impulso específico como el cociente entre el empuje y el peso de gases expulsados por unidad de tiempo:

$$I_{esp} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e}{(q_c + q_a)g} = \frac{v_{rel}}{g} - \frac{q_a}{q_c + q_a} \frac{v}{g}$$

Si  $q_c \ll q_a$ , entonces  $q_a/(q_c + q_a) \approx 1$ . Así,

$$I_{esp} \approx \frac{1}{g}(v_{rel} - v) = \frac{v}{g} \left( \frac{v_{rel}}{v} - 1 \right).$$

**EJEMPLO 6.12:** Sea un cohete de masa total  $M$ , incluyendo el combustible  $\epsilon M$  ( $0 < \epsilon < 1$ ) y carga útil («payload»)  $m_0$ . El gasto de combustible es  $\dot{m} = kM$ , que se ve expulsado por la tobera con velocidad relativa  $c$ . Calcular la condición para que se pueda efectuar el despegue, y la velocidad final una vez consumido el combustible.

*Solución.* En un instante  $t$ , la masa es  $m(t) = M + m_0 - kMt$ . Suponiendo la gravedad constante  $g$ , y despreciando resistencias pasivas, resulta la ecuación dinámica:

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{(-c)(-kM)}{M + m_0 - kMt} \quad (6.80)$$

De esta ecuación, observamos que el cohete ascenderá ( $dv/dt > 0$ ) en el instante inicial ( $t = 0$ ) tan sólo si  $kcM > (M + m_0)g$ .

Integrando:

$$v - v_0 = -gt - c \ln \left( 1 - \frac{kMt}{M + m_0} \right)$$

La velocidad final es, para  $t = \epsilon/k$ , una vez quemado todo el combustible:

$$v = -c \ln \left( 1 - \frac{\epsilon M}{M + m_0} \right) - g \frac{\epsilon}{k}$$

Si el cohete tuviese varias fases sería necesario hacer la integración de (6.80) para cada tramo de tiempo por separado, tomando como condiciones iniciales para una fase las finales de la fase anterior con la nueva masa.  $\square$

**EJEMPLO 6.13:** Sea una gota de lluvia esférica cayendo a través de una nube. Se admite que acumula masa con una tasa temporal proporcional a su sección transversal y a la velocidad de caída. Calcular la aceleración.

*Solución.* Al ser la gota esférica, en función del radio  $r$  y de la densidad  $\rho$ , la sección transversal y la masa total valen:

$$A = \pi r^2; \quad m = \rho \frac{4\pi r^3}{3}.$$

La acumulación de masa, según la condición dada, es

$$\frac{dm}{dt} = kAv = k(\pi r^2)v;$$

Aplicando la ecuación fundamental (6.78) y teniendo en cuenta que la incorporación de masa se realiza precisamente a la velocidad de caída  $v$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g - \frac{v}{m} \frac{dm}{dt} \\ &= g - \frac{v}{\rho \frac{4}{3} \pi r^3} k \pi r^2 v \\ &= g - \underbrace{\frac{3k}{4\rho}}_{\text{cte}} \frac{v^2}{r}. \end{aligned} \quad \square$$

## 6.7. Problemas propuestos.

**Problema 6.1.** Una granada que se mueve por el aire se rompe en dos partes de masas  $m_1$  y  $m_2$  por la acción de su carga explosiva, incrementando la energía total de los fragmentos en  $E$ . Se pide

- expresar la energía  $E$  en función de las velocidades de los fragmentos relativas al centro de masa, en el instante inmediatamente posterior a la explosión;
- calcular la velocidad relativa entre los fragmentos en dicho instante.

(Examen final, 17/9/93)

**Problema 6.2.** Un punto material  $Q$  de masa  $m$  está sometido al campo gravitatorio terrestre simplificado (esto es, con intensidad uniforme igual a  $g$ ) y a la acción de  $n$  fuerzas producidas por un conjunto de  $n$  puntos materiales  $P_i$ , tal que

$$\mathbf{F}_i = k_i m_i \mathbf{d}_i,$$

siendo  $m_i$  la masa de cada punto y  $\mathbf{d}_i$  la distancia entre  $Q$  y  $P_i$ . las  $k_i$  son constantes dadas que pueden ser, todas o cualesquiera de ellas, positivas o negativas. Se pide:

- Estudiar el movimiento general de  $Q$ , haciendo todas las hipótesis sobre las constantes  $k_i$ .
- Determinar las condiciones iniciales para que describa una circunferencia de radio  $R$ , estableciendo las condiciones que deba cumplir ésta para que el movimiento sea posible. Como en el caso anterior, se tendrán en cuenta todas las hipótesis que quepa hacer sobre las  $k_i$ .

**Problema 6.3.** Un conjunto de  $p$  puntos materiales de masas  $m_i$ , ( $i = 1, \dots, p$ ) está obligado a permanecer en un plano liso  $\Pi_1$ , y otro conjunto de  $q$  puntos de masas  $M_j$ , ( $j = 1, \dots, q$ ) está obligado a permanecer de la misma forma en otro plano  $\Pi_2$  paralelo al anterior. Ambos planos son fijos. Entre dos puntos cualesquiera existe una fuerza de atracción

$$\mathbf{F}_{ij} = k m_i m_j \mathbf{d}_{ij},$$

siendo  $m_i$  y  $m_j$  las masas (tanto de  $\Pi_1$  como de  $\Pi_2$ ),  $\mathbf{d}_{ij}$  el vector que las une y  $k$  una constante dada. Se pide:

- estudiar el movimiento de los puntos en la hipótesis que  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  sean horizontales.
- lo mismo si no son horizontales.

- c. Condiciones iniciales para que, siendo los planos horizontales y  $p = q = 1$ , las trayectorias sean circunferencias.

**Problema 6.4.** En un punto de la superficie de la tierra de latitud  $\lambda$  se comprueba que la distancia entre dos isobaras con diferencia de 4 mb [1 mb = 100 N/m<sup>2</sup>] es de  $N$  grados de arco máximo. El viento circula siguiendo las isobaras cuando el gradiente de presión es contrarrestado por la fuerza de inercia de Coriolis (componente horizontal). Se sabe:

- Que la fuerza ejercida por la diferencia de presiones es  $\mathbf{f} = -\text{grad } p$  por unidad de volumen;
- que la densidad del aire se puede tomar constante e igual a 1,293 kg/m<sup>3</sup>;
- que se puede despreciar el rozamiento con el suelo y la curvatura de las isobaras.

Se pide hallar la velocidad  $v$  del viento.

**Problema 6.5.** Una placa cuadrada de masa  $M$ , lado  $b$ , y vértices  $ABCD$  está colgada de un punto fijo  $O$  mediante un hilo inextensible  $OA$  de longitud  $b$ , atado al vértice  $A$ . Se abandona la placa en reposo, estando contenida en un plano vertical y con el hilo tenso en la dirección de la diagonal  $AC$ , formando un ángulo  $\beta \neq 0$  con la vertical. Se pide:

- Demostrar que durante el movimiento no podrá mantenerse alineado el hilo con  $AC$ .
- Encontrar las ecuaciones diferenciales del movimiento.

(Examen final, 10/1/94)

**Problema 6.6.** Una partícula  $P$  de masa  $2m$  puede moverse sin rozamiento sobre una circunferencia vertical de radio  $R$ . A su vez  $P$  está atada a un hilo flexible inextensible y sin masa, que pasa por una pequeña polea sin rozamiento situada en el punto superior de la circunferencia ( $A$ ), en cuyo extremo opuesto hay otra partícula de masa  $m$  obligada a moverse según la vertical de  $A$ . En el instante inicial la partícula  $P$  está en reposo en el punto  $B$  situado sobre un diámetro horizontal y se abandona a la acción de la gravedad. Se pide:

- definir el movimiento dejándolo expresado mediante una integral primera (ecuación diferencial de 1<sup>er</sup> orden) en función de  $\varphi$ ;
- tensión en el hilo y reacción de la circunferencia sobre  $P$  para el instante en que está situada en el punto más bajo de la circunferencia ( $\varphi = 0$ ).

(Examen parcial, 29/1/97)

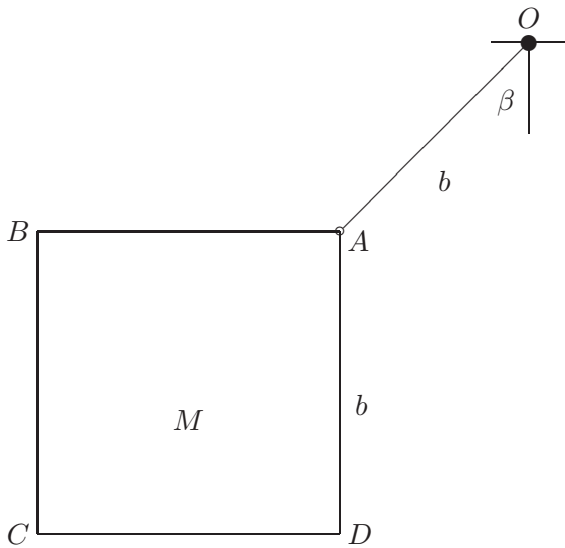


Figura 6.29: *Problema 6.5; situación inicial*

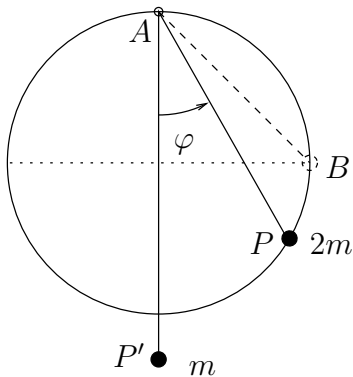


Figura 6.30: *Problema 6.6*

**Problema 6.7.** Una partícula de masa  $m$  se halla ensartada en un aro circular de radio  $R$ , pudiendo deslizar libremente sobre él, sometida a su propio peso. A su vez, al aro se le comunica un movimiento impuesto de rotación respecto a un diámetro vertical, con velocidad angular constante  $\omega$ . Se pide:

- a. Expresar la ecuación diferencial del movimiento, en función de la posición de la partícula sobre el aro;
- b. Teniendo en cuenta que el sistema de referencia relativo al aro no es inercial, expresar las fuerzas de inercia de arrastre y de Coriolis;
- c. Demostrar que la fuerza de inercia de arrastre proviene de un potencial y calcularlo;

- d. Obtener una integral primera del movimiento;
- e. Expresar la energía total ( $T + V$ ) de la partícula. ¿se conserva?

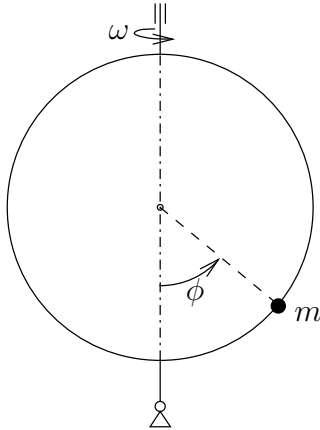


Figura 6.31: *Problema 6.7*

**Problema 6.8.** Una aro de masa  $M$  y radio  $R$  se mueve en todo momento en un plano vertical con un punto de su periferia  $O$  fijo. Ensartada en el aro se mueve una partícula de masa  $m$ . Por otra parte, la partícula está unida a uno de los extremos de un cable inextensible y sin masa, que pasa por  $O$  a través de una pequeña argolla. En el otro extremo del cable se aplica una fuerza  $F(t)$  dada. No existe rozamiento entre ninguna de las partes del sistema. Se pide:

- a. Momento cinético en  $O$  del sistema formado por el aro y la partícula.
- b. Expresión del principio del momento cinético del sistema aro-partícula en  $O$ .
- c. Expresión del principio de la cantidad de movimiento de la partícula.
- d. Justificar razonadamente la existencia o no de integrales primeras del movimiento.
- e. Expresar la reacción del aro sobre la partícula en un instante genérico.

**Problema 6.9.** Un aro de masa  $m$  y radio  $R$  rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose vertical en todo instante. Sobre él se mueve sin rozamiento una partícula de masa  $m$  con ligadura bilateral que no estorba la rodadura. Aplicando los teoremas de Newton-Euler, se pide:

- a. Calcular la reacción que la recta ejerce sobre el aro y la reacción que el aro ejerce sobre la partícula, en función de los grados de libertad y sus derivadas.

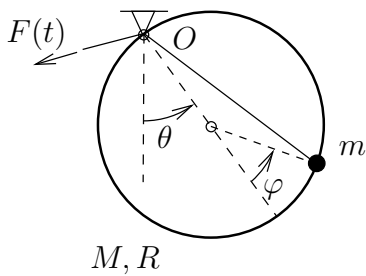


Figura 6.32: Problema 6.8

- b. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema en función únicamente de los grados de libertad y sus derivadas, sin que en ellas aparezcan las reacciones.

(Examen parcial, 31/1/2000)

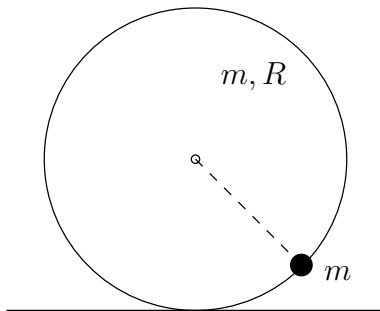


Figura 6.33: Problema 6.9

**Problema 6.10.** Una barra  $AB$  de longitud  $l$  y masa  $m$  tiene su extremo  $A$  fijo, mientras que su extremo  $B$  se apoya en un plano rugoso vertical  $OYZ$  (ver figura adjunta). Se pide:

- Suponiendo que la barra está deslizando, con un coeficiente de rozamiento dado  $\mu$ , obtener la ecuación diferencial del movimiento.
- Calcular el coeficiente de rozamiento  $\mu$  necesario, en función de la posición, para que la barra se encuentre en equilibrio.

(Examen final, 31/1/2000)

**Problema 6.11.** Una varilla  $AB$  de masa  $m$  y longitud total  $l$  se mueve en un plano vertical de forma que el extremo  $A$  desliza sobre la vertical y el extremo  $B$  desliza sobre una recta horizontal. Asimismo, una partícula  $P$  de masa  $m$  puede deslizar libremente sobre la varilla sin abandonarla (ver figura adjunta). No existe rozamiento entre ninguna de las partes móviles. En el instante inicial el sistema parte del reposo con  $\theta = 30^\circ$  y  $s = 0$ . Se pide, en función de  $s$ ,  $\theta$  y sus derivadas:

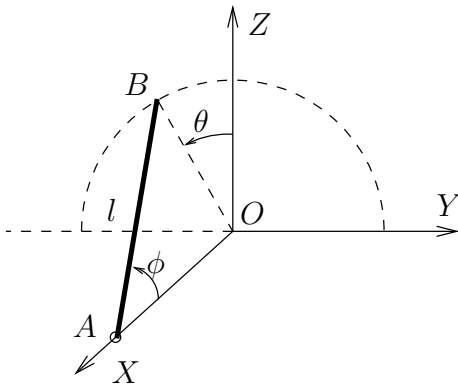


Figura 6.34: Problema 6.10

- Expresión de la velocidad absoluta de la partícula  $P$ .
- Expresión del momento cinético del conjunto varilla+partícula en  $O$ .
- Ecuación del momento cinético en  $O$ .
- Ecuaciones de la cantidad de movimiento de la varilla  $AB$
- Ecuaciones de la cantidad de movimiento de la partícula  $P$
- Expresar las ecuaciones del movimiento como dos ecuaciones diferenciales en las que intervengan exclusivamente  $s$ ,  $\theta$  y sus derivadas.

*Nota:* Expresar todas las magnitudes pedidas en el triedro fijo ( $Oxyz$ ) de la figura.

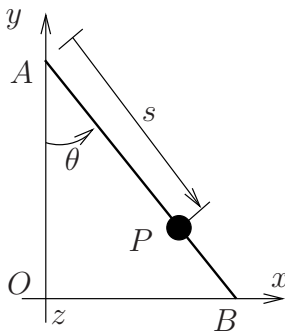


Figura 6.35: Problema 6.11

**Problema 6.12.** Una cadena pesada y perfectamente flexible, de longitud  $ACB = 2a$  se encuentra en situación de equilibrio inestable alrededor de una pequeña polea en  $C$ , estando  $AC$  vertical y  $BC$  sobre un plano liso de inclinación  $\alpha$ . Al separarla ligeramente hacia la derecha, la cadena desliza hacia abajo. Determinar la velocidad de la cadena en el instante en que el



extremo  $A$  pasa por  $C$ .  
(Examen final, 15/6/92)

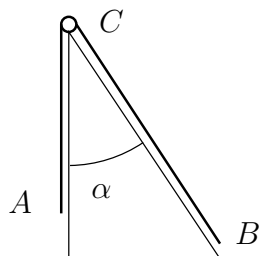


Figura 6.36: *Problema 6.12*

**Problema 6.13.** Una varilla de longitud  $l$ , masa  $m$  y espesor despreciable se encuentra en reposo en posición vertical de equilibrio inestable sobre un plano horizontal rugoso. La varilla es desplazada ligeramente hacia la derecha y cae. Suponiendo que el extremo inferior de la varilla no desliza, se pide:

- Velocidad angular de la varilla en un instante genérico en que ésta forme un ángulo  $\theta$  con la vertical.
- Ángulo  $\alpha$  que forma la reacción del plano con la vertical en ese instante.
- Valor de  $\theta$  para el que la reacción del plano tiene su inclinación máxima hacia la derecha, y coeficiente de rozamiento mínimo para que el extremo inferior de la varilla no deslice hacia la izquierda.

**Problema 6.14.** Consideramos un cilindro circular homogéneo de radio  $R$  y masa  $2m$ , que puede girar libremente alrededor de su eje que es vertical, sin desplazamiento según el mismo. En dicho cilindro existe una acanaladura en forma de hélice de inclinación  $45^\circ$  por la que puede moverse sin rozamiento un punto material pesado de masa  $m$ , con una ligadura bilateral. Inicialmente cilindro y partícula están en reposo. Se pide:

- Ecuaciones que definen el movimiento del sistema y su integración.
- Tiempo que tarda la partícula en desplazarse el primer *paso* sobre la hélice.
- Ángulo girado por el cilindro en este tiempo.

**Problema 6.15.** Un disco de masa  $M$  y radio  $R$  rueda sin deslizar sobre una recta inclinada un ángulo  $\alpha$ , dentro de un plano vertical. El disco lleva adherida una masa puntual de valor  $M$  en el borde, pudiéndose considerar que ésta no estorba la rodadura. El conjunto parte del reposo en la situación

de la figura, en que la masa puntual está a una distancia  $R$  de la recta inclinada. Se pide

- a. Ecuaciones del movimiento en ese instante;
- b. Valor necesario del coeficiente de rozamiento  $\mu$  para que no deslice.

(Examen final, 20/6/94)

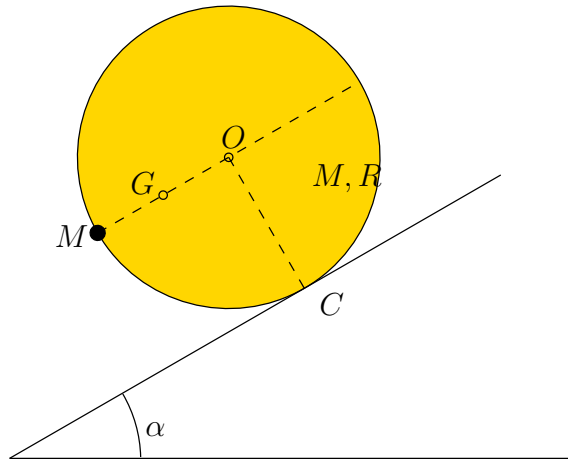


Figura 6.37: *Problema 6.15*

**Problema 6.16.** Una partícula pesada de masa  $m$  se mueve unida mediante una varilla  $AB$  rígida, sin masa y de longitud  $l$ , a una rótula  $A$  de masa despreciable. A su vez, esta rótula  $A$  está obligada a permanecer en todo momento sobre una circunferencia horizontal fija de radio  $R$ . La rótula  $A$  actúa obligando a que la varilla se mueva contenida el plano vertical tangente por  $A$  a la circunferencia. Se pide:

- a. Obtener las ecuaciones del movimiento mediante los métodos de Newton y Euler.
- b. En el caso de que  $A$  se mueva con velocidad de módulo constante  $|v_A| = \omega R$ , expresar el potencial de la fuerza de arrastre correspondiente a un sistema de referencia móvil con origen en  $A$ , con el eje  $z$  vertical y cuyo plano  $yz$  contiene en todo momento a la varilla  $AB$ .
- c. Para la situación del apartado anterior, expresar posibles integrales primeras del movimiento e interpretarlas físicamente.

**Problema 6.17.** Se considera el sistema representado en la figura. En él, la masa  $m_1$  se mueve sobre el plano inclinado con un coeficiente de rozamiento  $\mu$ , mientras que la masa  $m_2$ , que se considera puntual, está unida

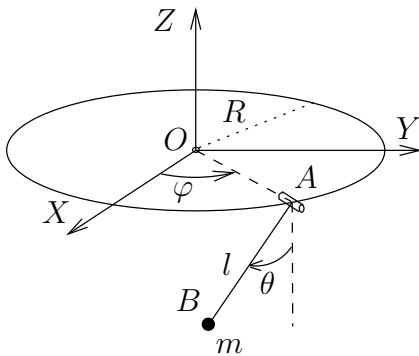


Figura 6.38: Problema 6.16

al carril circunferencial mediante un vínculo liso. Las masas de la polea y del hilo inextensible que une  $m_1$  y  $m_2$  se consideran despreciables. Se pide determinar, por aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales, el valor de  $\mu$  necesario para asegurar el equilibrio en función de la posición de  $m_2$ , considerando asimismo todos los posibles valores de  $m_1$  y  $m_2$ . (Examen final, 16/9/94)

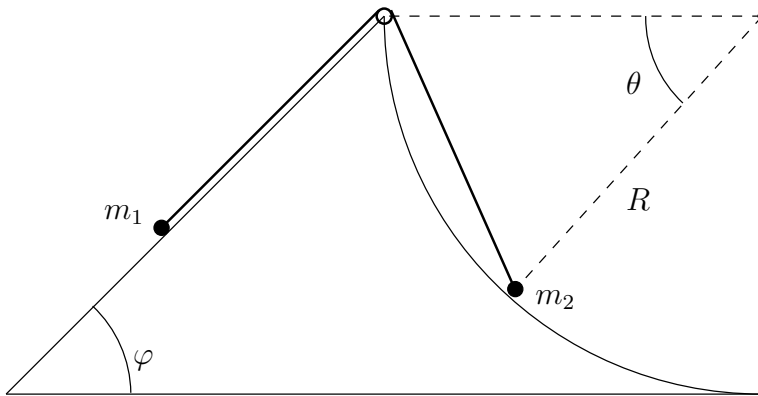


Figura 6.39: Problema 6.17

**Problema 6.18.** Un semicirculo de masa  $M$  y radio  $R$  rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose dentro de un plano vertical. Sobre el semicirculo desliza una partícula de masa  $m$  con ligadura bilateral lisa. Se pide:

- Ecuaciones del movimiento;
- Reacciones en un instante genérico;
- Integrales primeras, caso de haberlas.

(Examen final, 20/6/94)

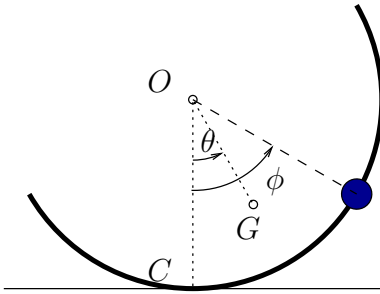


Figura 6.40: Problema 6.18

**Problema 6.19.** Un hilo  $AB$  (flexible, inextensible y de masa despreciable) de longitud  $3b$  pasa a través de un tubo  $CD$  (fijo, horizontal y liso) de longitud  $b$ . En los extremos del hilo están sujetas sendas partículas, de masa  $M$  la que se encuentra en  $A$ , y de masa  $m$  la que se encuentra en  $B$ . En la situación inicial se cumple:

- El hilo sobresale por igual por ambos extremos del tubo (con lo que  $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DB} = b$ )
- Todo el hilo se encuentra situado en un plano vertical  $DYZ$ , colgando verticalmente el tramo  $AC$ , mientras que el tramo  $DB$  está desviado  $30^\circ$  de la vertical descendente
- La partícula  $M$  está en reposo, mientras que la partícula  $m$  tiene velocidad horizontal  $v_0 > 0$ , dirigida según el eje  $X$

Se pide:

- a. Expresar para un instante genérico, el momento cinético del sistema y el momento de las fuerzas respecto del punto  $D$
- b. Expresar las ecuaciones diferenciales necesarias para definir completamente el movimiento, mediante los teoremas generales de Newton-Euler.
- c. Integrales primeras del movimiento.
- d. Demostrar que no es posible que  $m$  alcance el extremo  $D$ .
- e. Calcular el valor de  $v_0$  que hace que la masa  $M$  permanezca en reposo. (Examen final, 26/01/1998)

**Problema 6.20.** Un semicirculo de masa  $m$  y radio  $r$  se halla en un plano horizontal, con su punto medio  $Q$  fijo. Sobre él se mueve con ligadura bilateral lisa una masa puntual  $m$  (igual a la del semicirculo). Inicialmente el semicirculo está en reposo y la masa puntual en un extremo del mismo, con velocidad  $v_0$ . Se pide

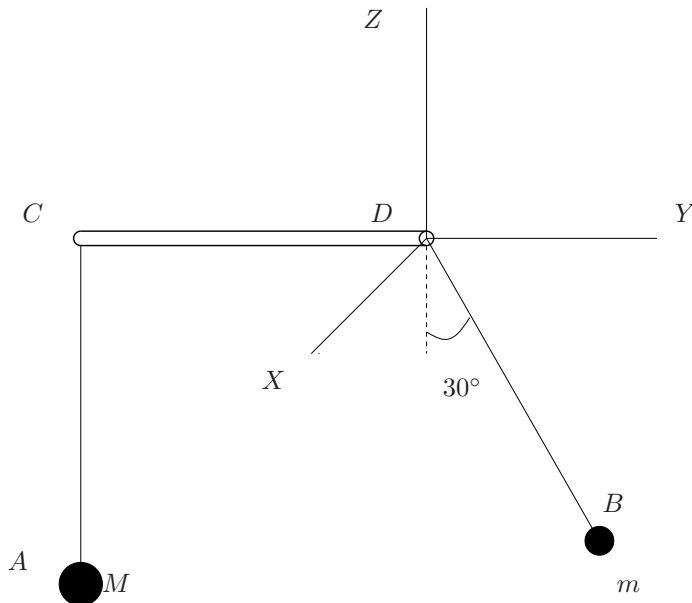


Figura 6.41:  
Problema 6.19

- Ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema.
  - Integrales primeras.
- (Examen final, 19/01/1996)

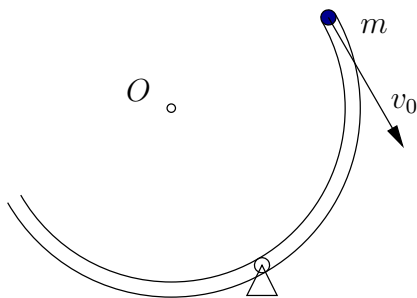
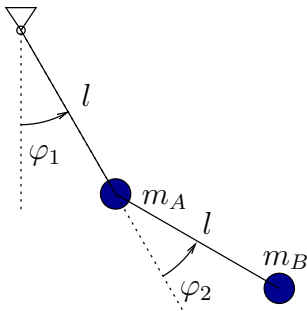


Figura 6.42: Problema 6.20

**Problema 6.21.** El péndulo doble de la figura está formado por las masas  $m_A$  y  $m_B$ , unidas entre sí y a un punto fijo  $O$  mediante barras rígidas sin masa de longitud  $l$ . Obtener las ecuaciones de la dinámica a partir del principio de D'Alembert, respondiendo a las siguientes cuestiones:

- Obtener los desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{r}_A$ ,  $\delta \mathbf{r}_B$  en función de  $\delta \varphi_1$  y  $\delta \varphi_2$ .

- b. Obtener las aceleraciones de  $A$  y  $B$  en función de  $(\varphi_1, \varphi_2)$  y sus derivadas.
- c. Expresar el trabajo virtual de las fuerzas activas (pesos).
- d. Expresar el trabajo virtual de las fuerzas de inercia.
- e. Plantear las ecuaciones de la dinámica, en función de  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , mediante la aplicación del principio de D'Alembert.
- f. Calcular las reacciones externas (en  $O$ ) e internas (tensiones en barras), en función de  $(\varphi_1, \varphi_2)$  y sus derivadas.
- g. Obtener las ecuaciones de la dinámica mediante la aplicación de los teoremas generales de Newton Euler y comprobar que coinciden con las obtenidas mediante D'Alembert.

Figura 6.43: *Problema 6.21*

**Problema 6.22.** Un disco homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$  rueda sin deslizar sobre una recta  $r$ , manteniéndose vertical. De su centro cuelga, mediante una articulación, una varilla de masa  $m$  y longitud  $l < R$ . En el extremo inferior de esta varilla actúa una fuerza horizontal, de valor  $f = A \operatorname{sen} \Omega t$ . El conjunto está sometido además a la acción de la gravedad. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento a partir del Principio de D'Alembert.

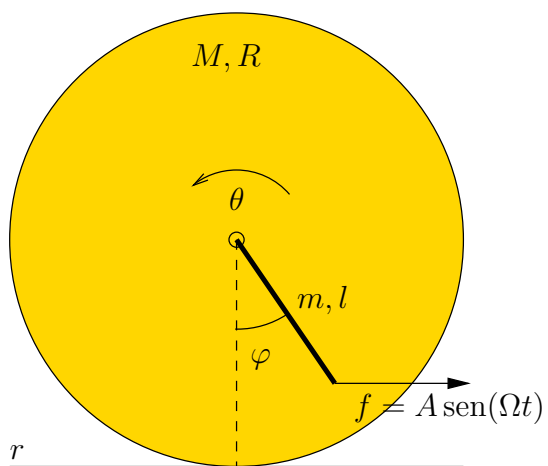


Figura 6.44: Problema 6.22





## Capítulo 7

# Dinámica analítica

La dinámica analítica comprende una serie de métodos cuya característica principal es el tratamiento puramente abstracto, analítico, de los sistemas mecánicos. De esta forma, se separan al máximo las consideraciones físicas y geométricas necesarias para definir el movimiento, de las puramente matemáticas para plantear y solucionar las ecuaciones. Las primeras son necesarias para formular las coordenadas, enlaces y magnitudes cinéticas de un sistema dado; una vez realizada definición de un sistema mediante la adecuada selección de las magnitudes anteriores, los métodos de la mecánica analítica permiten obtener las ecuaciones de la dinámica (o las condiciones de la estática en su caso) de forma casi automática.

El iniciador de estas técnicas fue Joseph Louis Lagrange, a partir de la publicación de su obra *Mécanique Analytique*<sup>1</sup> en 1788. Lagrange introdujo numerosos conceptos empleados hoy día en la mecánica y en las matemáticas: formuló las ecuaciones que llevan su nombre para la dinámica; colocó sobre bases sólidas el cálculo de variaciones; fue el inventor de las palabras derivada y potencial; etc.

Otra figura clave en la mecánica analítica fue William Rowan Hamilton, ya en el siglo XIX (1805-1865). En su obra buscó una gran generalidad, desarrollando una teoría por la que el movimiento se puede reducir a la «búsqueda y diferenciación de una sólo función» (la integral de la acción  $S$ ). El punto de vista de Hamilton resultó muy fértil, resultando básico para otros campos como la mecánica cuántica, desarrollada posteriormente en el siglo XX.

---

<sup>1</sup>En ella, Lagrange se vanagloriaba de que no había ninguna figura, como botón de muestra de que los métodos propuestos estaban libres de casuística geométrica o topológica.

## 7.1. Coordenadas generalizadas

Un planteamiento básico de la mecánica analítica es la descripción de los sistemas mediante «coordenadas generalizadas».

**DEFINICIÓN:** *Se denominan coordenadas generalizadas a un conjunto cualquiera de parámetros  $\{q_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ , que sirven para determinar de manera unívoca la configuración del sistema.*

Estos parámetros en principio pueden ser cualesquiera, sin necesitar ser homogéneos en cuanto a dimensiones. Por ejemplo, se pueden mezclar longitudes, ángulos, etc. Una idea clave, subyacente en la elección de coordenadas generalizadas, es que éstas pueden englobar en su propia elección los enlaces del sistema (todos o al menos una parte de ellos). De esta forma se consigue una doble ventaja: por una parte, el número de parámetros es menor que el correspondiente directamente a las coordenadas de todas las partículas. Por otra, el número de ecuaciones de enlace se ve igualmente reducido.

Un conjunto de coordenadas  $\{q_i\}$  se denomina «libre» cuando se pueden variar de forma independiente entre sí; es decir, si las variaciones de las mismas,  $\{\delta q_i\}$ , se pueden escoger de forma arbitraria. Caso de que no sea así, será porque existe alguna ligadura que relacione dichas coordenadas, bien de tipo holónomo o no holónomo.

Cuando las coordenadas generalizadas no sean libres, se deberá a que subsisten condiciones de enlace formuladas de manera explícita. Estas se traducirán en relaciones entre las  $q_i$  (y también sus derivadas  $\dot{q}_i$  para enlaces no holónomos). Debido a estas ligaduras el número de grados de libertad es en realidad menor que  $n$ . Por el contrario, si las coordenadas son libres, su número es precisamente el número de grados de libertad del sistema.

Por ejemplo, en el sistema plano rígido de la figura 7.1, al tener una articulación, basta con una única coordenada angular ( $n = 1$ ;  $q_1 \equiv \theta$ ). En esta elección ya quedan englobados implícitamente los enlaces, tanto los internos (ligaduras de sólido rígido) como los externos (articulación). El sistema tiene un grado de libertad.

Supongamos ahora el caso general de un sistema con un número finito de partículas ( $N$ ), sujeto a  $m$  ligaduras holónomas y  $k$  anholónomas. Será posible su descripción mediante un conjunto más reducido de  $n = 3N - m$

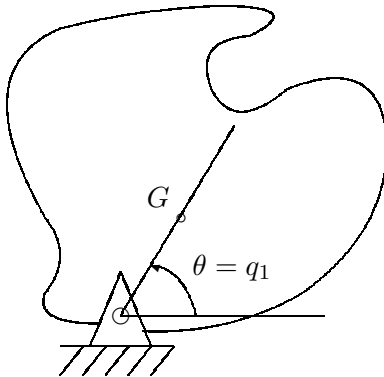


Figura 7.1: El movimiento del sólido articulado de la figura queda descrito por una única coordenada generalizada, el ángulo  $\theta$ . De esta forma se engloban todos los enlaces, tanto internos (ligaduras de sólido rígido) como externos (rótula cilíndrica en  $O$ ).

parámetros o coordenadas generalizadas. Esquemáticamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{m_i, \mathbf{r}_i, i = 1, \dots, N\} \\ + \\ m \text{ enlaces holónomos} \\ + \\ k \text{ enlaces anholónomos} \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \{m_i, i = 1, \dots, N\}, \{q_j, j = 1, \dots, n\}. \\ + \\ k \text{ enlaces anholónomos} \end{array} \right.$$

Esta reducción en el número de coordenadas se efectúa gracias a la eliminación de los  $m$  enlaces holónomos, que quedarán implícitos en la elección de las coordenadas generalizadas. Por el contrario, los  $k$  enlaces anholónomos no es posible eliminarlos, debiendo quedar planteados de forma expresa.

Un caso extremo de reducción en el número de coordenadas es el del sólido rígido. Considerado como un medio continuo, es infinitamente subdivisible, teniendo por tanto un número infinito de partículas y por tanto de coordenadas. Sin embargo, recordemos (apartado 6.1) que los enlaces internos del sólido (distancia constante entre dos partículas cualesquiera) permiten reducir el número de coordenadas generalizadas del sólido a 6.

En general, existirán unas relaciones entre los vectores de posición de cada partícula y las coordenadas generalizadas del tipo:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t) \quad (i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, n) \tag{7.1}$$

A los vectores de posición de cada partícula  $\{\mathbf{r}_i\}$  los denominaremos, por extensión, «coordenadas vectoriales». Está claro que éstas son equivalentes

a definir las  $3N$  coordenadas cartesianas correspondientes. Por otra parte, éstas sólo serán libres para un sistema sin ligadura ninguna; en cualquier otro caso, no formarán un conjunto libre.

Podrá existir dependencia del tiempo en la definición de las coordenadas generalizadas (7.1) cuando se hayan tomado sistemas de coordenadas móviles, o bien cuando haya enlaces móviles.

A partir de las relaciones (7.1), las velocidades se obtienen derivando:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad (7.2)$$

llamándose por extensión «velocidades generalizadas» a los términos  $\frac{dq_j}{dt} = \dot{q}_j$ .

**EJEMPLO 7.1:** Se considera un sistema formado por dos masas puntuales ( $m_1, m_2$ ) unidas entre sí por un hilo sin masa de longitud  $\ell$ , estando  $m_1$  a su vez unida a un punto fijo  $O$  por un hilo de igual longitud (*péndulo doble*). El conjunto se mueve en un plano vertical. Obtener los grados de libertad y las coordenadas libres del sistema así como la expresión de las coordenadas cartesianas en función de ellas.

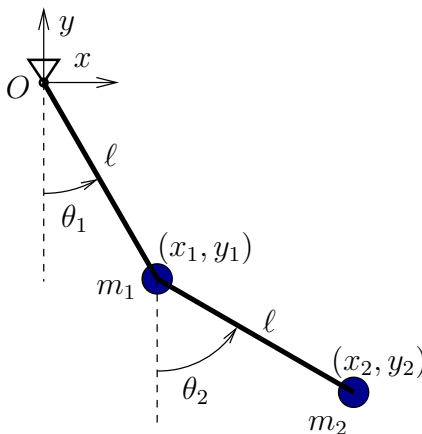


Figura 7.2: Definición de coordenadas y grados de libertad en un péndulo doble

*Solución.* El sistema tiene dos partículas en un plano, cuya configuración en principio estará fijada por sus coordenadas  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ . Existen dos enlaces holónomos que definen la distancia fija  $\ell$  entre  $m_1$  y  $O$  y entre

$m_2$  y  $m_1$ :

$$\begin{aligned}\ell^2 &= x_1^2 + x_2^2; \\ \ell^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2.\end{aligned}$$

Por tanto el sistema tiene dos grados de libertad. Al tratarse de un sistema con enlaces holónomos es posible encontrar un conjunto de 2 coordenadas generalizadas libres. En efecto, podemos considerar para ello los ángulos  $(\theta_1, \theta_2)$ . En función de ellos las coordenadas cartesianas se expresan como:

$$\begin{aligned}x_1 &= \ell \operatorname{sen} \theta_1, & y_1 &= -\ell \cos \theta_1; \\ x_2 &= \ell \operatorname{sen} \theta_1 + \ell \operatorname{sen} \theta_2, & y_2 &= -\ell \cos \theta_1 - \ell \cos \theta_2.\end{aligned}$$

□

**EJEMPLO 7.2:** Se considera ahora dos masas  $m_0$  y  $m_1$  unidas por un hilo sin masa de longitud constante  $\ell$ . La masa  $m_0$  se mueve según una recta horizontal con velocidad impuesta  $v$ , mientras que  $m_1$  permanece en el mismo plano vertical. Obtener los grados de libertad y las las coordenadas libres del sistema así como la expresión de las coordenadas cartesianas en función de ellas.

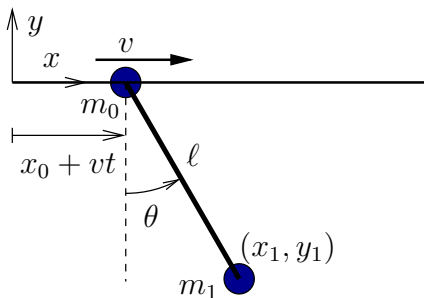


Figura 7.3: Definición de coordenadas y grados de libertad en un péndulo cuya base tiene un movimiento prescrito, con velocidad constante  $v$ . Se considera que en el instante inicial la posición de  $m_0$  es  $x_0$ .

*Solución.* El sistema consta en principio de dos masas, aunque la primera tiene su movimiento totalmente prescrito, por lo cual no es objeto de estudio mediante las ecuaciones de la dinámica. La otra masa tiene dos coordenadas cartesianas  $(x_1, y_1)$  sujetas a un enlace holónimo,  $\ell^2 = x_1^2 + x_2^2$ , por lo cual el sistema posee un solo grado de libertad. Podemos tomar como coordenada libre el ángulo  $\theta$ , expresándose:

$$x_1 = x_0 + vt + \ell \operatorname{sen} \theta; \quad y_1 = -\ell \cos \theta.$$

Se observa en la ecuación anterior que la expresión de  $x_1$  depende explícitamente del tiempo. Esto es debido al enlace móvil (movimiento impuesto) de  $m_0$ . Asimismo, podemos considerar que el sistema de coordenadas (generalizadas) para definir la posición de  $m_1$  es móvil, ya que el origen de las coordenadas polares está en  $m_0$ .  $\square$

**EJEMPLO 7.3:** Establecer los grados de libertad, coordenadas generalizadas y enlaces de un sistema formado por dos partículas  $A$  y  $B$ , unidas por una varilla rígida sin masa de longitud  $l$ . El conjunto se mueve sobre un plano horizontal liso, existiendo en  $A$  un pequeño cuchillo que obliga a que ese punto se mueva según la dirección de la varilla (figura 7.4).

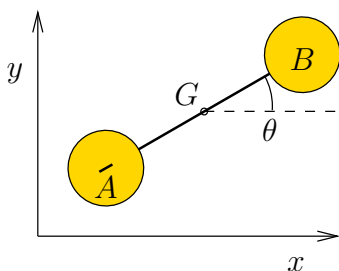


Figura 7.4: Sistema de dos partículas  $A$  y  $B$ , unidas rígidamente, con cuchillo en el apoyo de  $A$  que materializa un enlace anholónimo.

*Solución.* Al estar en un plano, se precisan en principio 4 coordenadas cartesianas para definir la configuración,  $\{x_A, y_A, x_B, y_B\}$ . Estas se hallan sujetas a 2 condiciones de enlace. Primeramente, el enlace holónimo correspondiente a la varilla rígida entre  $A$  y  $B$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2.$$

Por otra parte, la condición de apoyo mediante el cuchillo de cargas en  $A$  resulta en imponer que la velocidad de este punto lleve la dirección de la varilla, lo que constituye un enlace anholónimo:

$$-\dot{x}_A(y_B - y_A) + \dot{y}_A(x_B - x_A) = 0.$$

El sistema posee por tanto 2 grados de libertad. Podrían escogerse coordenadas generalizadas que eliminen el enlace holónimo (aunque no el anholónimo). Tomaremos para ello las coordenadas del centro de masas  $(x, y)$  y el ángulo  $\theta$  formado con el eje  $x$ , un total de tres coordenadas. En función de éstas, la velocidad de  $A$  se expresa como  $\mathbf{v}_A = (\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\theta} \sin \theta)\mathbf{i} + (\dot{y} - \frac{l}{2}\dot{\theta} \cos \theta)\mathbf{j}$ , y la normal a la varilla es  $\mathbf{n} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$ . La condición del enlace es  $\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n} = 0$ , resultando

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta - \frac{l}{2}\dot{\theta} = 0. \quad (7.3)$$

De esta forma, el sistema queda definido por tres coordenadas generalizadas sujetas a una ecuación de enlace anholónomo. A pesar de que tiene dos grados de libertad, debido a la naturaleza de este enlace no es posible definir explícitamente un conjunto de dos coordenadas libres.  $\square$

## 7.2. Ecuaciones de Lagrange

### 7.2.1. El principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas

Sea un sistema sometido a enlaces lisos. El principio de D'Alembert (6.65) expresa:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ compatibles.} \quad (7.4)$$

En esta expresión  $\mathbf{f}_i$  incluyen sólo las fuerzas activas, excluyendo las reacciones de los enlaces lisos.

Considerando una variación « $\delta$ » (es decir, infinitesimal y a tiempo constante) de las coordenadas en (7.1), se obtienen los desplazamientos virtuales:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.5)$$

Nótese que en esta expresión no existe término  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \delta t$ , ya que  $\delta t = 0$  para un desplazamiento virtual. La variación  $\delta$  se realiza en un instante fijo de tiempo, no a lo largo del movimiento. En esto difiere de los desplazamientos infinitesimales reales a lo largo del movimiento, que serían

$$d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt.$$

Sustituyendo (7.5) en (7.4) y reorganizando el orden de las sumas  $i, j$ :

$$\sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles.} \quad (7.6)$$

Analícemos con mayor detalle cada uno de los dos términos dentro del corchete en esta expresión. El primero define unos coeficientes escalares que

llamaremos «Fuerzas generalizadas»:

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.7)$$

Es inmediato comprobar que  $Q_j$  son precisamente los coeficientes de  $\delta q_j$  en la expresión del trabajo virtual  $\delta W$ :

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \sum_j^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (7.8)$$

El segundo término de (7.6) se puede expresar como:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \quad (7.9)$$

Para lo que sigue, debemos precisar que consideraremos la dependencia funcional de todas las magnitudes cinéticas sobre el conjunto de variables independientes  $(q_j, \dot{q}_j, t)$ . Esta aclaración precisa el significado de las derivadas parciales. Así,  $\partial/\partial q_j(\cdot)$  indicará la derivada parcial respecto de la coordenada  $q_j$ , manteniéndose constantes el resto de coordenadas  $q_k$  ( $k \neq j$ ) así como las velocidades  $\dot{q}_j$  y el tiempo  $t$ .

Para continuar el desarrollo de la expresión (7.9), establezcamos antes dos igualdades que será necesario emplear:

1.  $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ .

*Demostración.* En efecto, desarrollando el primer término,

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[ \overbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k}^{\dot{\mathbf{r}}_i} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta_{kj} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad \square$$

2.  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}$ .

*Demostración.* En efecto, desarrollando ambos términos por separado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}; \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j}, \end{aligned}$$



siendo ambas expresiones iguales, por la igualdad de las derivadas cruzadas.  $\square$

Empleando estos dos resultados y la definición de energía cinética,  $T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$ , la ecuación (7.9) resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

Finalmente, empleando (7.7) y (7.10), el principio de D'Alembert (7.4) queda expresado en coordenadas generalizadas como:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles} \quad (7.11)$$

Esta expresión, al tratarse del principio de D'Alembert, puede ser considerada por tanto como *ecuación fundamental de la dinámica*.

Conviene notar que en (7.11) no se emplean fuerzas físicas en ningún término. Tan sólo entran los coeficientes  $Q_j$ , *fuerzas generalizadas*, calculadas directamente a partir de la expresión (7.7) o como coeficientes del trabajo virtual  $\delta W$  (7.8) según se ha dicho. Al igual que en el principio de D'Alembert, en la definición de  $Q_j$  tampoco intervienen las fuerzas de reacción de los enlaces lisos, que no realizan trabajo virtual.

### 7.2.2. Forma básica de las ecuaciones de Lagrange

La expresión (7.11) es completamente general por lo que se puede aplicar a cualquier sistema, tanto con enlaces holónomos como no holónomos. En el caso en que *todos los enlaces sean holónomos*, será posible siempre establecer un conjunto de coordenadas libres  $\{q_j\}$ , en el que las variaciones  $\{\delta q_j\}$  se puedan escoger de manera arbitraria, manteniendo la compatibilidad con los enlaces. En este caso, (7.11) equivale a enunciar que cada uno de los coeficientes de las  $\{\delta q_j\}$  ha de anularse:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.12)$$

Estas expresiones son las llamadas *ecuaciones de Lagrange*, en su forma básica.

## OBSERVACIONES:

- En (7.12) existe una ecuación por cada grado de libertad, por lo que la elección de coordenadas generalizadas libres conduce directamente al mínimo número de ecuaciones dinámicas.
- Se trata de ecuaciones diferenciales de segundo orden (al existir derivadas temporales de los términos  $\partial T/\partial \dot{q}_j$ , que dependen, a su vez, de  $\dot{q}_j$ ).
- De las ecuaciones (7.12) han quedado eliminadas todas las reacciones de enlace que no realizan trabajo virtual, correspondientes a los enlaces lisos. Esto contrasta con las ecuaciones procedentes de los teoremas Newtonianos en las que, en principio, deben considerarse también estas reacciones.
- Una vez evaluadas las expresiones de  $T$  y de  $Q_j$ , las ecuaciones de Lagrange se pueden obtener de forma automática sin más que aplicar las reglas analíticas de derivación correspondientes a (7.12). Es posible incluso automatizar su obtención mediante una programación adecuada de sistemas de matemática simbólica, como MAPLE, MATHEMATICA, MACSYMA, etc.
- El significado físico del término  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$  en (7.12) es el de las fuerzas de inercia. Para comprobarlo, tomemos como coordenadas las propias coordenadas vectoriales  $\mathbf{r}_j$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right] = \frac{d}{dt} (m_j \dot{\mathbf{r}}_j) = m_j \ddot{\mathbf{r}}_j.$$

- Por último, los términos  $\partial T/\partial q_j$  pueden interpretarse como fuerzas ficticias procedentes de la elección de coordenadas generalizadas  $\{q_j\}$ . En caso de que éstas sean simplemente las componentes cartesianas de los vectores  $\{\mathbf{r}_i\}$ , desaparecerían. Estas fuerzas se añaden a las fuerzas generalizadas  $Q_j$  en la dirección de  $q_j$ .

### 7.2.3. Caso en que las fuerzas provienen de un potencial. Función Lagrangiana

Si las fuerzas aplicadas proceden de un potencial  $V$ ,

$$\mathbf{f}_i = -\mathbf{grad}_i V = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i},$$

las fuerzas generalizadas tendrán entonces la expresión:

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (7.13)$$

En lo que sigue, admitimos la hipótesis de que el potencial  $V$  depende de las coordenadas y posiblemente del tiempo<sup>2</sup>, pero no de las velocidades<sup>3</sup>:

$$V = V(q_j, t) = V(\mathbf{r}_i, t).$$

Sustituyendo (7.13) y agrupando términos, las ecuaciones de Lagrange (7.12) se pueden escribir como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Se define la *función Lagrangiana* como:

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) \stackrel{\text{def}}{=} T(q_j, \dot{q}_j, t) - V(q_j, t);$$

al no depender  $V$  de las velocidades, se verifica  $\partial T / \partial \dot{q}_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$ . De esta forma, las ecuaciones quedan finalmente:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, n).} \quad (7.14)$$

Estas expresiones constituyen las *ecuaciones de Lagrange* en su forma estándar, aplicables para sistemas en que las fuerzas provienen de un potencial.

Es necesario comprender la importancia de la función Lagrangiana  $L$  en la caracterización dinámica de un sistema: basta con conocer su expresión,  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ , para poder determinar a partir de ella las ecuaciones dinámicas (7.14); toda la información dinámica del sistema está por tanto contenida en la estructura de  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ .

**EJEMPLO 7.4:** Sea el problema de Poggendorf (ver ejemplo 6.9). Resolver por los métodos de la dinámica analítica, obteniendo las ecuaciones de Lagrange.

<sup>2</sup>Ya se ha comentado (apartado 2.1.3) que si el potencial no es constante (es decir,  $\partial V(\mathbf{r}_i, t) / \partial t \neq 0$ ), las fuerzas no son conservativas a pesar de provenir de un potencial.

<sup>3</sup>En caso de existir fuerzas de tipo electromagnético, esta suposición no es válida, ya que las fuerzas dependen de la velocidad con la que se mueven las partículas con carga. Es posible definir un potencial generalizado dependiente de la velocidad para este caso, y establecer las ecuaciones de Lagrange correspondientes, aunque que no trataremos aquí este aspecto para no complicar el desarrollo.

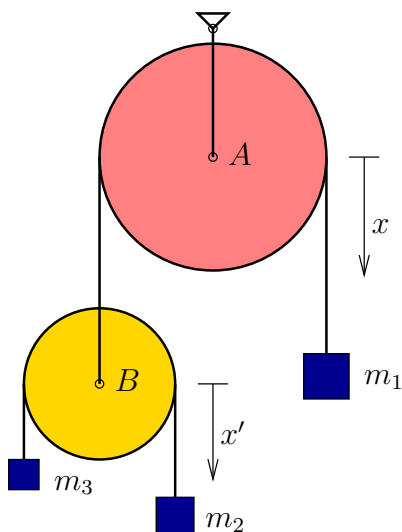


Figura 7.5: Ejemplo 7.4; Problema de Poggendorf.

*Solución.* El sistema es conservativo, ya que las poleas son lisas y sólo actúa la gravedad. La función Lagrangiana es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 + m_1gx_1 + m_2gx_2 + m_3gx_3. \quad (7.15)$$

El sistema tiene en realidad dos grados de libertad sólo, ya que existe un enlace holónomo (6.68), que permite escribir:

$$x_3 = -2x_1 - x_2; \quad \dot{x}_3 = -2\dot{x}_1 - \dot{x}_2. \quad (7.16)$$

Eliminando  $\dot{x}_3$  de (7.15), se expresa la Lagrangiana en función de coordenadas libres:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + m_1gx_1 + m_2gx_2 - m_3g(2x_1 + x_2). \quad (7.17)$$

Las ecuaciones de Lagrange se obtienen calculando las derivadas de  $L$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_1} \Rightarrow (m_1 + 4m_3)\ddot{x}_1 + 2m_3\ddot{x}_2 = m_1g - 2m_3g; \quad (7.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_2} \Rightarrow (m_2 + m_3)\ddot{x}_2 + 2m_3\ddot{x}_1 = m_2g - m_3g. \quad (7.19)$$

Estas ecuaciones coinciden con las que se obtuvieron antes (6.72) mediante la aplicación directa del principio de D'Alembert.  $\square$

EJEMPLO 7.5: Para el problema del semidisco calculado anteriormente mediante las ecuaciones de Newton-Euler (6.7), obtener la Lagrangiana y la ecuación de Lagrange en función del grado de libertad  $\theta$  (figura 7.6).

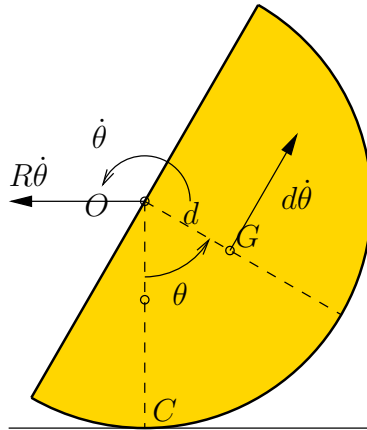


Figura 7.6: Ejemplo 7.5. Semidisco que rueda sin deslizar en una configuración genérica, definida por el ángulo  $\theta$ . La distancia del centro de masas  $G$  vale  $d = \frac{4R}{3\pi}$ .

*Solución.* El sistema es conservativo, ya que no se produce deslizamiento en la base y las únicas fuerzas que trabajan son las de la gravedad. Está definido por un único grado de libertad ( $\theta$ ), ya que la condición de rodadura restringe dos grados de libertad de los teóricos tres que tendría un sólido rígido en movimiento plano.

La función Lagrangiana es

$$L = T - V = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 - Mgy_G,$$

siendo

$$\begin{aligned} I_G &= \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) MR^2; \\ y_G &= R - \frac{4R}{3\pi} \cos \theta; \\ v_G^2 &= R^2\dot{\theta}^2 + \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2 \dot{\theta}^2 - 2R\frac{4R}{3\pi} \dot{\theta}^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

(La expresión de  $v_G$  se obtiene considerando que es la suma del arrastre del centro del arco  $R\dot{\theta}$  y la rotación de  $G$  alrededor del mismo  $d\dot{\theta}$ .)

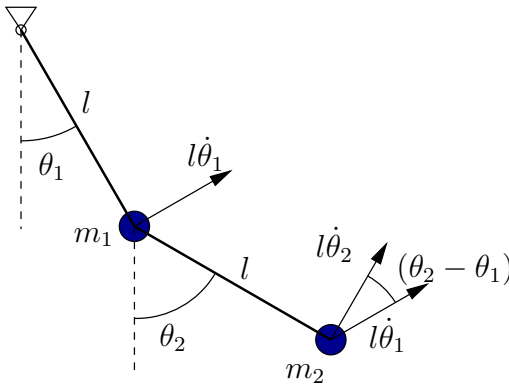


Figura 7.7: Ejemplo 7.6.

Desarrollando la expresión resulta

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta \right) MR^2 \dot{\theta}^2 - MRg \left( 1 - \frac{4}{3\pi} \right). \quad (7.20)$$

Realizando las derivadas se obtiene la ecuación de Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \\ \left( \frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta \right) MR^2 \ddot{\theta} + \frac{4}{3\pi} MR^2 \dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta &= -MRg \frac{4}{3\pi} \operatorname{sen} \theta. \end{aligned} \quad (7.21)$$

De esta ecuación se puede despejar la aceleración,

$$\ddot{\theta} = - \frac{8 \left( \dot{\theta}^2 + g/R \right) \operatorname{sen} \theta}{9\pi - 16}. \quad (7.22)$$

Se trata de la misma ecuación obtenida antes (6.47), aunque ahora de forma mucho más sencilla.  $\square$

**EJEMPLO 7.6:** El péndulo doble de la figura está formado por dos varillas rígidas y sin masa, con sendas masas ( $m_1, m_2$ ) en los extremos. Las varillas están unidas mediante articulaciones entre sí y a un punto fijo. El movimiento se desarrolla en un plano vertical, sometido al peso propio. Determinar las ecuaciones de la dinámica, empleando como coordenadas (libres) los ángulos ( $\theta_1, \theta_2$ ) (ver figura 7.7).

*Solución.* El sistema es conservativo y descrito mediante coordenadas libres. La velocidad de  $m_1$  es  $l\dot{\theta}_1$  y la de  $m_2$  se halla como suma de los dos

vectores (figura 7.7)  $l\dot{\theta}_1$  y  $l\dot{\theta}_2$  que forman un ángulo  $(\theta_2 - \theta_1)$ . Con todo, la Lagrangiana resulta:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2 \left[ \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right] + m_1gl \cos \theta_1 + m_2g(l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2). \quad (7.23)$$

Derivando la Lagrangiana se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \Rightarrow (m_1 + m_2)l^2\ddot{\theta}_1 + m_2l^2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2l^2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2)gl \sin \theta_1 = 0 \quad (7.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \Rightarrow m_2l^2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_2l^2\ddot{\theta}_2 + m_2l^2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2gl \sin \theta_2 = 0. \quad \square \quad (7.25)$$

### Unicidad de la función Lagrangiana

La elección de una función Lagrangiana para representar un sistema no es única. Para comprender esto basta considerar un potencial distinto, que difiera en una constante aditiva ( $V' = V + \text{cte.}$ ), lo que, como sabemos, es equivalente por completo. Por tanto, dos Lagrangianas que difieran en una constante también son equivalentes. Este resultado se puede generalizar, ya que es posible comprobar que dos Lagrangianas que difieran entre sí en una derivada total de alguna función que dependa exclusivamente de coordenadas y tiempo, son equivalentes<sup>4</sup>.

En efecto, sean  $L$  y  $L'$  tales que

$$L'(q_j, \dot{q}_j, t) \stackrel{\text{def}}{=} L(q_j, \dot{q}_j, t) + \frac{d}{dt}F(q_j, t); \quad (7.26)$$

siendo  $F(q_j, t)$  una función cualquiera de  $q_j$  y  $t$  pero no de las velocidades  $\dot{q}_j$ . Por la definición funcional de  $F$ , desarrollando la derivada temporal:

$$L' - L = \frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t},$$

---

<sup>4</sup>Las transformaciones que ocasionan una variación de  $L$  de este tipo se denominan «transformaciones de gauge», término proveniente del inglés, aunque la traducción directa en castellano «transformaciones de galga» no parece tampoco muy atractiva.

y las contribuciones de este término en las ecuaciones de Lagrange son:

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{dF}{dt} \right) \right] &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial F}{\partial q_j} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} \\ \blacksquare \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \frac{dF}{dt} \right] &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} \end{aligned}$$

Como se ve, al restar ambos términos en (7.14) se anulan entre sí, y el resultado neto, de emplear  $L'$ , son las mismas ecuaciones dinámicas que para  $L$ .

### Caso de fuerzas no conservativas

En los casos en que existan algunas fuerzas que procedan de un potencial ( $Q_j^V \stackrel{\text{def}}{=} -\partial V / \partial q_j$ ) y otras que no ( $Q_j^N$ ):

$$Q_j = Q_j^V + Q_j^N = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^N,$$

es posible definir una Lagrangiana parcial  $L = T - V$ , resultando entonces las ecuaciones:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^N, \quad j = 1, \dots, n} \quad (7.27)$$

donde sólo aparecen expresamente las fuerzas no conservativas  $Q_j^N$ .

### Transformaciones admisibles de coordenadas

Supongamos un cambio de coordenadas definido mediante una función biunívoca  $G : \{q_j\} \mapsto \{\hat{q}_j\}$ , suave<sup>5</sup>. Llamaremos a su inversa  $g = G^{-1}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \hat{q}_i &= G_i(q_j, t); \quad q_i = g_i(\hat{q}_j, t) \quad i, j = 1, \dots, n \\ &\left| \frac{\partial q_i}{\partial \hat{q}_j} \right| \neq 0. \end{aligned}$$

Para simplificar las expresiones en lo que sigue, definimos la *derivada variacional* de  $L$  respecto a  $q_j$  como

$$\frac{\delta L}{\delta q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right); \quad (7.28)$$

<sup>5</sup>es decir, con derivadas continuas hasta el orden que sea preciso



En función de ella, las ecuaciones de Lagrange (7.14) quedan expresadas simplemente como

$$\frac{\delta L}{\delta q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

Estas ecuaciones son equivalentes a  $\delta \hat{L} / \delta \hat{q}_k = 0$ , siendo  $\hat{L} = L \circ g$ , es decir  $\hat{L}(\hat{q}_j, \dot{\hat{q}}_j, t) = L(q_j, \dot{q}_j, t)$ , es la Lagrangiana expresada en las nuevas coordenadas.

*Demostración.* Desarrollando los términos de  $\delta \hat{L} / \delta \hat{q}_k$ ,

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{q}_k} = \sum_{l=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial \hat{q}_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \hat{q}_k} \right];$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\hat{q}}_k} &= \sum_{l=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\hat{q}}_k} \right) = \sum_{l=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial q_l}{\partial \dot{\hat{q}}_k} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \frac{\partial q_l}{\partial \dot{\hat{q}}_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\hat{q}}_k} \right]. \end{aligned}$$

Restando ambas resulta

$$\frac{\delta \hat{L}}{\delta \hat{q}_k} = \sum_{l=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right] \frac{\partial q_l}{\partial \hat{q}_k} = \sum_{l=1}^n \frac{\delta L}{\delta q_l} \frac{\partial q_l}{\partial \hat{q}_k},$$

y al ser  $\left| \frac{\partial q_l}{\partial \hat{q}_k} \right| \neq 0$ , queda demostrada la equivalencia.  $\square$

## 7.2.4. Desarrollo explícito de las ecuaciones del movimiento

### Energía cinética y momentos generalizados

La energía cinética es una función cuadrática de las velocidades. Esta propiedad se conserva al expresarla en coordenadas generalizadas. En efecto, desarrollando la expresión,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= T_2 + T_1 + T_0, \end{aligned} \quad (7.29)$$

siendo  $T_2$ ,  $T_1$  y  $T_0$  términos homogéneos en las  $\dot{q}_j$  de tipo cuadrático, lineal e independiente respectivamente. Sus expresiones son

$$T_2 = \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad \text{siendo } a_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \quad (7.30)$$

$$T_1 = \sum_{k=1}^n a_k \dot{q}_k, \quad \text{siendo } a_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (7.31)$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \quad (7.32)$$

En el caso en que no exista dependencia explícita del tiempo en la definición de las coordenadas generalizadas ( $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$ ), la expresión de la energía cinética será cuadrática homogénea en las  $\dot{q}_j$ :

$$T = T_2 = \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l. \quad (7.33)$$

Esto sucederá si no se emplean sistemas de coordenadas móviles ni hay enlaces reónomos (es decir, dependientes del tiempo).

Por otra parte, los momentos generalizados se definen como

$$p_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, \dots, n); \quad (7.34)$$

admitiendo que el potencial no depende de las velocidades, a partir de las expresiones (7.29, 7.30, 7.31, 7.32),

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k + a_j \quad (7.35)$$

### Forma general de las ecuaciones

En función de los momentos generalizados, las ecuaciones de Lagrange (7.14) pueden reescribirse como

$$\dot{p}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.36)$$

Derivando (7.35) se obtiene

$$\dot{p}_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{l,k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial t} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial a_j}{\partial t};$$

por otra parte, teniendo en cuenta las expresiones (7.29), (7.30) y (7.31),

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{l,k=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial T_0}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Teniendo en cuenta la igualdad siguiente,

$$\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_k = \sum_{l,k=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l \dot{q}_k,$$

resulta

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{l,k=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \\ + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial a_j}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Esta expresión se puede simplificar introduciendo los coeficientes

$$[kl, j] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \right), \quad (7.38)$$

que denominaremos «símbolos de Christoffel de primera especie»<sup>6</sup>, aplicados a la forma cuadrática que define  $T_2$ . Por otra parte, podemos definir unos coeficientes hemisimétricos

$$\gamma_{jk} = -\gamma_{kj} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \quad (j, k = 1, \dots, n), \quad (7.39)$$

que darán lugar a fuerzas giroscópicas como veremos más adelante. De esta forma, las ecuaciones (7.37) pueden escribirse como

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{l,k=1}^n [kl, j] \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial a_j}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0. \quad (7.40)$$

---

<sup>6</sup>Esta definición es la misma que se realiza en geometría diferencial de superficies, en la que para una superficie definida mediante coordenadas curvilíneas  $\mathbf{r}(q_i)$  se emplean los términos  $a_{kl} = (\partial \mathbf{r} / \partial q_k) \cdot (\partial \mathbf{r} / \partial q_l)$ , correspondiendo a los coeficientes de la métrica asociada, que es una forma cuadrática.

Teniendo en cuenta que la matriz de coeficientes  $[a_{ij}]$  no puede ser singular, al ser la energía cinética definida positiva, podrían eliminarse las aceleraciones de las ecuaciones (7.40), quedando

$$\ddot{q}_j = f_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.41)$$

(Hemos empleado los símbolos  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  para denotar a los conjuntos de coordenadas o velocidades generalizadas respectivamente).

### 7.2.5. Integrales primeras

#### Coordenadas cíclicas

Partiendo de las ecuaciones de Lagrange expresadas en la forma (7.36), si la función Lagrangiana  $L$  no depende explícitamente de una coordenada  $q_j$  —es decir,  $\partial L / \partial q_j = 0$ —, se verifica la conservación del momento generalizado correspondiente:

$$\boxed{\text{si } \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{cte.}} \quad (7.42)$$

Se dice entonces que  $q_j$  es una «coordenada cíclica» o ignorable. Las expresiones (7.42) constituyen integrales primeras del movimiento, ya que son ecuaciones en las que intervienen sólo derivadas primeras de las coordenadas.

Se puede interpretar el significado de las coordenadas cíclicas considerando que, si una coordenada  $q_j$  es cíclica, se puede sustituir  $(q_j)$  por  $(q_j + C)$ , siendo  $C$  una constante, y las ecuaciones no varían. Esto se debe a que  $L$  no depende de  $q_j$ , y por otra parte  $\dot{q}_j$  es invariante ante ese cambio. Por el contrario, hacemos notar que el hecho de que una coordenada sea cíclica no quiere decir que su valor sea constante, ni tampoco la velocidad generalizada correspondiente.

Sin embargo, para una coordenada cíclica  $q_j$ , será posible eliminar de las ecuaciones la velocidad correspondiente  $\dot{q}_j$ , empleando la integral primera (7.42). Si el sistema tiene  $n$  grados de libertad, de los que  $k$  corresponden a coordenadas cíclicas, se podrán eliminar éstas y quedar descrito el movimiento mediante dos conjuntos desacoplados de ecuaciones:  $k$  ecuaciones (7.42) para las coordenadas cíclicas, y  $(n - k)$  ecuaciones (7.14) para las demás coordenadas. El problema se ve considerablemente simplificado, procediéndose en primer lugar a resolver estas últimas  $(n - k)$  ecuaciones; una vez resueltas, se obtiene el valor de las  $k$  coordenadas cíclicas. Más adelante veremos un método general de proceder a esta reducción, el método de Routh (apartado 12.7).

Es posible extender el concepto de coordenada cíclica para el caso en que las fuerzas no procedan de un potencial. Para ello se define el momento generalizado en dirección  $j$  como

$$p_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

La condición de coordenada cíclica será entonces:

$$\text{si } \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \text{ y } Q_j = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{cte.}$$

### Integral de Jacobi o de la Energía

En ocasiones es posible obtener una integral primera cuyo significado está relacionado con la energía total del sistema a partir de la función Lagrangiana. Para ello, observamos que la derivada total de  $L$  respecto del tiempo es

$$\frac{d}{dt}L(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Sustituyendo a partir de (7.14),  $\partial L / \partial q_j = \frac{d}{dt}(\partial L / \partial \dot{q}_j)$ , y operando:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Agrupando los términos con derivadas totales, se deduce

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

de donde se obtiene la expresión de la llamada «integral de Jacobi»:

$$\text{si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad h \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \text{cte}$$

(7.43)

OBSERVACIONES:

- En el caso en que  $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$ , según vimos, la energía cinética es una expresión cuadrática homogénea en  $\dot{q}_j$ . Entonces, a partir de (7.29, 7.30):

$$T = T_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k$$

y por tanto

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T_2 - (T_2 - V) = T_2 + V = T + V,$$

por lo que  $h$  (7.43) coincide en este caso con la energía total,  $T + V$ .

- Pudiera darse el caso de que  $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$  y, por tanto,  $T + V = h = p_j \dot{q}_j - L$ , pero que esta expresión no se mantenga constante por ser  $\partial L / \partial t \neq 0$ . Esto último ocurrirá si  $\partial V(q_j, t) / \partial t \neq 0$ , siendo en este caso el sistema no conservativo desde el punto de vista físico aunque las fuerzas procedan de un potencial.
- Por otra parte, en los casos en que existan sistemas de coordenadas móviles se verificará, como se ha dicho,  $\partial \mathbf{r}_i / \partial t \neq 0$  y por tanto  $h = p_j \dot{q}_j - L \neq T + V$ . Sin embargo, puede que exista la integral de Jacobi (si  $\partial L / \partial t = 0$ ), aunque su significado físico no será en este caso la conservación de la energía. Un ejemplo típico de esta situación es el de una referencia móvil pero inercial, con velocidad de traslación constante y rectilínea (cf. ejemplo 7.10)

**Conservación de la energía.**— Otra manera —más directa— de obtener una integral de la energía es observando que, si las fuerzas son todas conservativas, la energía se mantiene constante (6.16). En este caso, basta con expresar dicha ecuación en función de las coordenadas generalizadas para obtener, en el marco de la dinámica analítica, la integral primera de la energía, equivalente a (7.43). Recordemos que para que las fuerzas sean conservativas, además de provenir de un potencial, éste debe ser estacionario ( $\partial V / \partial t = 0$ ). En función de las coordenadas generalizadas, esta condición se impone de la siguiente forma:

$\text{si } \exists V \text{ tal que } Q_j = -\frac{\partial V(q_j, t)}{\partial q_j}, \text{ siendo } \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \text{ y } \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}_i(q_j, t) = \mathbf{0}$ $\Downarrow$ $E = T + V = \text{cte.}$
---

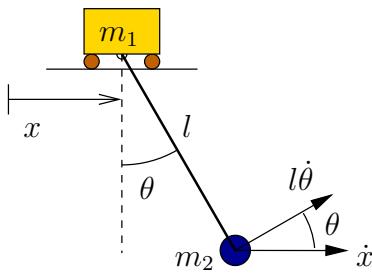


Figura 7.8: Ejemplo 7.7.

Hacemos notar que, en la expresión anterior, para establecer la constancia del potencial  $V$ , ha sido necesario añadir la condición  $(\partial \mathbf{r}_i / \partial t)(q_j, t) = \mathbf{0}$ , es decir, que no existan sistemas de coordenadas móviles. Otra manera más compacta de expresar la constancia de  $V$  sería en función de las coordenadas vectoriales, mediante la condición  $\partial V(\mathbf{r}_i, t) / \partial t = \mathbf{0}$ .

Por el contrario, en el caso en que el potencial  $V$  no sea constante, aplicando el principio de la energía cinética (6.15),

$$dT = - \sum_{k=1}^N \frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot d\mathbf{r}_k = -dV + \frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} dt$$

por lo que

$$d(T + V) = \frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} dt \neq 0,$$

es decir, no se conserva la energía  $T + V$ . Hacemos la observación de que en la expresión anterior se emplea la derivada parcial respecto del tiempo en relación con las coordenadas vectoriales (absolutas), que es en general distinta de la derivada cuando se consideran coordenadas generalizadas (posiblemente relativas o móviles):

$$\frac{\partial V(\mathbf{r}_i, t)}{\partial t} \neq \frac{\partial V(q_j, t)}{\partial t}.$$

EJEMPLO 7.7: Sea el sistema formado por la masa  $m_1$  que puede deslizar libremente sobre una recta horizontal, y  $m_2$  unida mediante una varilla rígida y sin masa a  $m_1$ , pudiendo girar libremente en un plano vertical.

- Considerando los parámetros (libres)  $(x, \theta)$  (ver figura 7.8), obtener las ecuaciones de Lagrange e integrales primeras que hubiere.
- Considerando ahora que se impone una velocidad constante  $v$  a  $m_1$ , discutir la existencia de integrales primeras.

*Solución.*

a.— Desarrollando la función Lagrangiana resulta:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + m_2gl\cos\theta. \quad (7.44)$$

Observamos que no depende explícitamente de  $x$ , por lo que ésta es una coordenada cíclica:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_1\dot{x} + m_2(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta) = (\text{cte.}) \quad (7.45)$$

La ecuación de Lagrange en la otra coordenada es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad m_2l^2\ddot{\theta} + m_2\ddot{x}l\cos\theta + m_2gl\sin\theta = 0. \quad (7.46)$$

En esta ecuación aparece tanto  $\theta$  como la coordenada cíclica  $x$ . Es posible eliminar esta última para obtener una ecuación diferencial función exclusivamente de las coordenadas no cíclicas. Para ello, en primer lugar se despeja derivando (7.45)

$$\ddot{x} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(-l\ddot{\theta}\cos\theta + l\dot{\theta}^2\sin\theta\right),$$

y sustituyendo en (7.46) resulta finalmente:

$$m_2l\ddot{\theta}\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos^2\theta\right) + \frac{m_2^2}{m_1 + m_2}l^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + m_2gl\sin\theta = 0. \quad (7.47)$$

Por otra parte, todas las fuerzas son conservativas luego la energía total  $E$  se conserva:

$$\begin{aligned} E &= T + V \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) - m_2gl\cos\theta \quad (\text{cte.}). \end{aligned} \quad (7.48)$$

También puede razonarse que la Lagrangiana no depende del tiempo explícitamente, por lo que la integral de Jacobi  $h$  (7.43) es constante, y además coincide con la energía  $E$  al no haber coordenadas móviles.

b.— El sistema queda ahora con el único grado de libertad  $\theta$ . La lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2(v^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2vl\dot{\theta}\cos\theta) + m_2gl\cos\theta. \quad (7.49)$$



Ahora la energía total no se conserva, ya que se realiza un trabajo externo para mover  $m_1$  con la velocidad impuesta  $v$ . Sin embargo,  $L$  no depende explícitamente del tiempo por lo que existe la integral de Jacobi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} = 0 &\Rightarrow h = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L \\ &= -\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2(-v^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2vl\dot{\theta} \cos \theta) - m_2gl \cos \theta \quad (\text{cte.}) \quad \square \end{aligned} \quad (7.50)$$

### 7.2.6. Teorema de Noether

Sea un sistema autónomo<sup>7</sup>, con Lagrangiana  $L(q_j, \dot{q}_j)$ . Suponemos que existe una familia de transformaciones  $q_j \mapsto h^s(q_j)$ , función de un parámetro continuo  $s \in \mathbb{R}$ , de forma que  $L$  es invariante frente a ellas, y provienen de forma continua de la identidad  $h^{s=0}(q_j) = q_j$ . Existe entonces una integral del movimiento,

$$I(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} h^s(q_k) \Big|_{s=0}. \quad (7.51)$$

*Demostración.* Sea  $q_j(t)$  la solución del movimiento. Por la hipótesis hecha,  $q_j(s, t) = h^s(q_j(t))$ . Derivando:

$$0 = \frac{d}{ds} L(q_j(s, t), \dot{q}_j(s, t)) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{d}{ds} q_k(s, t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} \dot{q}_k(s, t) \right].$$

Por las ecuaciones de Lagrange,  $\partial L / \partial q_k = (d/dt)(\partial L / \partial \dot{q}_k)$ ;

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} L = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} q_k(s, t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} \dot{q}_k(s, t) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{ds} q_k(s, t) \right] = \frac{d}{dt} I(q_j, \dot{q}_j), \end{aligned}$$

luego  $I(q_j, \dot{q}_j)$  es una constante del movimiento. □

**EJEMPLO 7.8:** Sea un sistema invariante frente a movimientos de traslación según una dirección determinada  $\mathbf{e}$ . Demostrar que la componente de la cantidad de movimiento según esa dirección es una constante del movimiento.

<sup>7</sup>es decir, aislado, lo que implica  $\partial L / \partial t = 0$

*Solución.* En efecto, elijamos —sin pérdida de generalidad— el eje  $x$  según la dirección dada (es decir, tomamos  $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}$ ). Podemos definir una transformación que cumple los requisitos del teorema de Noether mediante

$$h^s : \mathbf{r}_i \mapsto \mathbf{r}'_i + s \mathbf{i}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\left. \frac{d}{ds} h^s(\mathbf{r}_i) \right|_{s=0} = \mathbf{i}; I = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{i} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i = P_x. \quad \square$$

**EJEMPLO 7.9:** Sea un sistema invariante frente a rotaciones alrededor de un determinado eje ( $O, \mathbf{e}$ ). Demostrar que la componente del momento cinético según ese eje es una constante del movimiento.

*Solución.* En efecto, elijamos —sin pérdida de generalidad— el eje  $Oz$  según la dirección indicada (es decir, tomamos  $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}$ ). La transformación es

$$\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \mapsto \mathbf{r}'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$$

$$\begin{cases} x'_i = x_i \cos s + y_i \operatorname{sen} s \\ y'_i = -x_i \operatorname{sen} s + y_i \cos s \\ z'_i = z_i \end{cases}$$

$$\left. \frac{d}{ds} h^s(\mathbf{r}_i) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \mathbf{r}'_i \right|_{s=0} = (y_i, -x_i, 0) = \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{k}$$

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^N (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \wedge \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k} = -H_z \quad \square$$

### 7.2.7. Sistemas naturales

Llamaremos *sistema natural* a un sistema descrito por las ecuaciones de Lagrange en su forma estándar (7.14), en el que exista la integral de Jacobi como constante del movimiento ( $\partial L / \partial t = 0$ ) y la energía cinética sea función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas ( $T = T_2$ ).

Como se ha comentado antes (apartado 7.2.5), en este caso la integral de Jacobi resulta tener un significado físico claro, la energía total del sistema,

$$h = T + V.$$

Al conservarse  $h$  se mantiene igualmente constante la energía, resultando conservativo desde el punto de vista físico.

Teniendo en cuenta que en un sistema natural los coeficientes en las ecuaciones (7.31, 7.30) cumplen  $a_j = 0$  y  $\partial a_{ij} / \partial t = 0$ , las ecuaciones del

movimiento tienen una expresión considerablemente más sencilla que en el caso general (7.40), resultando

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^n [kl, j] \dot{q}_k \dot{q}_l + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1 \dots, n). \quad (7.52)$$

En esta expresión se observa que las velocidades generalizadas  $\dot{q}_j$  intervienen únicamente en términos cuadráticos.

Podemos observar que un sistema holónomo con integral de Jacobi, en el que fuese  $T_1 = 0$  pero  $T_0 \neq 0$ , tiene ecuaciones del movimiento muy similares a (7.52), ya que  $T_0$  puede considerarse agrupado con la energía potencial  $V$ ,

$$V' = V - T_0,$$

de forma que la energía cinética restante es una expresión cuadrática homogénea en las  $\dot{q}_j$ , al igual que en un sistema natural.

EJEMPLO 7.10: Sea un sistema formado por una masa y un resorte lineal, capaz de moverse en una dirección, unido en su base a un punto que se tiene un movimiento impuesto con velocidad uniforme  $v_0$ . Sea  $l_0$  la longitud natural del muelle,  $k$  su constante, y  $x$  la elongación respecto de la natural. Discutir la existencia de una integral primera de la energía.

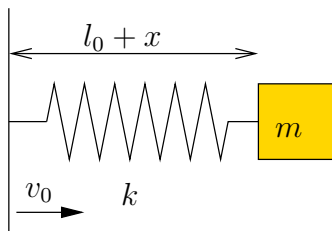


Figura 7.9: Sistema formado por una masa  $m$  y un muelle de constante  $k$  y longitud natural  $l_0$ , capaz de moverse en dirección  $x$ , cuya base tiene un movimiento impuesto de velocidad constante  $v_0$ .

*Solución.* La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} m (v_0 + \dot{x})^2$$

por lo que sus componentes homogéneas son

$$T_2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2; \quad T_1 = m v_0 \dot{x}; \quad T_0 = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

La energía potencial es

$$V = \frac{1}{2} k x^2.$$

Se comprueba inmediatamente que  $\partial L/\partial t = 0$ , por lo que existe la integral de Jacobi, que vale

$$h = T_2 - T_0 + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

En este ejemplo,  $T_0$  es constante, por lo que la conservación de  $h$  conduce también a la conservación de  $T_2 + V$ , aunque ambas constantes tengan distinto valor.

Otro procedimiento para analizar este ejemplo sería, considerando que el sistema de referencia móvil con la base es inercial, realizar los cálculos relativos a él:

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2; \\ V' &= \frac{1}{2}kx^2. \end{aligned}$$

En este caso obtendríamos un sistema natural, en el que se conserva la energía total  $T' + V'$ . Observamos que ésta coincide con  $T_2 + V$  relativa al sistema fijo inicial, que ya habíamos visto se conservaba.  $\square$

### 7.2.8. Sistemas giroscópicos

En el desarrollo explícito de las ecuaciones de Lagrange para un sistema holónomo dado anteriormente (7.40),

$$\sum_{k=1}^n a_{jk}\ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^n [kl, j]\dot{q}_k\dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \gamma_{jk}\dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{jk}}{\partial t}\dot{q}_k + \frac{\partial a_j}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad (7.53)$$

los términos  $\gamma_{jk}\dot{q}_k$  se denominan *términos giroscópicos*, dando lugar si aparecen a un *sistema giroscópico*. Se trata de coeficientes hemisimétricos, dados por (7.39),

$$\gamma_{jk} = -\gamma_{kj} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \quad (j, k = 1, \dots, n),$$

donde  $a_j$  son los coeficientes definidos en (7.31),

$$a_k = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}.$$

Por tanto, para que los  $a_j$  no sean nulos, al menos una de las ecuaciones de la relación de coordenadas  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t)$  debe ser función explícita tanto de

$q_j$  como de  $t$ . Además, para que existan términos giroscópicos  $\gamma_{ij}$ , algunos de los coeficientes  $a_j$  deben ser funciones explícitas de las coordenadas  $q_j$ , como ocurre cuando hay un enlace móvil.

Una característica importante de los sistemas giroscópicos es el acoplamiento del movimiento entre dos o más coordenadas. En efecto, la *fuerza giroscópica* asociada en la ecuación (7.53) es

$$Q_j^{\text{gir}} = - \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} \dot{q}_k. \quad (7.54)$$

Al ser  $\gamma_{jj} = 0$  ( $j$  no sumado), la fuerza  $Q_j^{\text{gir}}$  puede deberse a todos los componentes de las velocidades generalizadas excepto a  $\dot{q}_j$ , lo que produce necesariamente un acoplamiento.

Por otra parte, el trabajo realizado por estas fuerzas es

$$\frac{dW^{\text{gir}}}{dt} = \sum_{j,k=1}^n Q_j^{\text{gir}} \dot{q}_j = - \sum_{j=1}^n \gamma_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 0, \quad (7.55)$$

al ser  $\gamma_{jk}$  hemisimétricos. Es decir, cualquiera que sea el movimiento, las fuerzas giroscópicas no realizan trabajo. En esto difieren de las fuerzas disipativas viscosas que pueden aparecer también en las ecuaciones del movimiento, que serían también términos proporcionales a  $\dot{q}_j$ , pero que por su propia naturaleza desarrollan un trabajo neto necesariamente negativo.

Las fuerzas giroscópicas aparecen en sistemas físicos que contengan alguna referencia móvil de tipo rotatoria para la definición de coordenadas. Estas fuerzas pueden servir para estabilizar el movimiento de ciertos sistemas alrededor de trayectorias dinámicas estacionarias, como es el caso de la peonza simétrica para su movimiento de precesión uniforme o la brújula giroscópica (capítulo 9).

**EJEMPLO 7.11:** Un disco circular de radio  $a$ , situado en un plano horizontal, tiene un movimiento de rotación impuesto alrededor de su centro con velocidad constante  $\omega$ . En su perímetro está anclado un muelle, de longitud natural  $r_0$ , que en su otro extremo tiene una masa  $m$ . Obtener las ecuaciones del movimiento e identificar los términos giroscópicos.

*Solución.* Para calcular la energía cinética debemos expresar antes la velocidad del punto  $P$ , lo que puede hacerse a través del movimiento relativo al disco,

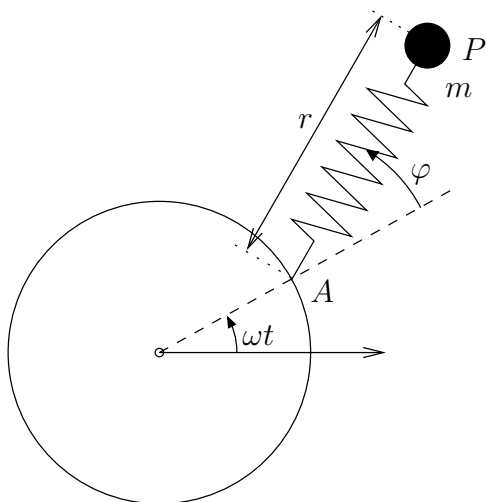


Figura 7.10: Disco que gira con velocidad constante  $\omega$ , con un resorte fijado en su perímetro, al cual está sujeta a su vez una partícula de masa  $m$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P|A} \\ &= [-a\omega \operatorname{sen}(\omega t) - r(\omega + \dot{\varphi}) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) + \dot{r} \cos(\omega t + \varphi)] \mathbf{i} \\ &\quad + [a\omega \cos(\omega t) + r(\omega + \dot{\varphi}) \cos(\omega t + \varphi) + \dot{r} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)] \mathbf{j} \end{aligned}$$

La expresión de la Lagrangiana es

$$L = \frac{m}{2} [a^2\omega^2 + r^2(\omega + \dot{\varphi})^2 + \dot{r}^2 + 2ar\omega(\omega + \dot{\varphi}) \cos \varphi + 2a\omega\dot{r} \operatorname{sen} \varphi] - \frac{k}{2}(r - r_0)^2.$$

Las ecuaciones de Lagrange resultan

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - 2mr\omega\dot{\varphi} - mr\omega^2 - ma\omega^2 \cos \varphi + k(r - r_0) &= 0 \\ mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + 2mr\omega\dot{r} + mar\omega^2 \operatorname{sen} \varphi &= 0 \end{aligned}$$

En la primera ecuación —respecto a  $r$ — el término giroscópico es  $-2mr\omega\dot{\varphi}$ , y en la segunda ecuación —respecto a  $\varphi$ — el término correspondiente es  $+2mr\omega\dot{r}$ . La matriz de coeficientes hemisimétricos es por tanto

$$[\gamma_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & -2mr\omega \\ 2mr\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Estos términos son los que corresponden al desarrollo de la energía cinética,

$$\begin{aligned} T &= T_2 + T_1 + T_0; \\ T_2 &= \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2), \\ T_1 &= m(r^2\omega\dot{\varphi} + ar\omega\dot{\varphi} \cos \varphi + a\omega\dot{r} \operatorname{sen} \varphi), \\ T_0 &= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi), \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$a_r = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{r}} = ma\omega r \sin \varphi, \quad a_\varphi = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\omega + mar\omega \cos \varphi;$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} = -2mr\omega, \quad \gamma_{\varphi r} = -\gamma_{r\varphi} = 2mr\omega \quad \square$$

### 7.3. Potencial dependiente de la velocidad

En las ecuaciones de Lagrange (7.14) y en la discusión posterior se admitió como base de partida que el potencial  $V$  no dependía de las velocidades. Sin embargo, esta restricción no es siempre necesaria, pudiendo existir casos en que se defina un potencial dependiente de las velocidades y se mantenga la forma estándar de las ecuaciones de Lagrange.

Recordemos la forma básica de las ecuaciones de Lagrange (7.12),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.56)$$

Supongamos ahora que las fuerzas generalizadas  $Q_j$  provienen de un potencial dependiente de la velocidad  $U(q_j, \dot{q}_j, t)$ , de acuerdo con

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.57)$$

Comprobamos inmediatamente que, llamando  $L = T - U$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.58)$$

#### Aplicación: fuerzas electromagnéticas

Como ejemplo básico de potencial dependiente de la velocidad consideraremos las fuerzas electromagnéticas actuando sobre una partícula cargada. Si la carga eléctrica es  $e$  y la velocidad  $\mathbf{v}$ , estas fuerzas son

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}), \quad (7.59)$$

donde  $\mathbf{E}$  es la intensidad del campo eléctrico y  $\mathbf{B}$  el vector de inducción magnética. Éstos se obtienen respectivamente de un potencial escalar  $\phi$  y de un potencial vector  $\mathbf{A}$  de acuerdo con

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (7.60)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}, \quad (7.61)$$

donde tanto  $\phi$  como  $\mathbf{A}$  son en general funciones del tiempo. En función de éstos, la fuerza vale

$$\mathbf{F} = e \left( -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) \right). \quad (7.62)$$

Veamos cómo puede obtenerse esta fuerza de un potencial  $U$ , dependiente de la velocidad. Sea  $(x, y, z)$  la posición de la partícula en coordenadas cartesianas. De entrada el término  $-e\nabla\phi$  corresponde a la energía potencial ordinaria  $V$ .

Las componentes cartesianas del término  $\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$  son

$$[\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_i = \sum_{k,l,m=1}^n \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} v_j \frac{\partial A_m}{\partial x_l}; \quad (7.63)$$

consideremos —por ejemplo— la componente  $x$  (índice de coordenada 1):

$$\begin{aligned} [\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_x &= v_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}, \end{aligned}$$

donde se ha añadido y restado  $v_x(\partial A_x/\partial x)$  en el último término. A su vez,  $\mathbf{A}$  es función de coordenadas y tiempo, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_x &= \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right]. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Resulta por tanto

$$[\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_x = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}. \quad (7.65)$$



Generalizando para una componente genérica  $x_i$ , la fuerza electromagnética es por tanto

$$F_i = e \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_i}{dt} \right], \quad (7.66)$$

y considerando asimismo (7.64) generalizada según una dirección  $x_i$ , se obtiene

$$F_i = e \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right) \right]. \quad (7.67)$$

Tomando ahora

$$U = e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (7.68)$$

se obtiene finalmente

$$F_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (7.69)$$

de acuerdo con (7.57). Resulta por tanto una función Lagrangiana de la forma

$$L = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (7.70)$$

Esta forma de la Lagrangiana permite observar que el momento de una partícula cargada en un campo electromagnético es

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}. \quad (7.71)$$

Este resultado llama la atención, ya que indica que una parte del momento está asociado al propio campo electromagnético. En el caso en que una coordenada  $x_i$  sea cíclica (es decir,  $\partial L / \partial x_i = 0$ ), es la componente correspondiente de este momento generalizado, en lugar del momento mecánico —cantidad de movimiento—, la que se conserva.

La representación de las fuerzas electromagnéticas debidas a la inducción magnética,  $e\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$ , es similar a las fuerzas giroscópicas descritas anteriormente (apartado 7.2.8). En efecto, la expresión (7.63) se puede escribir como

$$[\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})]_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}^{\text{em}} \dot{x}_j, \quad (7.72)$$

donde se han empleado los coeficientes

$$\gamma_{ij}^{\text{em}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k,l,m=1}^n e \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \frac{\partial A_m}{\partial x_l}. \quad (7.73)$$

Se comprueba inmediatamente que  $\gamma_{ij}^{\text{em}} = -\gamma_{ji}^{\text{em}}$ . Por tanto, esta representación es análoga a la de los términos de fuerzas giroscópicas en (7.53). Al igual que entonces, debido a la hemisimetría de los coeficientes, las fuerzas debidas a la inducción magnética no desarrollan trabajo,

$$\frac{dW^{\text{em}}}{dt} = \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij}^{\text{em}} \dot{q}_i \dot{q}_j = 0. \quad (7.74)$$

## 7.4. Sistemas con ligaduras

Sea un sistema descrito mediante coordenadas generalizadas  $\{q_j\}$  no libres, gobernado por la ecuación fundamental de la dinámica (7.11). Si el sistema admite potencial  $V$  se puede escribir esta última ecuación en función de la Lagrangiana  $L$ :

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\} \text{ compatibles.} \quad (7.75)$$

Las variaciones  $\{\delta q_j\}$  no son libres, sino que están sujetas a restricciones o enlaces, por lo que no se pueden eliminar de la ecuación anterior.

No resulta posible elegir un conjunto de coordenadas libres si existen enlaces anholónomos en los que intervienen las velocidades, del tipo:

$$\Phi(q_j, \dot{q}_j, t) = 0$$

Restringiremos nuestra atención a las ligaduras anholónomas denominadas *catastásicas*, caracterizadas por una expresión lineal en  $\dot{q}_j$ :

$$\sum_{j=1}^n A_j \dot{q}_j + C = 0.$$

De forma equivalente, en función de variaciones infinitesimales:

$$\sum_{j=1}^n A_j dq_j + C dt = 0 \quad (7.76)$$

En la expresión anterior tanto  $A_j$  como  $C$  serán a su vez funciones de  $q_j$  y de  $t$ ; en caso de que fuesen constantes, admitiría una integral directa dando lugar a una expresión holónoma, por lo que la ligadura sería anholónoma sólo en apariencia:

$$A_j, C \text{ constantes} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^n A_j (q_j - (q_j)_0) + C(t - t_0) = 0$$

Además de los sistemas con ligaduras anholónomas, en que forzosamente se han de formular los enlaces de forma explícita, en ocasiones nos interesará formular de esta manera una ligadura, aunque sea holónoma. Como veremos, así será posible calcular la reacción de enlace, que de otra manera no entraría en las ecuaciones. De esta manera, una ligadura holónoma  $\Phi(q_j, t) = 0$  es equivalente a

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

### 7.4.1. Método de los mUltiplicadores de Lagrange

Supongamos un sistema mecánico, descrito mediante una función Lagrangiana  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ , con:

- $n$  coordenadas generalizadas  $\{q_j, j = 1, \dots, n\}$
- $k$  ecuaciones de ligadura  $\Phi_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j + C_i = 0, (i = 1, \dots, k)$

El sistema posee  $(n - k)$  grados de libertad, por lo que las  $n$  coordenadas  $\{q_j\}$  no forman un conjunto libre. En cualquier caso, se verifica la ecuación fundamental de la dinámica (7.75).

Los desplazamientos virtuales se toman en un instante fijo, sin variación del tiempo ( $\delta t = 0$ ). Las condiciones de compatibilidad de éstos con los enlaces se obtienen sustituyendo  $(\delta q_j, \delta t = 0)$  en (7.76):

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (7.77)$$

En sentido estricto no se puede decir sin embargo que los desplazamientos  $\{\delta q_j\}$  que cumplan (7.77) sean compatibles con los enlaces, al estar éstos últimos definidos en función de velocidades que implican necesariamente una variación del tiempo. Sin embargo, las  $\{\delta q_j\}$  que cumplen (7.77) no producen trabajo virtual con las fuerzas de enlace, que es lo que en realidad nos interesa.

Introducimos ahora unos multiplicadores  $\{\lambda_i\}, i = 1, \dots, k$ , de valores en principio arbitrarios. Multiplicaremos por ellos a cada una de las  $k$  expresiones (7.77), que seguirán valiendo cero:

$$\lambda_i \sum_{j=1}^n A_{ij} \delta q_j = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (\text{no sumado}) \quad (7.78)$$

Sumamos ahora para las  $k$  expresiones anteriores (la suma seguirá valiendo cero) e introducimos esta suma en (7.75), que no se verá alterado:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} \right] \delta q_j = 0 \quad (7.79)$$

donde para sacar factor común  $\delta q_j$  se ha intercambiado el orden de los sumatorios en  $i$  y  $j$ . Las expresiones (7.79) obtenidas dependen pues de  $(n+k)$  parámetros:  $k$  multiplicadores  $\{\lambda_i\}$  y  $n$  desplazamientos virtuales,  $\{\delta q_j\}$ .

Puesto que los multiplicadores  $\lambda_i$  son arbitrarios, podemos elegirlos de forma que se anulen  $k$  de los coeficientes del sumatorio en (7.79). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que éstos son los  $k$  primeros:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, k; \quad (7.80)$$

restan pues en el sumatorio (7.79) tan sólo  $(n-k)$  coeficientes no nulos. Puesto que el sistema posee  $(n-k)$  grados de libertad, será posible elegir de forma libre los  $(n-k)$  desplazamientos virtuales correspondientes, de manera que se deberán anular los coeficientes respectivos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} = 0, \quad j = k+1, \dots, n. \quad (7.81)$$

Así, por un motivo o por otro, han de anularse los  $n$  coeficientes entre corchetes en (7.79). El sistema queda entonces planteado con  $(n+k)$  ecuaciones,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (7.82)$$

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j + C_i = 0 \quad i = 1, \dots, k \quad (7.83)$$

siendo las  $(n+k)$  incógnitas  $\{q_1, \dots, q_n\}$ ,  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ . Este planteamiento define las ecuaciones del movimiento en un caso general.

Sin embargo, en la práctica no suele ser aconsejable abordar directamente el problema de  $(n+k)$  ecuaciones (7.82), (7.83) con  $(n+k)$  incógnitas. Normalmente es posible eliminar de las ecuaciones los  $k$  multiplicadores  $\lambda_i$ , dejando un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas.

Si las fuerzas no provienen de un potencial, el desarrollo sería enteramente análogo, pero partiendo de (7.11) en lugar de (7.75). Al final, las ecuaciones equivalentes a (7.82) serían:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Esta expresión permite interpretar el significado físico del término  $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij}$ . Se trata de la reacción en el enlace, en la dirección de la coordenada  $q_j$ . Ésta se suma a las fuerzas generalizadas  $Q_j$ , que recordamos provenía únicamente de las fuerzas activas.

EJEMPLO 7.12: Sea un aro de radio  $r$  y masa  $m$  que rueda sin deslizar, dentro de un plano vertical, sobre una recta inclinada un ángulo  $\alpha$ . Obtener las ecuaciones dinámicas y la reacción tangencial de la recta sobre el disco que asegura la rodadura.

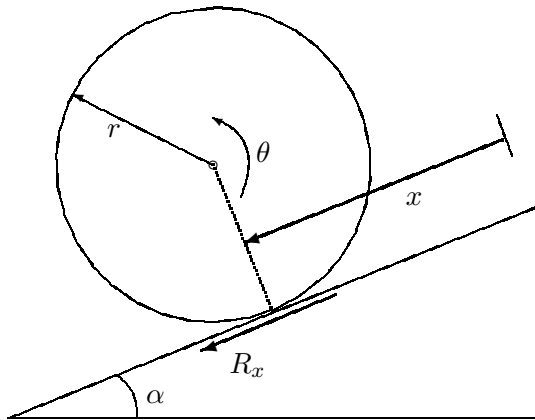


Figura 7.11: Aro rodando sin deslizar por un plano inclinado. (nota: al resolver el problema la reacción  $R_x$  resulta con valor negativo, lo que quiere decir que tiene sentido opuesto al dibujado)

*Solución.* La ligadura impuesta por la rodadura es:

$$r d\theta - dx = 0.$$

En realidad esta ligadura es holónoma, pues se podría integrar, quedando

$$r\theta = x;$$

sin embargo, deseamos mantener la ligadura de forma explícita, lo que nos permitirá obtener después la reacción del enlace.

En función de las coordenadas  $(x, \theta)$  (no libres), la Lagrangiana vale

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (mr^2) \dot{\theta}^2 + mgx \operatorname{sen} \alpha$$

Introducimos un multiplicador  $\lambda$ ; siguiendo la notación de (7.78)

$$\lambda (A_x \dot{x} + A_\theta \dot{\theta}) = 0, \quad \text{siendo } A_x = -1, A_\theta = r$$

Resultan pues de (7.82) y (7.83) tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} - mg \operatorname{sen} \alpha + \lambda &= 0 \\ mr^2\ddot{\theta} - \lambda r &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Lagrange}$$

$$r\dot{\theta} = \dot{x} \quad \text{Ligadura}$$

Es posible eliminar  $\lambda$  de estas ecuaciones, derivando la ecuación de ligadura y entrando en la segunda ecuación de Lagrange:

$$r\ddot{\theta} = \ddot{x} \quad \Rightarrow \quad mr\ddot{x} = \lambda r \quad \Rightarrow \quad \lambda = m\ddot{x}$$

Deduciéndose finalmente:

$$\lambda = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{2}; \quad \ddot{x} = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{2}; \quad \ddot{\theta} = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{2r}.$$

La fuerza tangencial sobre el disco es por tanto:

$$R_x = \lambda A_x = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{2}(-1) = -\frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

Hacemos notar que el signo negativo para  $R_x$  indica que tiene el sentido contrario al considerado positivo para  $x$  (descendiente según la recta en la figura), es decir, tiene sentido ascendente.

Podemos obtener también:

$$R_\theta = \lambda A_\theta = \frac{mg \operatorname{sen} \alpha}{2}r,$$

que no es sino el momento debido a  $R_x$ .

Como comprobación, realizamos el mismo cálculo por los métodos de Newton-Euler:

$$\begin{aligned} \text{cantidad de movimiento: } m\ddot{x} &= mg \operatorname{sen} \alpha + R_x \\ \text{momento cinético: } (mr^2)\frac{\ddot{x}}{r} &= -R_x r \end{aligned}$$

Es decir,

$$R_x = -m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad R_x = -\frac{1}{2}mg \operatorname{sen} \alpha$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}g \operatorname{sen} \alpha. \quad \square$$

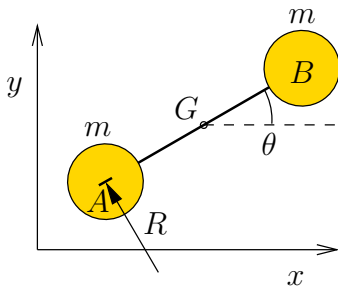


Figura 7.12: Sistema de dos partículas A y B, unidas rígidamente, con cuchillo en el apoyo de A que materializa un enlace anholónomo.

EJEMPLO 7.13: Para el sistema descrito anteriormente en el ejemplo 7.3, Suponiendo que la masa de cada partícula vale  $m$ , obtener las ecuaciones del movimiento, y demostrar que el multiplicador de Lagrange representa la fuerza transversal de restricción en ese punto.

*Solución.* La ecuación de ligadura anholónoma (7.3) era

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta - \frac{l}{2} \dot{\theta} = 0. \quad (7.84)$$

Los coeficientes son

$$A_x = -\sin \theta; \quad A_y = \cos \theta; \quad A_\theta = -\frac{l}{2}.$$

La lagrangiana, correspondiente en este caso únicamente a la energía cinética, vale

$$L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4}ml^2\dot{\theta}^2.$$

Las ecuaciones de Lagrange, empleando un multiplicador  $\lambda$  para la restricción, resultan

$$2m\ddot{x} = -\lambda \sin \theta; \quad (7.85)$$

$$2m\ddot{y} = \lambda \cos \theta; \quad (7.86)$$

$$\frac{1}{2}ml^2\ddot{\theta} = -\lambda \frac{l}{2}. \quad (7.87)$$

Estas tres ecuaciones, junto con la de la restricción (7.84), sirven para resolver las cuatro incógnitas  $(x, y, \theta, \lambda)$ . Es posible eliminar el multiplicador  $\lambda$ , cuyo valor a partir de (7.87) vale  $\lambda = -ml\ddot{\theta}$ , en las otras dos ecuaciones:

$$2\ddot{x} = l\ddot{\theta} \sin \theta; \quad (7.88)$$

$$2\ddot{y} = -l\ddot{\theta} \cos \theta; \quad (7.89)$$

de esta forma, el problema queda planteado mediante estas dos ecuaciones, junto con la restricción (7.84), para las incógnitas  $(x, y, \theta)$ .

Las ecuaciones de Newton/Euler correspondientes al balance de cantidad de movimiento y momento cinético en  $G$ , función de la reacción  $R$  normal a la cuchilla, resultan:

$$2m\ddot{x} = -R \operatorname{sen} \theta; \quad (7.90)$$

$$2m\ddot{y} = R \operatorname{cos} \theta; \quad (7.91)$$

$$\frac{1}{2}ml^2\ddot{\theta} = -R\frac{l}{2}. \quad (7.92)$$

Se aprecia inmediatamente que coinciden exactamente con las ecuaciones (7.85-7.87) con  $\lambda = R$ . □

## 7.5. Introducción al cálculo de variaciones

### 7.5.1. Los principios variacionales

Los principios de Newton-Euler (apartado 6.2) dan como resultado ecuaciones diferenciales, es decir, relaciones entre funciones del movimiento y sus derivadas en un instante dado. Según vimos, el principio de los trabajos virtuales y el de D'Alembert globalizan el planteamiento de las ecuaciones para sistemas de varias partículas, definiendo una condición que se ha de verificar para todo el sistema (la nulidad del trabajo virtual para conjuntos arbitrarios de desplazamientos virtuales). El principio de D'Alembert permite formular, para sistemas de  $N$  partículas sujetos a enlaces, un conjunto de ecuaciones diferenciales por lo general mucho más reducido que las que se obtendrían de aplicar directamente los principios Newtonianos a cada una de las  $N$  partículas.

En cualquier caso, los procedimientos arriba comentados se basan en el planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, que se han de cumplir para cada instante de tiempo. Al basarse en relaciones que se han de verificar para cada «punto» de tiempo, a esta formulación cabría llamarla «puntual» o «local».

Una alternativa a la formulación local de la dinámica es la ofrecida por los *principios variacionales*. Éstos se basan en establecer una propiedad global del movimiento a lo largo de todo un periodo de tiempo. En lugar de originar un sistema de ecuaciones diferenciales para cada instante, plantean una característica global del movimiento, es decir, una medida integral que lo caracteriza desde el instante inicial hasta el final.



El empleo de principios variacionales en la física proviene históricamente del campo de la óptica. El llamado principio de Fermat (1608-1665) permitió establecer las leyes básicas de la óptica de manera muy elegante. Establece este principio que la luz va de un punto a otro por el camino por el que tarda menos tiempo, incluso si sufre reflexiones y refracciones. De este principio se obtienen otras propiedades fundamentales como la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión en un espejo, o la ley de Snell de la refracción. Todo se deduce de una condición de extremo (mínimo) para una magnitud dada: el tiempo recorrido por el rayo de luz en su trayectoria.

En la mecánica, se plantea el problema de si es posible definir un funcional, en relación con la trayectoria dinámica de un sistema, que juegue un papel análogo al principio de Fermat. Así, la trayectoria real que seguiría el sistema, para unas condiciones iniciales determinadas, ocasionaría un extremo de este funcional.

Este funcional existe de hecho, como veremos en el apartado 7.6; se trata de la integral a lo largo del tiempo de la función Lagrangiana  $L$ , denominada *acción Hamiltoniana*. En el apartado mencionado desarrollaremos el principio, verificando su equivalencia con las formulaciones dinámicas ya conocidas.

Este principio de extremo o variacional tiene una gran potencia: puede ser generalizado a la mecánica de medios continuos (sistemas con infinitos grados de libertad), a sistemas cuánticos o relativistas. Por lo tanto, merece la pena detenerse, antes de presentar el principio de Hamilton, en la justificación y aplicación general de este planteamiento variacional nuevo.

### 7.5.2. El problema fundamental del cálculo de variaciones

El planteamiento del problema consiste en encontrar una función  $y(x)$ , de variable real  $x$ , de forma que un funcional determinado  $I[y]$  de esta función sea extremal. Sea el funcional con la estructura general siguiente,

$$I[y] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx, \quad \text{con } y'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dy}{dx}, \quad (7.93)$$

donde  $f$  es una función dada de las variables  $(y, y', x)$ , a la que supondremos los requisitos de continuidad y diferenciabilidad necesarios, y  $(x_1, x_2)$  los dos puntos extremos, dentro de los que interesa el estudio de  $y(x)$ . El problema es determinar las funciones  $y(x)$ , que toman valores dados en los extremos  $y_1 = y(x_1)$  e  $y_2 = y(x_2)$ , y que hacen del valor del funcional  $I[y]$  extremal, es decir, un máximo o un mínimo.

Para ello, estudiaremos la variación del funcional, que llamaremos  $\delta I$ , para variaciones arbitrarias de  $y(x)$  que cumplan las condiciones de borde dadas. Esta variación debe ser nula, como expresión de la condición de extremal. Como primer paso, investigamos la familia uniparamétrica de funciones variadas

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x), \quad (7.94)$$

siendo  $\alpha \in \mathbb{R}$  un parámetro continuo y  $\eta(x)$  una función real dada arbitraria, a la que únicamente exigiremos que tenga condiciones de borde homogéneas, es decir  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ . Es decir, «enmarcamos» la solución buscada  $y(x)$  dentro de un conjunto de curvas de comparación  $y(x, \alpha)$  que cumplan todas ellas las mismas condiciones de borde que  $y(x)$ .

De esta manera el valor del funcional depende de  $\alpha$ :

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x) dx.$$

La primera variación de este funcional<sup>8</sup> para una variación arbitraria  $\delta\alpha$  es

$$\delta I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dI}{d\alpha} \delta\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right\} \delta\alpha dx. \quad (7.95)$$

Claramente,

$$\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right);$$

por lo que integrando por partes el segundo sumando en (7.95),

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial \alpha}}_{=0} \Big|_{x_1}^{x_2}.$$

El segundo sumando en la expresión anterior (términos de contorno) no contribuye, puesto que según (7.94) es  $\partial y / \partial \alpha = \eta(x)$ , que desaparece en  $x_1$  y  $x_2$ . Así,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} \delta\alpha dx = 0. \quad (7.96)$$

En esta expresión  $(\partial y / \partial \alpha) \delta\alpha = \eta(x) \delta\alpha$  se pueden interpretar como variaciones de la curva  $y(x)$ . Estas variaciones, que llamaremos  $\delta y(x)$ , son arbitrarias, puesto que  $\eta(x)$  es una función cualquiera con la única salvedad

<sup>8</sup>Es decir, la variación suponiendo  $\delta\alpha$  infinitesimal y despreciando los términos del desarrollo en serie de orden 2 o superior,  $\mathcal{O}(\delta\alpha^2)$ .

de las condiciones de borde homogéneas. En la ecuación anterior, el término entre corchetes, en consonancia con la denominación establecida en (7.28), se denomina «derivada variacional»:

$$\frac{\delta f}{\delta y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right). \quad (7.97)$$

Puesto que  $\delta I = 0$  para variaciones arbitrarias  $\delta y$ , el teorema fundamental del cálculo de variaciones establece que la derivada variacional en (7.96) se debe anular en todos los puntos del intervalo:

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0, \quad \forall x \in ]x_1, x_2[ \quad (7.98)$$

Esta expresión se denomina la *ecuación de Euler del cálculo variacional*.

Es posible observar la similitud de la ecuación de Euler con las ecuaciones de Lagrange de la dinámica (7.14), sin más que sustituir  $f(y, y', x)$  por  $L(q, \dot{q}, t)$ , en un hipotético sistema de un grado de libertad. Este resultado será el punto de partida para el principio variacional de Hamilton (apartado 7.6).

**EJEMPLO 7.14:** Obtener la curva a lo largo de la cual una partícula, sometida al campo gravitatorio, realiza el descenso entre dos puntos dados en un tiempo mínimo (*problema de la «braquistócrona»*).

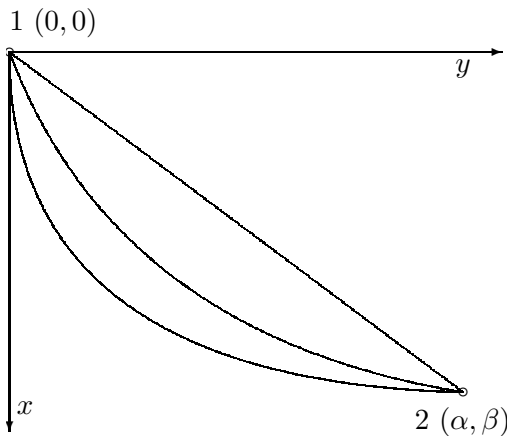


Figura 7.13: Una partícula sometida a su propio peso debe descender del punto 1 al 2 en la trayectoria por la que tarde un tiempo mínimo (denominada braquistócrona).

*Solución.* Tomando como punto de partida el  $1 \equiv (0,0)$  y de llegada el  $2 \equiv (\alpha, \beta)$ , se plantea obtener la curva  $y(x)$  tal que la duración

$$T = \int_1^2 \frac{ds}{v}$$

sea mínima. En la expresión anterior  $ds$  es el elemento diferencial de arco, y  $v$  la velocidad:

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad \text{siendo } y' = dy/dx,$$

$$v = \sqrt{2gx},$$

suponiendo  $v = 0$  en el punto 1. Así,

$$T = \int_1^2 \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gx}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_1^2 \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{x}} dx$$

Planteado de esta forma, el problema es formalmente idéntico al expresado en (7.93), siendo  $f = \sqrt{[1 + (y')^2]/x}$ , por lo que se podrá aplicar la ecuación de Euler (7.98):

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

En este caso,  $\partial f / \partial y = 0$ , luego la ecuación anterior se reduce a la integral primera

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C \quad (\text{cte.})$$

Particularizando:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{x[1 + (y')^2]}} = C \quad \Rightarrow \quad y' = \sqrt{\frac{x}{\frac{1}{C^2} - x}}.$$

Para facilitar la integración de  $y'$ , realizamos el cambio de variable y de constante siguiente:

$$\frac{1}{C^2} = 2r; \quad x = r(1 - \cos \varphi);$$

resultando

$$\frac{dy}{d\varphi} = y' \frac{dx}{d\varphi} = \sqrt{\frac{x}{2r - x}} r \operatorname{sen} \varphi = r(1 - \cos \varphi).$$

Esta expresión se integra directamente, teniendo en cuenta las condiciones iniciales ( $y_1 = 0, \varphi_1 = 0$ ), obteniéndose

$$y = r(\varphi - \operatorname{sen} \varphi).$$

Por lo tanto, la ecuación paramétrica de la curva buscada es

$$\begin{cases} x = r(1 - \cos \varphi), \\ y = r(\varphi - \operatorname{sen} \varphi), \end{cases}$$

que corresponde a una *cicloide*<sup>9</sup>, con cúspide en  $1 \equiv (0, 0)$ . El parámetro  $r$  de la misma se hallaría obligando a que el punto  $2 \equiv (\alpha, \beta)$  pertenezca a la curva:

$$\begin{aligned} \alpha &= r(1 - \cos \varphi); \\ \beta &= r(\varphi - \operatorname{sen} \varphi). \end{aligned}$$

Este constituye un sistema de ecuaciones no lineal para las incógnitas  $(r, \varphi)$ , que se resolvería por métodos numéricos iterativos.  $\square$

## 7.6. El principio de Hamilton

Sea un sistema conservativo y holónomo con  $n$  grados de libertad, en el que se ha definido una función Lagrangiana  $(L)$ . El principio de Hamilton establece que:

*«entre dos instantes  $t_1$  y  $t_2$ , caracterizados por las configuraciones respectivas  $\{q_i^{(1)}\}$  y  $\{q_i^{(2)}\}$ , el sistema evoluciona de forma que la integral*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (7.99)$$

*adopta un valor estacionario (es decir, extremal) para la trayectoria real del sistema.»*

Esta estacionariedad se refleja en un mínimo de  $S$ , denominada *acción Hamiltoniana*. Al principio de Hamilton también se le llama principio de la mínima acción<sup>10</sup>.

<sup>9</sup>La cicloide es la curva que traza un punto del perímetro de una circunferencia cuando ésta rueda sin deslizar sobre una recta.

<sup>10</sup>Existe otro principio también llamado de la mínima acción, formulado históricamente antes que el de Hamilton, debido a Maupertuis (1744), y clarificado posteriormente por Euler. En éste, se define la acción como  $\int_{t_1}^{t_2} 2T dt$ , siendo  $T$  la energía cinética, y la propiedad de mínimo se verifica para variaciones en las trayectorias del sistema que mantengan constante la integral de Jacobi  $h$  (7.43). Una exposición concisa de este último principio puede encontrarse en J.B. Griffiths: *The Theory of Classical Dynamics*, Cambridge U.P., 1985. La mayor generalidad de las variaciones posibles en el principio de Hamilton lo hacen preferible desde un punto de vista práctico, aunque si se quiere evitar confusiones conviene diferenciar ambos enunciados, precisando «mínima acción Hamiltoniana» o «mínima acción Maupertuisiana.»

El principio de Hamilton se puede considerar como un postulado básico, siendo posible deducir a partir de él toda la dinámica, de forma alternativa a las leyes de Newton o al principio de los trabajos virtuales. De hecho, se trata del planteamiento más «elegante»: constituye una única expresión, con un enunciado preciso, y permite definir la evolución dinámica global a lo largo del tiempo por contraposición a la descripción local instantánea a instante.

En lo que sigue, comprobaremos la equivalencia del principio de Hamilton con las ecuaciones de Lagrange, que anteriormente se habían deducido a partir del principio de D'Alembert.

### 7.6.1. Las ecuaciones de lagrange a partir del principio de Hamilton

Suponemos que la trayectoria real que sigue el sistema es  $\{q_i(t)\}$ . Tomamos una familia de variaciones  $\{\delta q_i\}$  a tiempo constante, de la forma:

$$\delta q_i(t) = a_i(t)\delta\alpha,$$

donde  $\delta\alpha \in \mathbb{R}$  es una variación arbitraria, y  $a_i(t)$  son funciones dadas del tiempo, arbitrarias salvo por la restricción de tener condiciones de borde homogéneas  $a_i(t_1) = a_i(t_2) = 0$ . De esta forma, todos los caminos variados  $q_i(t) + \delta q_i(t)$  tienen el mismo origen y final. Expresando la condición de extremal de la acción Hamiltoniana  $S$  al variar  $\alpha$ , y teniendo en cuenta que las variaciones no afectan a los límites de la integral,

$$\delta S = \frac{dS}{d\alpha}\delta\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} a_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{a}_i \right) \delta\alpha dt.$$

En esta expresión, así como en el resto de este apartado 7.6 se sobreentiende el convenio de sumación de índices repetidos, salvo en el caso en que estos índices afecten a vectores. Integrando por partes el segundo sumando dentro del paréntesis resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{a}_i dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} a_i}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) a_i dt$$

El término de contorno desaparece, puesto que  $dL/d\alpha = a_i(t)$ , que se anula en  $t_1$  y  $t_2$ . Así, se llega a

$$\delta S = \delta\alpha \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] a_i(t) dt = 0.$$

Considerando que  $a_i(t)$  son funciones independientes para cada coordenada  $i$  (recordemos que se hizo la hipótesis de que el sistema era holónomo por lo que esto siempre será posible), con valor arbitrario salvo la condición de borde homogénea, la expresión anterior obliga a

$$-\frac{\delta L}{\delta q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1 \dots, n; \quad t \in ]t_1, t_2[. \quad (7.100)$$

Estas relaciones son precisamente las ecuaciones de Lagrange deducidas anteriormente (7.14), y constituyen para este caso las ecuaciones de Euler correspondientes al principio variacional (7.99). Por este motivo, se denominan también *ecuaciones de Euler-Lagrange*.

Hemos comprobado que del principio de Hamilton se deducen las ecuaciones de Lagrange. Recíprocamente, es inmediato comprobar que si se cumplen las ecuaciones de Lagrange, se sigue la estacionariedad de (7.99). Por tanto, queda demostrada la equivalencia.

El principio de Hamilton explica con gran claridad algunas propiedades que habíamos demostrado anteriormente, como la invariancia de las ecuaciones de Lagrange respecto a transformaciones «de galga» (7.26). En efecto, al sumar a  $L$  el término  $\frac{d}{dt}F(q_i, t)$ , el efecto sobre la acción  $S$  en (7.99) es

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(q_i, t) dt = F(q_i^{(2)}, t_2) - F(q_i^{(1)}, t_1) = \text{cte.} \quad (7.101)$$

El añadir una constante no altera la estacionariedad de  $S$ , por lo que queda comprobada la «neutralidad» dinámica de este tipo de transformaciones.

### 7.6.2. Generalización del principio de Hamilton

Es posible obtener una generalización del principio de Hamilton, para considerar fuerzas no conservativas o sistemas anholónomos, que no puedan definirse mediante coordenadas libres.

Supongamos un sistema definido con coordenadas  $\{q_j\}$  no libres, en el que existen fuerzas generalizadas  $Q_j$ , posiblemente no conservativas. Además, las coordenadas están sujetas a  $k$  ecuaciones de ligadura,

$$\Phi_i(q_j, \dot{q}_j, t) = 0, \quad i = 1, \dots, k$$

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}}_{A_{ij}} \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}}_{C_i} = 0$$

o en función de desplazamientos virtuales

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \delta q_j = 0. \quad (7.102)$$

Las ecuaciones de la dinámica serían

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} \right] \delta q_j = 0, \quad \forall \{\delta q_j\}_{\text{comp.}}$$

Tomaremos variaciones  $\{\delta q_i\}$  compatibles con los enlaces, a tiempo constante ( $\delta t = 0$ ), de forma que cumplan la condición de contorno  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ . El principio generalizado afirma que se ha de verificar

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta T + \sum_{j=1}^N \left( Q_j + \sum_{i=1}^k \lambda_i A_{ij} \right) \delta q_j \right] dt = 0 \quad \forall \{\delta q_j\}_{\text{comp.}} \quad (7.103)$$

Empleando la ecuación (7.102), al tratarse de desplazamientos compatibles, en la expresión anterior se anulan los términos de los multiplicadores, quedando

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta T + \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \right] dt = 0 \quad \forall \{\delta q_j\}_{\text{comp.}} \quad (7.104)$$

En el caso en que las fuerzas provengan de un potencial, es inmediata la equivalencia de esta expresión del principio generalizado con el principio de Hamilton expresado en (7.99):

$$\delta T + \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = \delta T - \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j}_{\delta V} = \delta L.$$

En un caso general, la justificación del principio generalizado se realiza como sigue. La variación de la energía cinética se puede desarrollar como

$$\delta T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i;$$

con la definición realizada de las variaciones, se verifica

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i;$$



siguiendo ahora un procedimiento similar al expuesto en el apartado 7.6.1, la integral respecto del tiempo del primer sumando se realiza por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt.$$

Sustituyendo estas expresiones en (7.103) resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i dt = 0.$$

Puesto que esta relación se verifica para  $\delta q_i(t)$  de evolución arbitraria en el tiempo (con la única restricción de las condiciones de borde homogéneas), el integrando ha de anularse:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0;$$

expresión que concuerda con la ecuación fundamental de la dinámica o principio de D'Alembert en coordenadas generalizadas (7.11). A su vez, si  $\{q_i\}$  es un sistema libre,  $\{\delta q_i\}$  se pueden escoger de forma independiente entre ellas, por lo que se obtienen finalmente las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.12):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i.$$

## 7.7. La dinámica a partir del principio de Hamilton

Como ya se ha mencionado, el principio de Hamilton puede servir de sustento a todo el desarrollo de la dinámica, admitiendo como postulados adicionales únicamente las propiedades del espacio y del tiempo y el principio de relatividad de Galileo, expuestos en el capítulo 1 (apartados 1.2 y 1.3).

Este planteamiento es el seguido por algunos textos de mecánica clásica teórica, resultando interesante por la elegancia formal de su desarrollo, así como por la fundamentación sólida de las leyes de conservación de la mecánica.

Expondremos aquí de manera resumida tan sólo algunos resultados básicos y su relación con las leyes y teoremas de conservación conocidos de

la dinámica. El enfoque seguido es similar al propuesto por Landau<sup>11</sup>, cuya obra se recomienda al lector que desee profundizar en este tema.

### 7.7.1. Estructura de la función Lagrangiana

**Lagrangiana de una partícula aislada.**— Para empezar consideremos el problema mecánico más simple, consistente en una partícula aislada. La función Lagrangiana  $L$  correspondiente, por la homogeneidad del tiempo, no debe depender de  $t$ ; por la homogeneidad del espacio, no podrá depender de la posición  $\mathbf{r}$ , y por la isotropía del espacio tampoco se verá influida por la dirección de la velocidad  $\mathbf{v}$ . Por lo tanto, será una función únicamente del módulo de la velocidad,  $L(v^2)$ .

Imponemos ahora la invariancia de las leyes dinámicas con respecto a una transformación de Galileo. Para ello estudiemos una traslación con velocidad uniforme  $\mathbf{w}$ , por la cual la velocidad pasa a ser  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ . La Lagrangiana en este nuevo sistema,  $L(v'^2)$ , para ser equivalente a  $L(v^2)$  debe diferir de ella en una derivada temporal total de una función de coordenadas y tiempo (7.101). Esta condición se verifica únicamente por una función de la forma

$$L = kv^2.$$

En efecto, se puede comprobar que al hacer la transformación  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}$ , se obtiene

$$L(v^2) = k(\mathbf{v}' + \mathbf{w})^2 = kv'^2 + 2k\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w} + kw^2,$$

lo que se puede poner como

$$L(v^2) = L(v'^2) + \frac{d}{dt} \underbrace{(2k\mathbf{r}' \cdot \mathbf{w} + kw^2t)}_{F(\mathbf{r}', t)},$$

relación que prueba la equivalencia.

La *masa* de la partícula se define en función de la constante  $k$  de su Lagrangiana, como  $m \stackrel{\text{def}}{=} 2k$ ; de esta forma, la Lagrangiana del punto material aislado resulta finalmente

$$L = \frac{1}{2}mv^2.$$

Es inmediato comprobar que la masa así definida no puede ser negativa. Si así lo fuese, la acción  $S$  correspondiente a un trayecto entre dos puntos

---

<sup>11</sup>L. Landau y E. Lifshitz: *Curso Abreviado de Física Teórica; 1-Mecánica y Electrodinámica*, ed. Mir, 1971.

dados 1 y 2,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m v^2 dt,$$

no tendría un mínimo; basta para ello considerar distintos movimientos, en que la partícula parte de 1, primero se aleja rápidamente de 2, para después acercarse a él. Cuanto más rápido sea este movimiento, menor (más negativa) sería la acción. En este caso no existiría un extremal, contradiciendo al principio de Hamilton.

**Lagrangiana de la unión de dos sistemas aislados.**— Se consideran ahora dos sistemas aislados  $A$  y  $B$ , con lagrangianas respectivas  $L_A$  y  $L_B$ , que no ejercen ninguna interacción entre sí. La Lagrangiana del sistema conjunto es

$$L_{A+B} = L_A + L_B.$$

En efecto, supongamos que el sistema  $A$  posee unas coordenadas libres  $\{q_i, i = 1, \dots, p\}$ , mientras que el  $B$  posee otras  $\{q_j, j = p + 1, \dots, n\}$ . Así, la suma de las Lagrangianas es

$$L(q_i, q_j, \dot{q}_i, \dot{q}_j, t) = L_A(q_i, \dot{q}_i, t) + L_B(q_j, \dot{q}_j, t).$$

Puesto que ambas partes del nuevo sistema conjunto no tienen ninguna interacción, debemos obtener las mismas ecuaciones de Lagrange con la Lagrangiana conjunta para  $q_i$  que si tomásemos tan sólo  $L_A$ . En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{A+B}}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_A}{\partial \dot{q}_i} \right); \\ \frac{\partial L_{A+B}}{\partial q_i} &= \frac{\partial L_A}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Si se tienen dos partículas  $a$  y  $b$  que no interaccionan entre sí, la Lagrangiana del sistema conjunto es

$$L = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_b v_b^2}{2}.$$

Si las dos partículas se mueven a la misma velocidad  $v_a = v_b$ , se puede considerar la masa conjunta como  $m_{a+b} \stackrel{\text{def}}{=} m_a + m_b$ , lo que justifica la propiedad de aditividad de la masa.

**Función de interacción.**— Si las partículas interactúan entre sí, postularemos que la Lagrangiana conjunta diferirá de la correspondiente a las partículas aisladas en una función de interacción  $V(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$  que dependa únicamente de las coordenadas de cada partícula<sup>12</sup>:

$$L = \sum_{i=a,b} \frac{m_i v_i^2}{2} - V(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b). \quad (7.105)$$

Supondremos por otra parte que las dos partículas  $a$  y  $b$  están aisladas respecto del resto del universo, constituyendo un sistema cerrado. En este caso, por la homogeneidad del tiempo,  $L$  no podrá depender de  $t$ :  $\partial L / \partial t = 0$ , por lo que la función  $V$  tampoco puede depender de  $t$ .

**Lagrangiana de un sistema de  $N$  partículas** El razonamiento anterior se puede extender a un sistema cerrado (es decir, aislado) de  $N$  partículas, descritas por sus posiciones vectoriales  $\mathbf{r}_i$ . La suma  $T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$  se denomina *energía cinética* del sistema, y  $V(\mathbf{r}_i)$  se denomina *energía potencial*. La expresión de la Lagrangiana es

$$L = T - V = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - V(\mathbf{r}_i). \quad (7.106)$$

En función de esta Lagrangiana y del principio de Hamilton, siguiendo un desarrollo similar al expuesto en el apartado 7.6.1, y escogiendo como coordenadas generalizadas las coordenadas vectoriales  $\mathbf{r}_i$ , se obtiene la expresión:

$$\sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \forall \{ \delta \mathbf{r}_i \} \text{ compatibles.} \quad (7.107)$$

Nótese que en la expresión anterior, en general no será posible eliminar los desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{r}_i$  y garantizar la nulidad de los términos entre corchetes. En general  $\delta \mathbf{r}_i$  no serán libres salvo que garanticemos que no existan enlaces internos de ningún tipo.

<sup>12</sup>Conviene notar que esta hipótesis implica que si se produce una variación de las coordenadas, su efecto se nota de manera instantánea a través de la función  $V$ , por lo que las interacciones se propagan con velocidad infinita, posibilidad que no admite la mecánica relativista.

### 7.7.2. Teoremas de conservación

En lo anterior se ha establecido la estructura de la función Lagrangiana (7.106) y su equivalencia con el principio de D'Alembert (7.107), a partir únicamente del principio de Hamilton y de las propiedades básicas del espacio y tiempo.

Se puede igualmente deducir los teoremas de conservación para sistemas aislados (apartado 6.3.5), empleando las propiedades básicas del espacio y tiempo de la mecánica clásica.

#### Conservación de la Energía.—

La *homogeneidad del tiempo* tiene como consecuencia la conservación de la energía en un sistema aislado.

*Demostración.* En efecto, si el sistema está aislado, hemos visto antes que la Lagrangiana no puede depender explícitamente del tiempo. La derivada temporal (total) de  $L(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$  se puede desarrollar como

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i$$

Empleando las ecuaciones (7.107) para un conjunto de desplazamientos virtuales que coincida con las velocidades reales del sistema (que obviamente cumplen la condición de compatibilidad con los enlaces) se obtiene

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i.$$

Sustituyendo en la expresión anterior queda

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right)$$

por lo que

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - L \right) = 0.$$

Es inmediato comprobar que la magnitud entre paréntesis en la ecuación anterior coincide con la suma de energía cinética y la potencial definidas en (7.106); a esta suma la llamaremos energía total del sistema, y al anularse su derivada temporal, la energía se mantendrá constante:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} T + V = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - L = \text{cte.} \quad \square$$

**Conservación de la Cantidad de Movimiento.—**

La *homogeneidad del espacio* da lugar a otro teorema de conservación. Debido a dicha homogeneidad, las propiedades mecánicas de un sistema aislado no deben variar si dicho sistema, en su conjunto, experimenta un desplazamiento paralelo (traslación) en el espacio.

*Demostración.* Sea un sistema aislado de  $N$  partículas, con coordenadas (vectoriales)  $\{\mathbf{r}_i, i = 1, \dots, N\}$ , y Lagrangiana  $L(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)$ . Se verifica  $\partial L/\partial t = 0$  debido a que el sistema es aislado, por el mismo razonamiento que se hizo anteriormente. Tomaremos por tanto una traslación arbitraria infinitesimal  $\boldsymbol{\epsilon}$ , e imponemos la invariancia de la Lagrangiana. Debido a la traslación, las posiciones de las partículas varían como  $\mathbf{r}_i \mapsto \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\epsilon}$ , mientras que las velocidades no cambian:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \overbrace{\delta \mathbf{r}_i}^{\boldsymbol{\epsilon}} = \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0,$$

y al ser  $\boldsymbol{\epsilon}$  arbitrario se deduce que  $\sum_i \partial L/\partial \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ .

En función de las ecuaciones (7.107) particularizadas para un desplazamiento virtual  $\boldsymbol{\epsilon}$  (que obviamente es compatible, por tratarse de una traslación uniforme de un sistema aislado que no puede tener vínculos externos), se verifica

$$\left[ \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) \right] \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \cdot \boldsymbol{\epsilon},$$

y al ser  $\boldsymbol{\epsilon}$  arbitrario, se llega a

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \mathbf{0}. \quad \square$$

De esta manera llegamos a la conclusión que la magnitud vectorial

$$\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i},$$

que se denomina *cantidad de movimiento* del sistema, se mantiene constante para un sistema cerrado.

**Conservación del momento cinético.—**

Debido a la *isotropía del espacio*, un sistema aislado sometido a un cambio de orientación no debería variar su comportamiento dinámico.

*Demostración.* Para ello, imaginemos que se efectúa un giro infinitesimal  $\delta\varphi$ . Las variaciones en posiciones y velocidades son respectivamente

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{r}_i &= \delta\varphi \wedge \mathbf{r}_i \\ \delta\dot{\mathbf{r}}_i &= \delta\varphi \wedge \dot{\mathbf{r}}_i\end{aligned}$$

Con estas variaciones de las velocidades, el módulo de la velocidad de cada partícula se conserva, por lo que la energía cinética  $T$  no varía. Por lo tanto la diferencia entre las Lagrangianas será únicamente función de las posiciones. Imponiendo la invariancia de la Lagrangiana,

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot (\delta\varphi \wedge \mathbf{r}_i) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot (\delta\varphi \wedge \dot{\mathbf{r}}_i) = 0.$$

Permutando el producto mixto en esta expresión,

$$\delta\varphi \cdot \sum_i \left[ \mathbf{r}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} + \dot{\mathbf{r}}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right] = 0$$

y teniendo en cuenta que  $\delta\varphi$  es arbitrario,

$$\sum_i \left[ \mathbf{r}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} + \dot{\mathbf{r}}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right] = \mathbf{0}. \quad (7.108)$$

Expresamos ahora las ecuaciones (7.107), particularizadas para desplazamientos virtuales  $\delta\mathbf{r}_i = \delta\varphi \wedge \mathbf{r}_i$  (compatibles siempre en un sistema aislado libre de enlaces externos, ya que representan una rotación rígida infinitesimal):

$$\sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right] \cdot (\delta\varphi \wedge \mathbf{r}_i) = 0$$

y permutando el producto mixto,

$$\delta\varphi \cdot \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right] = 0$$

y al ser  $\delta\varphi$  arbitrario,

$$\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{0}$$

empleando la ecuación (7.108) esta expresión queda convertida finalmente en

$$\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \frac{d}{dt} \underbrace{\left[ \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right]}_{\mathbf{H}_O} = \mathbf{0}.$$

Es decir, se conserva el *momento cinético*, definido como la suma de los momentos de las cantidades de movimiento:  $\mathbf{H}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i$ , siendo  $\mathbf{p}_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}_i$  la cantidad de movimiento de cada partícula.  $\square$

## 7.8. Problemas propuestos.

**Problema 7.1.** En un triángulo rectángulo isósceles de masa  $m$ , que puede deslizar sin rozamiento dentro de un plano vertical sobre una recta horizontal, apoyándose sobre un cateto, se coloca un disco homogéneo, de radio  $r$  y masa  $2m$ , que puede caer rodando sin deslizar por la hipotenusa del triángulo, desde el punto más alto de ésta. Se pide:

- Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento, discutiendo la existencia de integrales primeras.
- Obtener la reacción del triángulo sobre el disco para un instante genérico, en que el disco aún no haya llegado a tocar la base.

(Examen final, 16/9/1994)

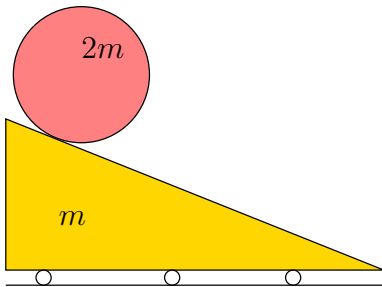


Figura 7.14: *Problema 7.1*

**Problema 7.2.** Un sistema formado por dos masas de valor  $m$  unidas por una varilla rígida sin masa de longitud  $l$  se mueve sobre un plano horizontal. Cada masa está apoyada sobre el plano mediante un pequeño cuchillo que impide totalmente el desplazamiento en dirección de la varilla, quedando libre el movimiento en dirección normal. El sistema tiene un movimiento impuesto de rotación con velocidad angular  $\omega$  constante, teniendo su centro



en el instante inicial una velocidad  $v_0$  según una determinada dirección. Se pide:

- empleando las coordenadas cartesianas de cada partícula, expresar las ecuaciones de los enlaces y determinar el n.º de g.d.l.;
- escoger coordenadas generalizadas que eliminen los enlaces holónomos y en función de ellas obtener las ecuaciones de Lagrange de la dinámica;
- integrar completamente dichas ecuaciones y obtener de forma explícita la trayectoria del sistema;
- calcular de forma explícita la reacción de enlace en los cuchillos.

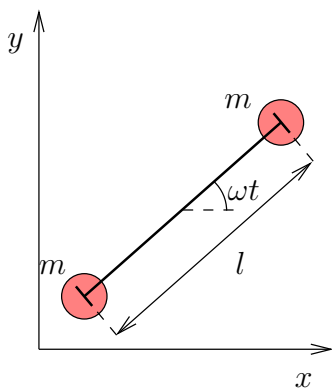


Figura 7.15: *Problema 7.2*

**Problema 7.3.** Un disco de masa  $M$  y radio  $R$  puede girar libremente alrededor de su eje de revolución vertical  $Oz$ . En el disco existe una acañaladura radial lisa por la que desliza una rótula cilíndrica  $A$ , que a su vez es el punto de suspensión de un péndulo simple de longitud  $l$  y masa  $m$ . La rótula  $A$  actúa obligando al péndulo a moverse en el plano vertical que contiene a la ranura  $OA$ . Se pide:

- Obtener las ecuaciones del movimiento de la masa puntual, utilizando métodos de la dinámica analítica.
- Expresar las posibles integrales primeras del movimiento del sistema e interpretarlas físicamente.

**Problema 7.4.** Una partícula pesada de masa  $m$  se mueve unida mediante una varilla  $AB$  rígida, sin masa y de longitud  $l$ , a una rótula  $A$  de masa despreciable. A su vez, esta rótula  $A$  está obligada a permanecer en todo momento sobre una circunferencia horizontal fija de radio  $R$ . La rótula  $A$  actúa obligando a que la varilla se mueva contenida el plano vertical tangente por  $A$  a la circunferencia. Se pide:

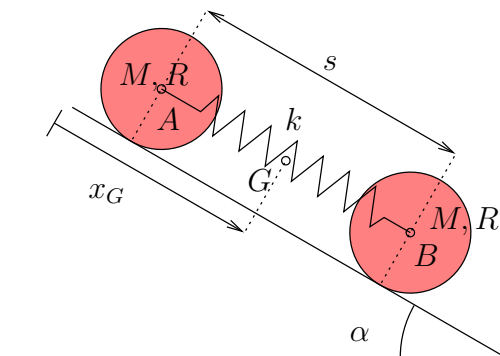


Figura 7.16: Problema 7.3

- Obtener las ecuaciones del movimiento mediante los métodos de la mecánica analítica.
  - Expresar las posibles integrales primeras del movimiento, e interpretarlas físicamente.
  - En el caso de que  $A$  se mueva con velocidad de módulo constante  $|\mathbf{v}_A| = \omega R$ , expresar el potencial de la fuerza de arrastre correspondiente a un sistema de referencia móvil con origen en  $A$ , con el eje  $z$  vertical y cuyo plano  $yz$  contiene en todo momento a la varilla  $AB$ .
  - Para la situación del apartado 3, expresar posibles integrales primeras del movimiento e interpretarlas físicamente.
- (Véase problema propuesto 6.16, empleando métodos de Newton y Euler)

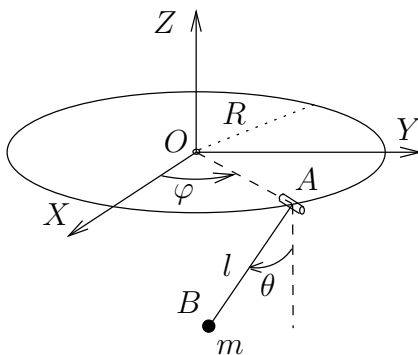


Figura 7.17: Problema 7.4

**Problema 7.5.** Un aro de masa  $M$  y radio  $R$  se mueve en todo momento en un plano vertical con un punto de su periferia  $O$  fijo. Ensartada en el aro se mueve una partícula de masa  $m$ . Por otra parte, la partícula está unida a uno de los extremos de un cable inextensible y sin masa, que pasa por

$O$  a través de una pequeña argolla. En el otro extremo del cable se aplica una fuerza  $F(t)$  dada. No existe rozamiento entre ninguna de las partes del sistema. Se pide:

- Calcular las fuerzas generalizadas asociadas a los grados de libertad indicados en la figura.
  - Calcular la energía cinética y potencial del sistema.
  - Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange.
  - Justificar razonadamente la existencia o no de integrales primeras del movimiento y su interpretación física.
  - Calcular la reacción del aro sobre la partícula en un instante genérico mediante la técnica de multiplicadores de Lagrange.
- (Véase problema propuesto 6.8, empleando métodos de Newton y Euler)

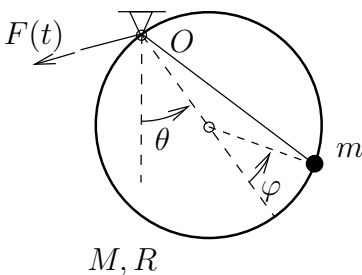


Figura 7.18: Problema 7.5

**Problema 7.6.** Un semiarco homogéneo de radio  $R$  gira con velocidad angular  $\omega$  constante alrededor del eje  $Z$  vertical, estando obligado a permanecer en todo momento en un plano vertical, tal y como se muestra en la figura adjunta. Una partícula pesada de masa  $m$  puede moverse sin rozamiento ensartada en el semiarco. En el instante inicial la partícula se encuentra situada en el punto  $B$  y se lanza con una velocidad  $v_0$  relativa al semiarco. Se pide:

- Ecuación del movimiento.
  - Velocidad  $v_0$  mínima necesaria para que la partícula alcance el punto  $A$ .
  - Reacción del aro sobre la partícula en un instante genérico para una  $v_0$  cualquiera.
- (Examen final, 27/6/1997)

**Problema 7.7.** Una varilla  $AB$  de masa  $m$  y longitud total  $l$  se mueve en un plano vertical de forma que el extremo  $A$  desliza sobre la vertical y el

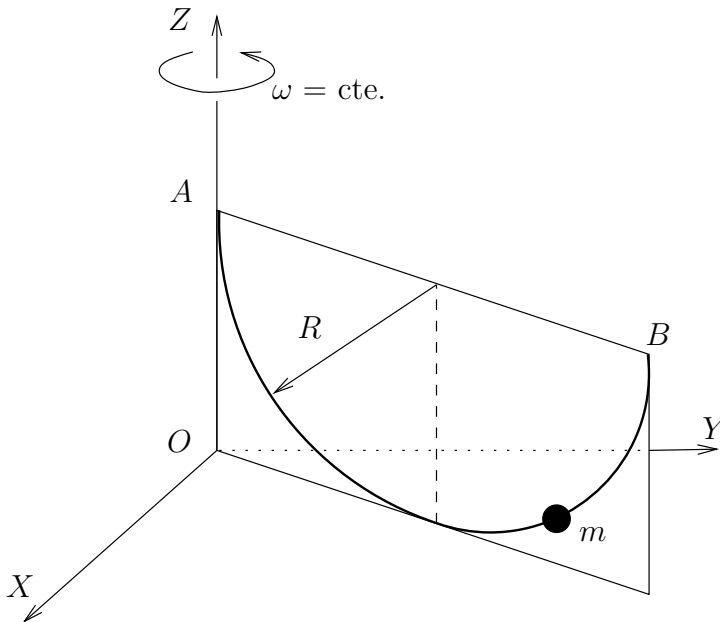


Figura 7.19:  
Problema  
7.6

extremo  $B$  desliza sobre una recta horizontal. Asimismo, una partícula  $P$  de masa  $m$  puede deslizar libremente sobre la varilla sin abandonarla (ver figura adjunta). No existe rozamiento entre ninguna de las partes móviles. En el instante inicial el sistema parte del reposo con  $\theta = 30^\circ$  y  $s = 0$ . Se pide, en función de  $s$ ,  $\theta$  y sus derivadas:

1. Expresión de la lagrangiana del sistema formado por la varilla y la partícula.
2. Ecuaciones de Lagrange.
3. Integrales primeras del movimiento.
4. Si  $\dot{\theta} = \omega$  (cte), calcular mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange la reacción de la varilla sobre la partícula en un instante genérico.

(Véase problema propuesto 6.11, empleando métodos de Newton y Euler)

**Problema 7.8.** El dispositivo de la figura consta de un aro de masa  $M$  y radio  $R$  con un diámetro obligado a permanecer vertical, alrededor del cual puede girar sin rozamiento. Una partícula de masa  $m$  se halla ensartada en el aro pudiendo deslizar libremente sobre él, sometida a su propio peso y sin

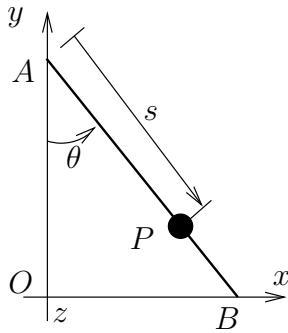


Figura 7.20: Problema 7.7

rozamiento. Se aplica al aro un momento  $N(t)$  respecto al diámetro vertical que hará girar al sistema alrededor de este eje. Se pide:

- Expresar la ecuación diferencial del movimiento, en función de la posición de la partícula sobre el aro ( $\phi$ ), la rotación del aro respecto a la vertical ( $\psi$ ) y sus derivadas;
- Expresar las posibles integrales primeras del movimiento en el caso de que el momento aplicado sea nulo ( $N(t) = 0$ );
- Calcular el momento  $N(t)$  necesario para que el aro se mueva con una velocidad angular constante  $\dot{\psi} = \omega$ ;
- Expresar posibles integrales primeras del movimiento para este último caso.

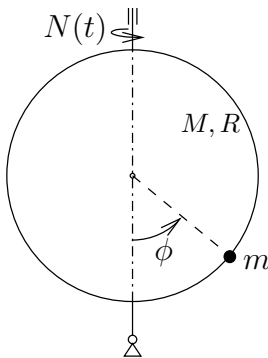


Figura 7.21: Problema 7.8

**Problema 7.9.** Un sistema está formado por dos partículas de masas  $M$  y  $m$ . La partícula  $M$  se encuentra unida a un punto fijo  $O$  a través de una varilla sin masa de longitud  $a$ . Además, esta partícula está sujeta mediante un resorte de constante  $k$  y longitud natural nula a una recta vertical fija ( $r$ ) que pasa por  $O$ . La partícula  $m$  se encuentra unida a la partícula  $M$

mediante otra varilla sin masa de longitud  $a$ . Todo el conjunto de partículas, varillas y muelle se mueve en todo momento contenido en un plano vertical que gira con velocidad angular  $\omega$  constante alrededor de la recta vertical  $r$ . Se pide:

- Deducir razonadamente el número de grados de libertad del sistema y seleccionar de forma justificada unas coordenadas generalizadas adecuadas.
- Expresar la función Lagrangiana del sistema en función de las coordenadas del problema.
- Ecuaciones diferenciales del movimiento.
- Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento y expresarlas en su caso.
- Expresión de la reacción ejercida sobre la partícula  $m$ .

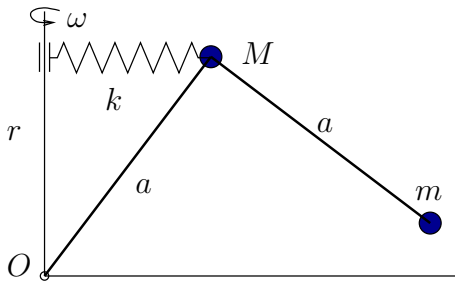


Figura 7.22: Problema 7.9

**Problema 7.10.** En un plano vertical fijo se mueven dos partículas iguales, de masa  $m$ , que se encuentran unidas entre sí por un resorte elástico de constante  $k$  y longitud natural  $b$ . Una de las partículas debe permanecer sobre una recta horizontal fija y lisa. Se abandona el sistema en reposo, estando las partículas a una distancia  $b$  y a la misma altura. Se pide:

- Empleando como coordenadas los parámetros  $(x, s, \theta)$  de la figura, discutir si se trata de parámetros independientes o si por el contrario se hallan sujetos a alguna ecuación de ligadura.
- Expresión de las fuerzas generalizadas correspondientes a estos parámetros.
- Expresión de la energía cinética del sistema.
- Expresión de su energía potencial.
- Ecuaciones de Lagrange.
- Caso de existir integrales primeras, escribirlas e interpretarlas.

- g. ¿Se modifican estas ecuaciones (las de los dos apartados anteriores), si la distancia inicial entre las partículas es inferior a  $b$ ?

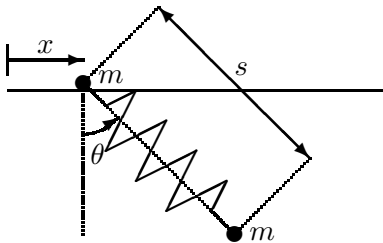


Figura 7.23: Problema 7.10

**Problema 7.11.** Un aro de masa  $m$  y radio  $R$  puede oscilar en un plano vertical en torno a un punto  $O$  de su perímetro que está fijo. A su vez, otro aro de masa  $m$  y radio  $r = R/3$  rueda sin deslizar dentro del primero. Obtener las ecuaciones de Lagrange de la dinámica del sistema. (Examen parcial, 9/6/1997)

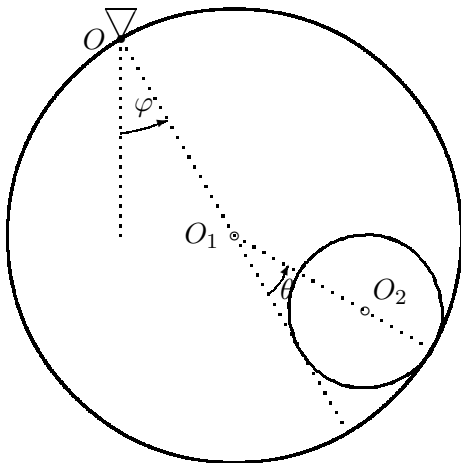


Figura 7.24: Problema 7.11

**Problema 7.12.** Dos masas puntuales (pesadas)  $m$  están unidas por una varilla rígida de longitud  $2a$  y masa despreciable, estando obligadas a moverse dentro de un plano vertical  $Ox'z$ , de forma que una desliza sobre un eje vertical  $Oz$  y la otra desliza sobre una recta horizontal  $Ox'$  del mismo, ambas sin rozamiento. A su vez el plano vertical  $Ox'z$  puede girar alrededor del eje  $Oz$ , no poseyendo otra masa que la correspondiente a las dos partículas antes citadas. Se pide:

- a. En la hipótesis de que el giro del plano alrededor de  $Oz$  es libre sin ninguna resistencia ni momento aplicado según este eje, obtener las ecuaciones diferenciales (de 2.º orden) del movimiento.

- b. Supuesto que se parte de unas condiciones iniciales dadas  $(\theta_0, \dot{\theta}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ , integrales primeras (ecuaciones diferenciales de 1<sup>er</sup> orden) que existan y su interpretación física.
- c. Calcular el valor del momento  $M$  que debe aplicarse según el eje  $Oz$  para obtener un movimiento de rotación uniforme ( $\dot{\varphi} = \omega$ ) del plano.
- (Examen parcial, 29/1/1997)

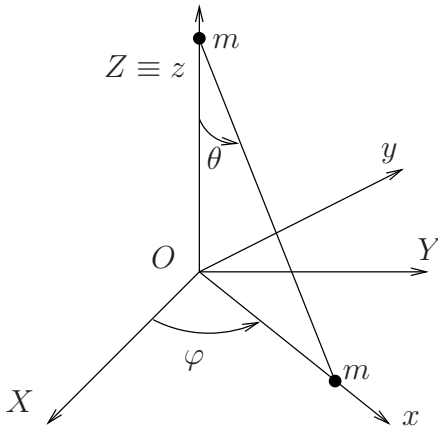


Figura 7.25: Problema 7.12

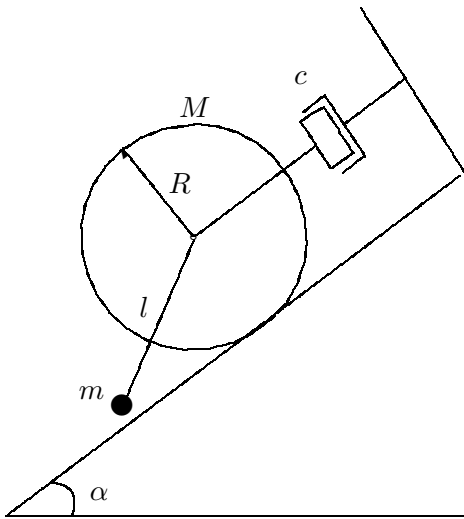
**Problema 7.13.** Un disco de masa  $M$  y radio  $R$  rueda sin deslizar sobre un plano inclinado un ángulo  $\alpha$  respecto de la horizontal. Del centro del disco cuelga un péndulo simple constituido por una varilla sin masa de longitud  $l$  con una masa puntual  $m$  en su extremo. El centro del disco está unido a un punto fijo mediante un amortiguador viscoso de constante  $c$  que se opone al movimiento con una fuerza proporcional a la velocidad (ver figura). Para considerar la resistencia del aire, se supone que sobre la masa puntual actúa una fuerza viscosa  $\mathbf{F} = -c\mathbf{v}$ , siendo  $\mathbf{v}$  la velocidad de dicha masa. Se pide:

- Expresión de las fuerzas generalizadas correspondientes a las fuerzas viscosas.
- Ecuaciones diferenciales del movimiento. Discutir la existencia de integrales primeras.

(Examen parcial, 9/2/1996)

**Problema 7.14.** Una placa semicircular homogénea, de masa  $m$  y radio  $r$ , puede girar libremente en su propio plano vertical  $\Pi$  alrededor del centro  $O$  de su borde diametral. A su vez el plano  $\Pi$  (que no tiene masa) puede girar libremente alrededor de un eje vertical que pasa por  $O$ . Se abandona la placa en reposo respecto de  $\Pi$ , con su borde diametral formando un ángulo



Figura 7.26: *Problema 7.13*

$\theta_0$  con la horizontal, mientras que  $\Pi$  tiene una velocidad angular  $\dot{\psi}(0) = \omega_0$ . Se pide:

- Expresión, en un instante genérico, del momento cinético respecto de  $O$  y de la energía cinética.
- Ecuaciones diferenciales del movimiento de la placa.
- describir el movimiento resultante, en concreto:
  - ley  $\dot{\psi}(t)$  de la velocidad angular del plano;
  - demostrar que el movimiento  $\theta(t)$  es pendular, obteniendo la longitud del péndulo simple equivalente.

(Examen final, 28/6/1996)

**Problema 7.15.** Dos partículas, de masas respectivas  $m$  y  $\lambda m$ , están unidas mediante un hilo inextensible de longitud  $2b$ . Este hilo pasa por un pequeño agujero existente en el vértice  $A$  de una superficie cónica  $S$  fija, lisa, de eje vertical y semiángulo  $\alpha$ . Mientras  $m$  permanece sobre la superficie  $S$  por debajo de  $A$  con ligadura unilateral lisa, la otra partícula  $\lambda m$  pende libremente, permaneciendo en el volumen interior determinado por  $S$ . Se pide:

- Suponiendo que el movimiento comienza con unas condiciones iniciales generales,
  - Escoger unos parámetros adecuados para estudiarlo y determinar el n.º de grados de libertad;
  - Obtener las integrales primeras que pudiera haber e interpretarlas físicamente;

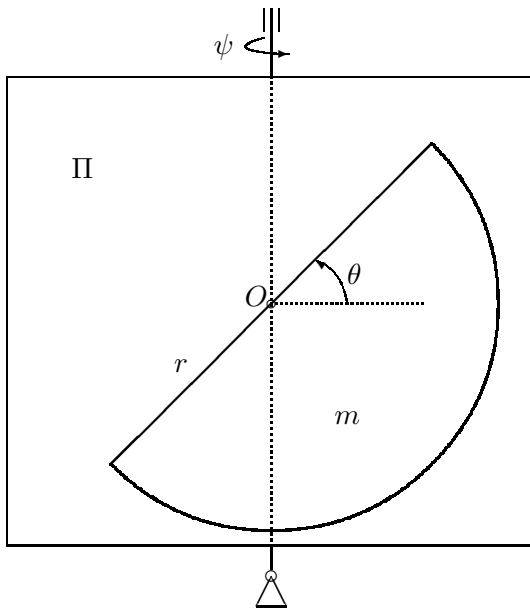


Figura 7.27: Problema 7.14

3. Obtener las ecuaciones diferenciales de segundo orden del movimiento.
    - b. Suponemos ahora que inicialmente  $\lambda m$  parte del reposo, a una distancia  $b$  en la vertical por debajo de  $A$ , y  $m$  tiene una velocidad  $v_0$  con el hilo tenso. Encontrar los valores entre los que debe estar comprendido  $\lambda$  así como el valor adecuado de  $v_0$  para que  $\lambda m$  permanezca en reposo y  $m$  no se separe de  $S$ .
- (Examen final, 31/1/2001)

**Problema 7.16.** Un disco pesado de masa  $M$  y radio  $R$  con centro en  $C$  está contenido en un plano vertical fijo y apoyado sobre la recta horizontal  $OB$ . A su vez, una varilla pesada de masa  $M$  y longitud  $4R$  tiene un extremo articulado en el punto fijo  $O$  y se apoya sobre el disco en  $A$ . El contacto del disco con la recta horizontal en  $B$  es perfectamente rugoso (rueda sin deslizar), mientras que el contacto con la varilla en  $A$  es perfectamente liso (desliza libremente). Se pide:

- a. Definir el número de grados de libertad del sistema y obtener las expresiones cinemáticas de la velocidad y aceleración del centro del disco  $C$ , así como de la velocidad y aceleración angular del disco, en función del ángulo  $\alpha$  y sus derivadas.
- b. Analizando ahora la dinámica del sistema, obtener las ecuaciones que definen el movimiento del disco, así como las reacciones en  $A$  y  $B$ ,

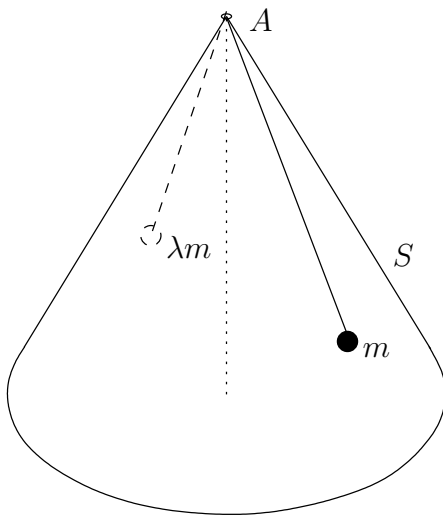


Figura 7.28: Problema 7.15

empleando los teoremas generales de Newton y Euler.  
(Examen final, 14/6/2001)

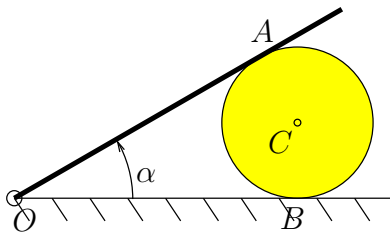


Figura 7.29: Problema 7.16

**Problema 7.17.** Una barra homogénea  $AB$  de masa  $m$  y longitud  $l$  se mueve en un plano horizontal. En el extremo  $A$  tiene un apoyo en forma de pequeña cuchilla, que impide el movimiento de dicho punto en dirección perpendicular a la varilla. Se pide:

- Expresar la ecuación de ligadura anholónoma.
- Usando  $(x, y, \theta)$  como coordenadas, obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento. Emplear para ello el formalismo de la dinámica analítica, haciendo uso de la técnica de multiplicadores de Lagrange para eliminar la citada ligadura.
- Demostrar que el multiplicador de Lagrange  $\lambda$  representa la fuerza transversal de restricción en ese punto.

(Examen final, 30/1/1999)

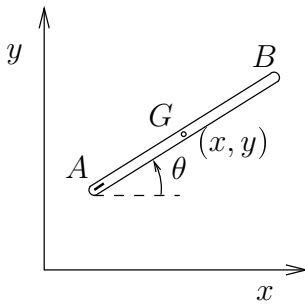


Figura 7.30: Problema 7.17

**Problema 7.18.** Un semiarco pesado de masa  $M$  y radio  $R$  puede deslizarse y girar sin rozamiento a lo largo de una recta horizontal fija  $r$  por su diámetro  $AB$ . Además, una partícula pesada de masa  $m$  desliza sin rozamiento ensartada en el semiarco. Se pide:

- Expresiones de la energía cinética y potencial del sistema formado por la partícula y el semiarco.
- Ecuaciones diferenciales del movimiento.
- Expresar las posibles integrales primeras e interpretarlas físicamente.
- Expresión de la reacción entre el aro y la partícula en función de las coordenadas generalizadas seleccionadas y sus derivadas.

(Examen final, 14/6/1999)

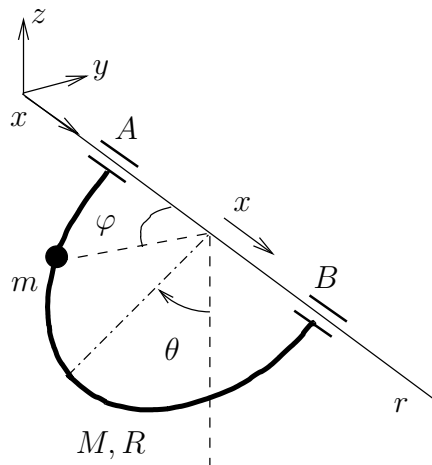


Figura 7.31: Problema 7.18

**Problema 7.19.** Dos poleas  $A$  y  $B$  pueden rodar sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose verticales en todo instante y unidas mediante un hilo sin masa que se enrolla en el perímetro exterior de las mismas, con un resorte lineal de constante  $k$  en su centro. La masa de la primera polea es  $m_A$  y su radio  $1,5R$ , mientras que la masa de la otra es  $m_B$  y su radio exterior  $2R$ . La rodadura de la polea  $B$  sobre la recta se produce mediante un pequeño saliente de forma circular y radio  $R$ . Al ser este saliente pequeño, ambas poleas se pueden considerar como discos homogéneos. Considerando que el hilo se mantiene tenso en todo instante y que es suficientemente largo para que el resorte central no llegue a tocar las poleas, obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema.

(Examen parcial, 26/1/1998)

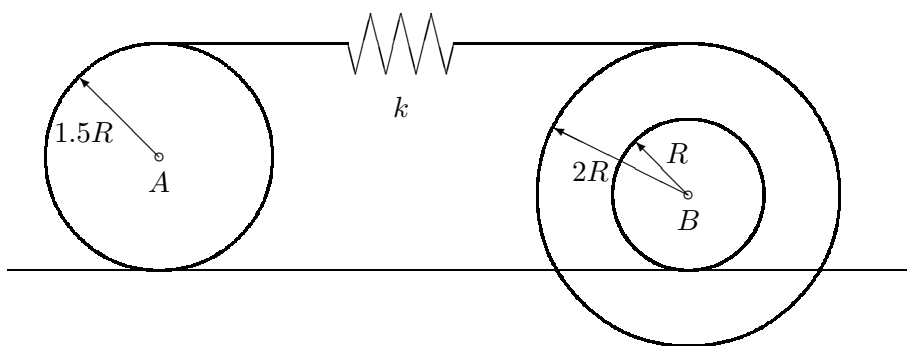


Figura 7.32: Problema 7.19

**Problema 7.20.** Un disco homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$  rueda sin deslizar sobre una recta  $r$ , manteniéndose vertical. De su centro cuelga, mediante una articulación, una varilla de masa  $m$  y longitud  $l < R$ . En el extremo inferior de esta varilla actúa una fuerza horizontal, de valor  $f = A \sin \Omega t$ . El conjunto está sometido además a la acción de la gravedad. Se pide:

- Tomando como coordenadas el giro del disco  $\theta$  y el ángulo de la varilla con la vertical  $\varphi$ , expresar el trabajo  $\delta W$  para un desplazamiento virtual arbitrario.
- Fuerzas generalizadas según las coordenadas anteriores.
- Ecuaciones de Lagrange del movimiento.
- Discutir la existencia o no de integrales primeras y obtenerlas en su caso.

- e. Reacción tangencial de la recta sobre el disco, empleando multiplicadores de Lagrange.

(Examen parcial, 25/1/1993)

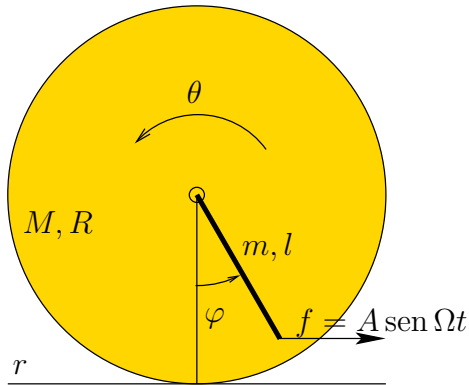


Figura 7.33: Problema 7.20

**Problema 7.21.** Un aro homogéneo de masa  $3m$  y radio  $R$  se mueve en un plano vertical colgado de un punto  $O$  de su perímetro que se halla fijo. Sobre este aro desliza una bolita de masa  $m$  que no puede separarse del mismo, y que se halla sujeta por un resorte elástico de constante  $k = mg/R$  al punto del aro diametralmente opuesto a  $O$ . Obtener las ecuaciones diferenciales (de Lagrange) del movimiento e integrales primeras si las hubiere.

(Examen final, 11/9/1991)

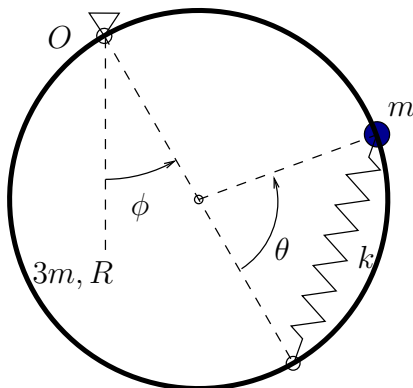


Figura 7.34: Problema 7.21

**Problema 7.22.** Un aro de masa  $M$  y radio  $2a$  puede oscilar en un plano vertical en torno a un punto  $O$  de su perímetro que está fijo. A su vez, un disco de masa  $m$  y radio  $a$  rueda sin deslizar dentro del aro. Existe un resorte de constante  $k$  y longitud natural  $2a$ , uno de cuyos extremos

está unido al centro del disco. El otro extremo está unido a una varilla de longitud  $a$  sin masa, soldada al aro en el punto  $O$  en dirección normal al perímetro, y que se mueve por tanto solidariamente con el aro (ver figura). Obtener las ecuaciones de Lagrange del movimiento, y discutir la existencia de integrales primeras.

(Examen parcial, 24/5/1993)

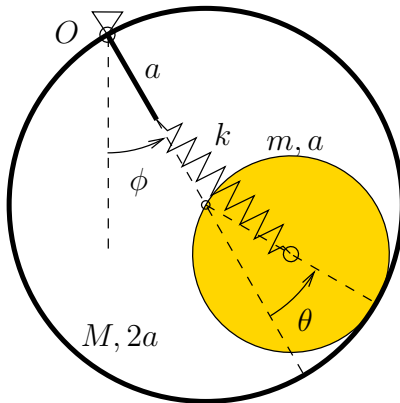


Figura 7.35: Problema 7.23

**Problema 7.23.** Un sistema binario formado por dos partículas de masas  $m_A$  y  $m_B$  se mueve sin resistencias en un plano vertical fijo, atrayéndose las partículas entre sí con una fuerza proporcional a su distancia de constante  $k$ , actuando asimismo sobre ellas la gravedad terrestre. Empleando como coordenadas del sistema la posición de su centro de masas  $G$ , la distancia  $s$  entre partículas, y el ángulo que forma el segmento  $AB$  con la horizontal, se pide:

- Lagrangiana del sistema;
- Ecuaciones del movimiento e integrales primeras;
- Reducir el movimiento relativo a  $G$  a una ecuación diferencial en función de  $s$  tan sólo.
- Tomando ahora como coordenadas generalizadas las coordenadas absolutas de  $m_A$  que denominaremos  $(r_x, r_y)$  y las coordenadas relativas de  $m_B$  respecto a  $m_A$  que denominaremos  $(s_x, s_y)$ , obtener la Lagrangiana; comprobar que las coordenadas  $(r_x, r_y)$  son cíclicas y las integrales primeras correspondientes expresan la conservación de la cantidad de movimiento del sistema; obtener las ecuaciones de Lagrange para las otras dos coordenadas, eliminar en ellas las coordenadas cíclicas, y comprobar que definen trayectorias relativas elípticas.

(Examen final, 20/6/1994)

**Problema 7.24.** Una placa cuadrada  $ABCD$ , de masa  $m$ , está colgada de un carretón de masa  $M$ , mediante dos varillas inextensibles de masa despreciable y longitud  $l$ , articuladas en sus extremos (ver figura). La placa sólo puede moverse en su plano y el carretón puede desplazarse en el mismo plano sobre la recta horizontal en que se apoya, sin rozamiento y con un amortiguador viscoso de constante  $c$ . Se pide:

- Ecuaciones diferenciales del movimiento. ¿Existen Integrales Primeras?
- En el caso particular en que  $c = 0$ , si la placa se suelta estando el sistema en reposo con las varillas horizontales, calcular:
  - Desplazamiento del carretón cuando la placa llega al punto más bajo de su trayectoria.
  - Velocidad del carretón en dicho instante.

(Examen parcial, 28/1/1994)

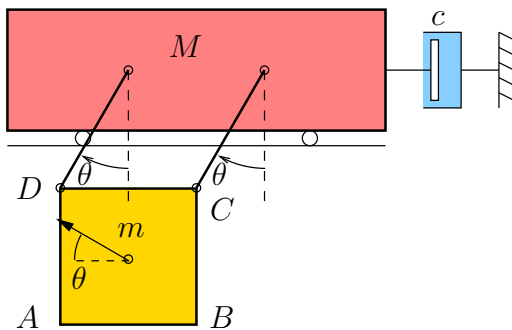


Figura 7.36: Problema 7.24

**Problema 7.25.** Un semicirculo de masa  $M$  y radio  $R$  rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose dentro de un plano vertical. Sobre el semicirculo desliza una partícula de masa  $m$  con ligadura bilateral lisa. Se pide:

- Lagrangiana del sistema y ecuaciones de Lagrange del movimiento;
- Integrales primeras, caso de haberlas.

(Véase problema propuesto 6.18, empleando métodos de Newton y Euler)

(Examen final, 20/6/1994)

**Problema 7.26.** El sistema de la figura está formado por dos discos iguales, de masa  $M$  y radio  $R$ , cuyos centros  $A$  y  $B$  están unidos mediante un resorte elástico de constante  $k$ . Se pide:



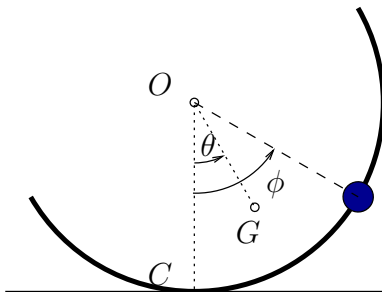


Figura 7.37: Problema 7.25

- a. Empleando las coordenadas  $(x_G, s)$ , donde  $x_G$  es el desplazamiento según la dirección inclinada del C.D.M. del conjunto y  $s$  la elongación del muelle respecto a su longitud natural, determinar las ecuaciones del movimiento del sistema y las integrales primeras. Se supondrá que en el instante inicial el conjunto parte del reposo con el muelle sin tensión.
- b. Obtener la reacción de la recta sobre el disco A.  
(Examen final, 20/6/1995)

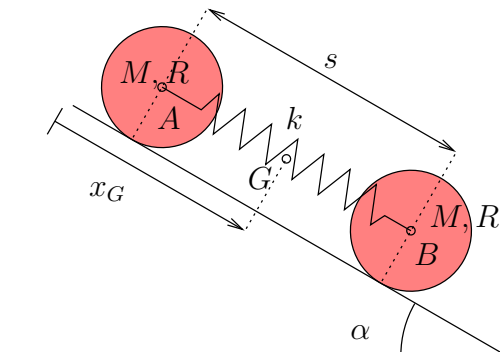


Figura 7.38: Problema 7.26



## Capítulo 8

# Dinámica del sólido rígido

### 8.1. Conceptos generales

Se llama «sólido rígido» a un conjunto de partículas, de número finito o infinito, que a lo largo del movimiento mantengan invariables las distancias entre cada dos de ellas, de manera que se conserve la forma geométrica del sistema y la distribución espacial de su masa.

Es posible pues caracterizar un sólido rígido  $\mathcal{B}$  de dos maneras distintas, según si el número de partículas es o no finito. El sólido con *distribución discreta de masa* es el constituido por un número finito de  $N$  partículas ( $m_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ) unidas rígidamente. Por otra parte, el sólido con *distribución continua de masa* estará formado por un número infinito de partículas, pudiendo idealizarse como un medio continuo. Es decir, se considera como un dominio  $\mathcal{B}$  infinitamente subdivisible en el sentido del cálculo diferencial, mediante elementos infinitesimales de volumen ( $dV$ ) y masa ( $dm$ ). Admitiremos en este caso que existe una función de densidad  $\rho = dm/dV$  que expresa la relación entre ambos y que supondremos integrable.

De esta forma, la masa total del sólido se expresa como

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^N m_i && \text{(distribución de masa discreta)} \\ M &= \int_{\mathcal{B}} \rho dV && \text{(distribución de masa continua).} \end{aligned} \tag{8.1}$$

Quedan fuera del alcance de este capítulo los *medios continuos deformables*, que serán objeto de estudio en otras materias (Resistencia de Materiales; Elasticidad y Plasticidad; Cálculo de Estructuras; Geotecnia; Hidráulica y Mecánica de Fluidos). La consideración de la deformabilidad de

los cuerpos exigiría introducir medidas de la deformación interna (tensor de deformaciones), así como de las fuerzas internas entre las partículas del sólido (tensor de tensiones) y las ecuaciones que ligan ambas (ecuaciones constitutivas), lo que excede los objetivos de este curso.

Como se vió en el ejemplo 6.1 (figura 6.5), un sólido rígido libre posee seis grados de libertad. Éstos se pueden descomponer como tres parámetros que definan la traslación del sólido, (por ejemplo, las coordenadas del centro de masa,  $X_G, Y_G, Z_G$ ), y tres parámetros angulares que definan la orientación del sólido alrededor de  $G$  (por ejemplo, los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$ , que se definirán más adelante (apartado 8.6.8)).

Las ecuaciones de la dinámica pueden obtenerse aplicando los principios y teoremas generales enunciados en el capítulo 6. En particular, el movimiento se puede resolver aplicando las ecuaciones que se deducen a partir de los principios de la cantidad de movimiento (6.7), momento cinético (6.22) y energía cinética (6.15). Para el caso más general del sólido libre en tres dimensiones, se necesitarán al menos seis ecuaciones independientes. Un procedimiento general para obtener las ecuaciones necesarias y suficientes es la aplicación del principio de D'Alembert, como se ve a continuación.

### 8.1.1. Ecuaciones cardinales de la dinámica

Supondremos un sólido rígido libre, sin enlaces exteriores, siendo las únicas ligaduras las internas del propio sólido, de distancia constante. Los desplazamientos virtuales compatibles con estos enlaces son

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \boldsymbol{\theta} \wedge (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) + \delta \mathbf{r}_G, \quad \forall (\delta \mathbf{r}_G, \delta \boldsymbol{\theta}). \quad (8.2)$$

En esta expresión  $\delta \mathbf{r}_G$  responde a desplazamientos virtuales arbitrarios del centro de masa y  $\delta \boldsymbol{\theta}$  a rotaciones infinitesimales. Por concretar el desarrollo se ha considerado el sólido como conjunto discreto de partículas ( $m_i, i = 1, \dots, N$ ), aunque los resultados son igualmente válidos para una distribución continua.

El principio de D'Alembert (6.65) expresa

$$\underbrace{\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i}_{\delta W} - \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ comp.} \quad (8.3)$$

Empleando (8.2) el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas  $\mathbf{f}_i$  resulta

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_G + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot (\delta \boldsymbol{\theta} \wedge (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G)) \\ &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_G + \mathbf{M}_G \cdot \delta \boldsymbol{\theta},\end{aligned}\quad (8.4)$$

siendo  $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{f}_i^{\text{ext}}$  (resultante de las fuerzas exteriores aplicadas) y  $\mathbf{M}_G = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{f}_i^{\text{ext}}$  (resultante de momentos en  $G$ ). Para obtener la expresión anterior se ha empleado la propiedad de rotación del producto mixto en los términos debidos a  $\delta \boldsymbol{\theta}$ .

Por otra parte, los términos de inercia originan la siguiente contribución:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \left( \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_G + \left( \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \wedge m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \right) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \\ &= M \mathbf{a}_G \cdot \delta \mathbf{r}_G + \left( \frac{d}{dt} \mathbf{H}_G \right) \cdot \delta \boldsymbol{\theta},\end{aligned}\quad (8.5)$$

siendo  $\mathbf{H}_G = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \wedge m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ . Sustituyendo las expresiones anteriores en (8.3),

$$(\mathbf{F} - M \mathbf{a}_G) \cdot \delta \mathbf{r}_G + (\mathbf{M}_G - \frac{d}{dt} \mathbf{H}_G) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} = 0 \quad \forall (\delta \mathbf{r}_G, \delta \boldsymbol{\theta}). \quad (8.6)$$

De aquí se deducen las denominadas *ecuaciones cardinales* de la dinámica del sólido:

$$\begin{cases} \mathbf{F} = M \mathbf{a}_G; \\ \mathbf{M}_G = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_G. \end{cases} \quad (8.7)$$

Se trata de seis ecuaciones escalares, que al deducirse del principio de D'Alembert, sabemos de entrada que son necesarias y suficientes para determinar los seis grados de libertad del movimiento.

En el caso particular de un sólido con un punto  $O$  fijo, los desplazamientos virtuales serían  $\delta \mathbf{r}_i = \delta \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{r}_i$  (tomando en  $O$  el origen de coordenadas), y la ecuación del movimiento se reduce a

$$\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O. \quad (8.8)$$

Si el sistema rígido se considera como un medio continuo, formado por infinitas partículas, las expresiones anteriores son igualmente válidas, cal-

culándose las magnitudes a emplear en (8.7) mediante:

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} dS + \sum_k \mathbf{f}_k^{\text{ext}}, \quad (8.9)$$

$$\mathbf{M}_G = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{t} dS + \sum_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{f}_k^{\text{ext}}, \quad (8.10)$$

$$\mathbf{H}_G = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge \dot{\mathbf{r}} \rho dV. \quad (8.11)$$

siendo  $\mathbf{b}$  las fuerzas distribuidas por unidad de volumen (p. ej. la gravedad simplificada terrestre  $\rho\mathbf{g}$ ),  $\mathbf{t}$  las fuerzas aplicadas por unidad de superficie en el contorno  $\partial\mathcal{B}$ ,  $\mathbf{f}_k^{\text{ext}}$  fuerzas concentradas (puntuales). Para el caso con un punto fijo (ecuación (8.8)), las expresiones serían

$$\mathbf{M}_O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{t} dS + \sum_k \mathbf{r}_k \wedge \mathbf{f}_k^{\text{ext}}, \quad (8.12)$$

$$\mathbf{H}_O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} \rho dV. \quad (8.13)$$

Si se admite que la resultante de las fuerzas exteriores,  $\mathbf{F}$ , no depende de la orientación del sólido, sino tan sólo de la posición del centro de masas  $\mathbf{r}_G$  y posiblemente del tiempo, la integración de la ecuación (8.7<sub>1</sub>) permitiría calcular la trayectoria del centro de masas como si se tratase de una partícula, de forma desacoplada de la ecuación (8.7<sub>2</sub>), problema que ya hemos estudiado con anterioridad en la dinámica de la partícula (capítulo 2).

Sería un grave error sin embargo considerar que el movimiento del sólido se reduce a definir el movimiento del centro de masas. Para definir completamente el movimiento faltaría determinar su orientación, mediante la ecuación (8.7<sub>2</sub>), ó (8.8) en el caso con un punto fijo.

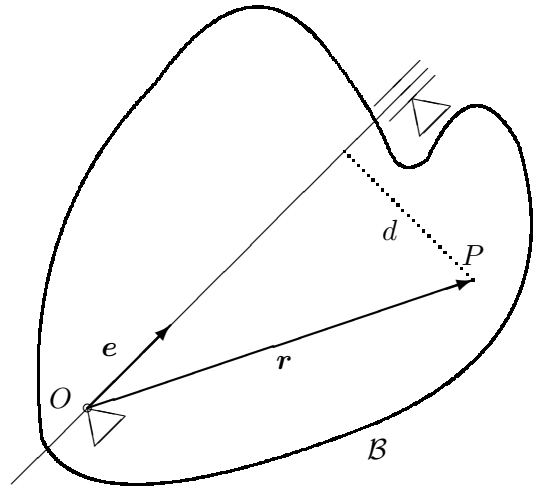
En este capítulo trataremos sobre el planteamiento y resolución de las ecuaciones (8.7<sub>2</sub>) ó (8.8). Ambas ecuaciones son formalmente iguales, definen el mismo tipo de problema: el movimiento de orientación o rotación del sólido alrededor de un punto que puede considerarse fijo, sea éste  $G$  u  $O$ .

## 8.2. Expresión de las magnitudes cinéticas

### 8.2.1. Movimiento de rotación instantánea

Consideremos un sólido  $\mathcal{B}$  con un movimiento instantáneo de rotación, alrededor de un eje  $(O, \mathbf{e})$ , con velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}$ , siendo  $\mathbf{e}$  un versor

Figura 8.1: Sólido  $\mathcal{B}$  girando alrededor de un eje fijo  $(O, \mathbf{e})$ .



unitario. El eje de rotación de dicho movimiento será en general variable a lo largo del tiempo. En caso contrario se trataría de la rotación de un sólido alrededor de un eje fijo, que da lugar como se sabe a un movimiento plano. Al tratarse de una rotación instantánea la velocidad de los puntos del eje es nula, por lo que tomando origen de coordenadas en  $O$  la velocidad de un punto  $P$  cualquiera del sólido  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}. \quad (8.14)$$

El momento cinético conjunto del cuerpo se obtiene mediante la suma o la integral, según se trate de una distribución discreta o continua, de los momentos cinéticos elementales de cada partícula:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}_i], \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(sólido discreto)} \\ (8.15) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \rho dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho dV = \int_{\mathcal{B}} [r^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}] \rho dV \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(sólido continuo)} \\ (8.16) \end{array}$$

En lo que sigue consideraremos un sólido continuo, por concretar las expresiones. Proyectando sobre el versor unitario  $\mathbf{e}$  obtenemos el *momento*

cinético áxico:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_O &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{e} \cdot [\mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})] \rho \, dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} \Omega (\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV = \Omega \int_{\mathcal{B}} d_e^2 \rho \, dV \end{aligned} \quad (8.17)$$

donde se ha empleado la propiedad de rotación del producto mixto. Asimismo, se denomina  $d_e \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}|$  a la distancia de cada punto al eje de rotación  $(O, \mathbf{e})$ .

En la expresión anterior, la integral que aparece se define como *momento de inercia* del sólido respecto al eje  $(O, \mathbf{e})$ :

$$I_{O,e} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} d_e^2 \rho \, dV \quad (8.18)$$

resultando por tanto a partir de (8.17) la expresión

$$H_{O,e} = I_{O,e} \Omega, \quad (8.19)$$

donde  $H_{O,e} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e}$ , momento cinético áxico del sólido respecto del eje  $(O, \mathbf{e})$ .

De la misma manera, la energía cinética se puede expresar como

$$\begin{aligned} T &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} v^2 \rho \, dV = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2 \rho \, dV \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 \int_{\mathcal{B}} d_e^2 \rho \, dV; \end{aligned} \quad (8.20)$$

es decir,

$$T = \frac{1}{2} I_{O,e} \Omega^2. \quad (8.21)$$

En el caso de un sólido discreto, las expresiones anteriores son igualmente válidas, siendo la expresión del momento de inercia  $I_{O,e} = \sum_{i=1}^N m_i d_{e,i}^2$ .

Debe advertirse que en las expresiones anteriores del momento cinético (8.19) y energía cinética (8.21) el valor del momento de inercia  $I_{O,e}$  no es constante, y deberá ser calculado en cada instante en función de la posición del eje de rotación  $(O, \mathbf{e})$ . Esta circunstancia limita la utilidad práctica de dichas fórmulas, siendo más recomendable para un caso general el uso del tensor de inercia, tal como se explicará en el apartado 8.3 (expresiones (8.29) y (8.42)).



### 8.2.2. Movimiento general (rotación y traslación)

En el caso más general en que el movimiento no sea una rotación instantánea sino un movimiento general sin puntos de velocidad nula, el campo de velocidades se puede desarrollar en general a partir del centro de masas ( $G$ ). Definiendo la posición relativa al mismo por  $\mathbf{r}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} - \mathbf{r}_G$ , y suponiendo que la velocidad instantánea de rotación es  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$ ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}'. \quad (8.22)$$

El momento cinético resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}' \wedge (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}') \rho \, dV \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}' \wedge \mathbf{v}_G \rho \, dV}_{=0} + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}') \rho \, dV. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Proyectando sobre el versor  $\mathbf{e}$  de la velocidad de rotación,

$$H_{G,e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_G = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{e} \cdot [\mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')] \rho \, dV = \Omega I_{G,e}, \quad (8.24)$$

donde  $I_{G,e}$  es el momento de inercia respecto del eje ( $G, \mathbf{e}$ ), que se define análogamente a (8.18).

El desarrollo de la energía cinética es en este caso

$$\begin{aligned} T &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')^2 \rho \, dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} v_G^2 \rho \, dV + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{v}_G \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}') \rho \, dV}_{=0} + \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')^2 \rho \, dV \\ &= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_{G,e} \Omega^2. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Esta expresión es la aplicación del teorema de König (6.25) al caso del sólido.

Debe realizarse aquí la misma advertencia que se hizo al final del apartado anterior, en relación con el valor variable en general del momento de inercia  $I_{G,e}$  a emplear en las fórmulas (8.24) y (8.25<sub>3</sub>).

### 8.2.3. Dinámica del sólido con un eje fijo

De las expresiones anteriores se puede obtener de forma directa la ecuación dinámica del caso más sencillo de movimiento de rotación de un sólido,

que es cuando el eje de rotación  $(O, \mathbf{e})$  es fijo. Puesto que se trata de un sólido rígido,  $I_{O,e}$  es una constante que refleja la distribución de masas del sólido alrededor de dicho eje fijo. Teniendo en cuenta esto, si se deriva (8.19) y empleando (8.8) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_{O,e} &= I_{O,e} \dot{\Omega} = \frac{d}{dt} (\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e} = M_{O,e} \\ &\Downarrow \\ \boxed{M_{O,e} = I_{O,e} \dot{\Omega}.} \end{aligned} \tag{8.26}$$

En esta ecuación  $M_{O,e} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}$  es el momento áxico de las fuerzas. Al derivar para obtener esta expresión se ha tenido en cuenta que, el eje  $(O, \mathbf{e})$  es fijo, tanto respecto al sólido como a la referencia absoluta, por lo que el momento de inercia  $I_{O,e}$  se mantiene constante, ya que la distribución de masa no sufre distorsión.

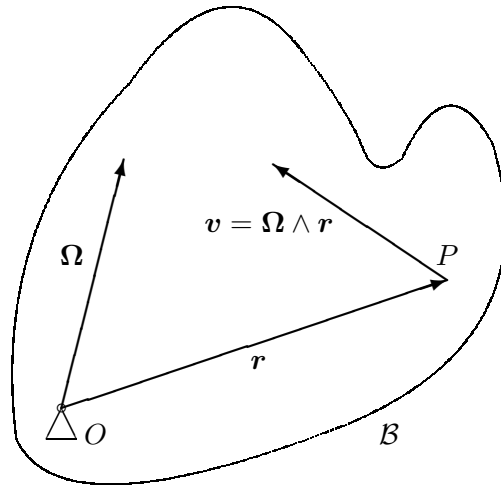
La expresión (8.26) define la dinámica de la rotación en torno a un eje fijo. Es similar a la ley «Fuerza = Masa  $\times$  Aceleración» (2.2) para dinámica de traslación de partículas, cumpliendo aquí  $\dot{\Omega}$  el papel de aceleración (variación del movimiento),  $M_{O,e}$  el papel de fuerza (causante de la variación) e  $I_{O,e}$  el papel de masa (inercia a la variación).

### 8.3. El tensor de inercia

Para el caso más general de la dinámica del sólido, en lo que sigue nos limitaremos a la ecuación (8.7<sub>2</sub>), o bien directamente a la ecuación (8.8) en el caso en que el sólido tenga un punto fijo  $O$  —dando por descontada la solución de la ecuación (8.7<sub>1</sub>) que gobierna la traslación—. Como se ha dicho, las dos ecuaciones son formalmente iguales, expresando ambas la dinámica de la rotación alrededor de un punto que se pueda suponer fijo, sea este punto  $G$  u  $O$ . Por tanto en lo que sigue centraremos nuestra atención en la ecuación (8.8) correspondiente al sólido con un punto fijo.

Para poder expresar dicha ecuación en un caso general en que el eje de rotación no sea fijo, es preciso en primer lugar desarrollar las expresiones de las magnitudes cinéticas (momento cinético, energía cinética) de forma intrínseca, sin referirse al eje de rotación, lo que dará lugar al denominado *tensor de inercia*. Como veremos, este tensor constituye la descripción más general de la inercia de un sólido a la variación de su movimiento, generalizando el concepto de momento de inercia que se emplea para la rotación alrededor de un eje.

Figura 8.2: *Movimiento del sólido  $\mathcal{B}$  con un punto fijo  $O$ .*



**Expresión del Momento Cinético.**— El momento cinético de un sólido  $\mathcal{B}$  con un punto fijo  $O$ , con velocidad de rotación instantánea  $\mathbf{\Omega}$ , viene dado por (8.16):

$$\mathbf{H}_O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho dV = \int_{\mathcal{B}} [r^2 \mathbf{\Omega} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{\Omega}) \mathbf{r}] \rho dV. \quad (8.27)$$

Se observa fácilmente que esta expresión es lineal en  $\mathbf{\Omega}$ ; por tanto se puede interpretar que define  $\mathbf{H}_O$  como una transformación lineal de  $\mathbf{\Omega}$ , que identificaremos con un tensor<sup>1</sup>  $\mathbf{I}_O$ ,

$$\mathbf{I}_O : \quad \mathbf{\Omega} \mapsto \mathbf{H}_O(\mathbf{\Omega}) = \int_{\mathcal{B}} [r^2 \mathbf{\Omega} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{\Omega}) \mathbf{r}] \rho dV. \quad (8.28)$$

Se trata de un tensor de segundo orden, que denominamos *tensor de Inercia* del sólido  $\mathcal{B}$  en el punto  $O$ .

En lenguaje tensorial, decimos que  $\mathbf{H}_O$  es la actuación de  $\mathbf{I}_O$  sobre  $\mathbf{\Omega}$ :

$$\boxed{\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}} \quad (8.29)$$

donde el operador  $(\cdot)$  indica la aplicación del tensor sobre un vector, obteniéndose como resultado otro vector<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Véase el apéndice A, donde se define un tensor de orden dos como «una función lineal que aplica cada vector a un vector»

<sup>2</sup>En este texto se empleará el punto  $(\cdot)$  para significar esta aplicación de un tensor sobre un vector, que no debe confundirse con el producto escalar entre dos vectores. Otros autores indican la aplicación de un tensor sin ningún símbolo, es decir  $\mathbf{I}_O \mathbf{\Omega}$

**Componentes del tensor de inercia.**— En notación tensorial, a partir de (8.27) y teniendo en cuenta que  $(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega})$  (véase apéndice A), el tensor de inercia se puede expresar de manera explícita mediante

$$\mathbf{I}_O = \int_{\mathcal{B}} (r^2 \mathbf{1} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \rho \, dV, \quad (8.30)$$

donde  $\mathbf{1}$  es el tensor identidad, de componentes  $\delta_{ij}$  (deltas de Kronecker) en una base ortonormal, y  $(\otimes)$  indica producto tensorial o diádico.

Para clarificar el significado del tensor de inercia, desarrollemos las componentes del mismo en una base ortonormal, a partir de (8.27):<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} (H_O)_i &= \int_{\mathcal{B}} [r^2 \Omega_i - (r_j \Omega_j) r_i] \rho \, dV \\ &= \left[ \int_{\mathcal{B}} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \rho \, dV \right] \Omega_j \\ &= I_{O,ij} \Omega_j. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Los coeficientes  $I_{O,ij}$  corresponden a las componentes del tensor de inercia  $\mathbf{I}_O$  y quedan definidos por

$$I_{O,ij} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \rho \, dV, \quad (8.32)$$

La ecuación (8.31) permite interpretar la actuación del tensor de inercia  $\mathbf{I}_O$  como el producto tensorial contraído<sup>4</sup> con  $\boldsymbol{\Omega}$ .

**Cambio de coordenadas.**— Una de las propiedades esenciales de los tensores es el comportamiento de sus coordenadas frente a un cambio de base (apartado A.5 en apéndice A). Supongamos un tal cambio, asociado a un tensor de cambio  $\mathbf{A}$  con matriz de componentes  $[\mathbf{A}]$ <sup>5</sup>, que transforma la

<sup>3</sup>En estas expresiones, se sobreentiende que se efectúa la suma sobre los índices repetidos sobre su rango de variación, convención que emplearemos en lo sucesivo en este capítulo salvo indicación expresa en contra.

<sup>4</sup>es decir, realizando la sumatoria («contrayendo») en el índice más cercano entre ambos

<sup>5</sup>Emplearemos la siguiente notación en este curso para las expresiones matriciales:  $\{\mathbf{x}\} \equiv \{x_i\}$ ,  $\{\mathbf{r}\} \equiv \{r_i\}$  (entre llaves) para matrices columna ( $n \times 1$ ),  $\|\mathbf{x}\| = \{\mathbf{x}\}^T \equiv \|x_i\|$ ,  $\|\mathbf{r}\| = \{\mathbf{r}\}^T \equiv \|r_i\|$  (entre barras dobles) para matrices fila ( $1 \times n$ ), y  $[\mathbf{R}] \equiv [R_{ij}]$ ,  $[\mathbf{A}] \equiv [A_{ij}]$ ,  $[\mathbf{I}] \equiv [I_{ij}]$  (entre corchetes) para matrices de 2 índices (rectangulares  $n \times m$  o cuadradas  $n \times n$ ). Reservaremos las letras «negritas matemáticas» ( $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{I}$ ) para vectores o tensores. Procuraremos distinguir de esta manera entre el tensor  $\mathbf{R}$  y la matriz de componentes del mismo en un triedro dado,  $[\mathbf{R}] \equiv [R_{ij}]$ .

base ortonormal  $\{\mathbf{e}_i\}$  en otra igualmente ortogonal  $\{\mathbf{e}'_i\}$ :

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \|\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3\| = \|\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3\| \|\mathbf{A}\| \\ \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_j A_{ji} \end{cases} \quad (8.33)$$

Las coordenadas de un vector dado  $\mathbf{a}$  cambian como

$$\{\mathbf{a}\}' = [\mathbf{A}]^T \{\mathbf{a}\} \quad \Leftrightarrow \quad a'_i = A_{ji} a_j. \quad (8.34)$$

Las coordenadas del tensor  $\mathbf{I}_O$  (cf. ecuación (A.43) en apéndice A) en ambas bases están relacionadas por

$$[\mathbf{I}_O]' = [\mathbf{A}]^T [\mathbf{I}_O] [\mathbf{A}] \quad \Leftrightarrow \quad I'_{O,ij} = A_{ki} I_{O,kl} A_{lj}. \quad (8.35)$$

Recordamos que, al tratarse de un cambio entre bases ortonormales,  $\mathbf{A}$  es ortogonal ( $[\mathbf{A}]^T = [\mathbf{A}]^{-1}$ , y  $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$ ). Supondremos además que ambos triedros son «a derechas», por lo que adicionalmente ha de ser  $\det(\mathbf{A}) = +1$ .

Reviste especial interés considerar un triedro  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  ligado al sólido, con origen en un punto  $O$  del mismo y direcciones  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  solidarias al cuerpo. En este triedro, un punto material del sólido tiene coordenadas constantes<sup>6</sup> a lo largo del movimiento:

$$\mathbf{r} = x^\circ \mathbf{i} + y^\circ \mathbf{j} + z^\circ \mathbf{k}, \quad \text{con } (x^\circ, y^\circ, z^\circ) \text{ constantes.} \quad (8.36)$$

Las componentes del tensor de inercia en este triedro, a partir de (8.32), son igualmente constantes. Empleando la notación indicial para las coordenadas,  $(r_1^\circ, r_2^\circ, r_3^\circ) = (x^\circ, y^\circ, z^\circ)$ , estas componentes son

$$I_{O,ij}^\circ = \int_B (r^2 \delta_{ij} - r_i^\circ r_j^\circ) \rho \, dV \quad (\text{constantes}) \quad (8.37)$$

Consideremos ahora el cambio de base que relaciona el triedro del cuerpo  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  con el triedro fijo  $(O, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ ,

$$\|\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}\| = \|\mathbf{I} \mathbf{J} \mathbf{K}\| [\mathbf{R}]. \quad (8.38)$$

(El triedro fijo puede definirse como aquél que coincide con la posición del triedro del cuerpo en el instante de referencia o inicial,  $[\mathbf{R}]_{t=0} = [\mathbf{1}]$ .) La relación entre las componentes del tensor de inercia en ambos triedros es

$$[\mathbf{I}_O]^\circ = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{I}_O] [\mathbf{R}], \quad (8.39)$$

---

<sup>6</sup>Este tipo de coordenadas ligadas al movimiento se denominan en ocasiones *coordenadas convectivas*.

donde  $[\mathbf{I}_O]^\circ$  son las componentes del tensor de inercia en el triedro del cuerpo, e  $[\mathbf{I}_O]$  las componentes en el triedro fijo. Teniendo en cuenta  $[\mathbf{R}]^T = [\mathbf{R}]^{-1}$ , la relación anterior se puede invertir resultando

$$[\mathbf{I}_O] = [\mathbf{R}][\mathbf{I}_O]^\circ[\mathbf{R}]^T. \quad (8.40)$$

Esta expresión matricial define las componentes del tensor de inercia en una base fija (inercial) a lo largo del movimiento, en función de la matriz  $[\mathbf{R}]$ . Se puede comprender fácilmente que las coordenadas  $[\mathbf{I}_O]$  por lo general no serán constantes. Si se desea evitar tener que considerar dicha variación en el cálculo, deberá expresarse el tensor de inercia en un triedro ligado al sólido ( $[\mathbf{I}_O]^\circ$ ).

**Expresión de la Energía Cinética.**— La expresión de la energía cinética (8.20) se puede desarrollar como:

$$\begin{aligned} T &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Considerando (8.16) y (8.29) puede escribirse en función del tensor de inercia,

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})}. \quad (8.42)$$

Otras maneras de expresar esta ecuación<sup>7</sup> son:

$$T = \frac{1}{2} \Omega_i I_{O,ij} \Omega_j \quad (\text{notación indicial}); \quad (8.43)$$

$$= \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\Omega}\| [\mathbf{I}_O] \{\boldsymbol{\Omega}\} \quad (\text{notación matricial}). \quad (8.44)$$

La ecuación (8.42) es una expresión tensorial, por lo que el resultado es otro tensor, en este caso de orden cero, es decir, un escalar invariante. Por lo tanto, el valor de  $T$  es un invariante intrínseco del movimiento, que no depende del sistema de coordenadas elegido. En efecto, realizando el cambio

<sup>7</sup>En la expresión (8.42) el primer punto  $(\cdot)$  indica producto escalar entre vectores y el segundo la aplicación del tensor sobre un vector. En algunos textos se emplea la notación del producto de un tensor  $\mathbf{A}$  por un vector  $\mathbf{x}$  por la izquierda como  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}$ , o en índices  $x_i A_{ij}$ , con lo que la ecuación anterior puede expresarse también sin paréntesis como  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$

de coordenadas definido por  $[\mathbf{A}]$  según (8.34) y (8.35) y teniendo en cuenta la ortogonalidad de la matriz de cambio:

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\Omega}\|' [\mathbf{I}_O]' \{\boldsymbol{\Omega}\}' \\ &= \frac{1}{2} (\|\boldsymbol{\Omega}\| [\mathbf{A}]) ([\mathbf{A}]^T [\mathbf{I}_O] [\mathbf{A}]) ([\mathbf{A}]^T \{\boldsymbol{\Omega}\}) \\ &= \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\Omega}\| [\mathbf{I}_O] \{\boldsymbol{\Omega}\} = T. \end{aligned} \quad (8.45)$$

## 8.4. Propiedades del tensor de inercia

### 8.4.1. Momentos y productos de inercia

Sea un eje  $(O, \mathbf{u})$  correspondiente a un versor  $\mathbf{u}$  pasando por el punto  $O \in \mathcal{B}$ . La distancia al eje de un punto cualquiera  $P \in \mathcal{B}$  definido por  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  es  $d = |\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}|$ . Según la definición de momento de inercia (8.18),

$$\begin{aligned} I_u &= \int_{\mathcal{B}} d^2 \rho \, dV = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV \\ &= \mathbf{u} \cdot \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV. \end{aligned} \quad (8.46)$$

La integral que aparece es análoga a la (8.27), que sirvió para definir el tensor de inercia, ocupando aquí  $\mathbf{u}$  el lugar de  $\boldsymbol{\Omega}$ . Por tanto,

$$I_u = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{u}) \quad (8.47)$$

Esta expresión define el momento de inercia como una forma cuadrática función de  $\mathbf{u}$ , y permite calcular, conocido  $\mathbf{I}_O$ , el momento de inercia para un eje cualquiera por  $O$ .

En general, es sabido que las componentes cartesianas  $(ij)$  del tensor  $\mathbf{I}_O$  se obtienen mediante

$$I_{O,ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_j).$$

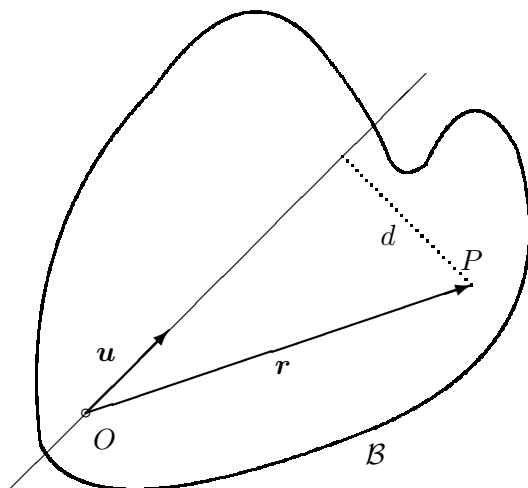
En concreto, tomando las direcciones de los versores del triedro  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  y empleando (8.47) y (8.30) obtenemos los *momentos de inercia* según las direcciones del triedro de referencia:

$$I_{xx} = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{i}) = \int_{\mathcal{B}} (y^2 + z^2) \rho \, dV, \quad (8.48)$$

$$I_{yy} = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{j}) = \int_{\mathcal{B}} (x^2 + z^2) \rho \, dV, \quad (8.49)$$

$$I_{zz} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{k}) = \int_{\mathcal{B}} (x^2 + y^2) \rho \, dV. \quad (8.50)$$

Figura 8.3: *Momento de inercia del sólido  $\mathcal{B}$  respecto de un eje  $(O, \mathbf{u})$ .*



Estos momentos de inercia coinciden con las componentes de la diagonal principal de la matriz de coordenadas, como es fácil ver. La expresión completa de esta matriz es

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{I}_O] &= \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{B}}(y^2 + z^2)\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} xy\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} zx\rho \, dV \\ -\int_{\mathcal{B}} yx\rho \, dV & \int_{\mathcal{B}}(z^2 + x^2)\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} yz\rho \, dV \\ -\int_{\mathcal{B}} zx\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} yz\rho \, dV & \int_{\mathcal{B}}(x^2 + y^2)\rho \, dV \end{pmatrix} \quad (8.51) \\
 &= \begin{pmatrix} I_{xx} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{yy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Las integrales de fuera de la diagonal, con signo positivo, se denominan *productos de inercia*:

$$P_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} xy\rho \, dV; \quad P_{yz} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} yz\rho \, dV; \quad P_{zx} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} zx\rho \, dV. \quad (8.52)$$

De la expresión (8.51) es inmediato comprobar que  $\mathbf{I}_O$  es un tensor simétrico, por lo que para definirlo en un caso general bastarán 6 componentes (3 momentos de inercia y 3 productos de inercia).

Además, el tensor  $\mathbf{I}_O$  es siempre definido positivo. Esto se deduce de forma inmediata de (8.42) que expresa  $T$  como una forma cuadrática de  $\boldsymbol{\Omega}$  definida por  $\mathbf{I}_O$ . La energía cinética  $T$ , por su propia definición, es esencialmente positiva para cualquier movimiento de rotación no nulo ( $\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$ ),



lo que caracteriza al tensor  $\mathbf{I}_O$  como definido positivo. Análogamente, los momentos de inercia definidos por la forma cuadrática (8.47) deben ser mayores que cero, anulándose únicamente para sólidos degenerados (rectas o puntos).

Otras propiedades del tensor de inercia de fácil demostración son las siguientes:

- La contracción (traza) de un tensor de 2.<sup>o</sup> orden es un invariante escalar. Por tanto

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\mathbf{I}_O) &= I_{\alpha\alpha} = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} \\ &= 2 \int_{\mathcal{B}} (x^2 + y^2 + z^2) \rho \, dV \\ &= 2 \int_{\mathcal{B}} r^2 \rho \, dV = 2I_O,\end{aligned}$$

donde  $I_O$  es el denominado *momento de inercia polar*, invariante de  $\mathcal{B}$  para un punto  $O$  dado.

- Se verifica la propiedad triangular, es decir, un momento de inercia es menor que la suma de los otros dos, pero mayor que su diferencia. Se comprueba inmediatamente,

$$\begin{aligned}I_{yy} + I_{zz} &= \int_{\mathcal{B}} (2x^2 + y^2 + z^2) \rho \, dV = I_{xx} + \underbrace{2 \int_{\mathcal{B}} x^2 \rho \, dV}_{>0}, \\ I_{yy} - I_{zz} &= \int_{\mathcal{B}} (z^2 - y^2) \rho \, dV = I_{xx} - \underbrace{2 \int_{\mathcal{B}} y^2 \rho \, dV}_{>0}.\end{aligned}$$

### 8.4.2. Elipsoide de inercia

Consideremos el haz de ejes que pasan por un punto  $O$ , con direcciones arbitrarias definidas por el versor unitario  $\mathbf{e}$ . Definimos para cada dirección un punto situado sobre el eje  $(O, \mathbf{e})$  a una distancia  $(I_e)^{-1/2}$  de  $O$ :

$$\mathbf{r} = \pm \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{I_e}}.$$

Si expresamos la forma cuadrática en  $\mathbf{r}$  definida por  $\mathbf{I}_O$ ,

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e})}{I_e} = 1. \quad (8.53)$$

Esta última ecuación caracteriza el lugar geométrico de los puntos considerados como una cuádrlica con centro en  $O$ . La expresión (8.53) es una forma cuadrática definida positiva (en todos los casos de sólidos no degenerados), por lo que geoméricamente se trata de un elipsoide, llamado *elipsoide de inercia*. Su expresión desarrollada es

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2P_{xy}xy - 2P_{yz}yz - 2P_{zx}zx = 1$$

El elipsoide de inercia ofrece una manera alternativa de estudiar el movimiento del sólido, a través de procedimientos *geométricos*, en lugar de los procedimientos *algebraicos* mediante el tensor de inercia, de naturaleza más abstracta.

### 8.4.3. Ejes principales de inercia

En un caso general, la velocidad instantánea de rotación  $\boldsymbol{\Omega}$  y el momento cinético  $\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$  no tienen porqué ser paralelos. Sin embargo, existen algunas direcciones privilegiadas en las que sí se cumple esta condición; éstas se llaman *direcciones principales de inercia en  $O$* .

Si  $\boldsymbol{\Omega}$  es paralela a una dirección principal de inercia, esto quiere decir que existirá un escalar  $\lambda$  que exprese la proporcionalidad,

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \lambda \boldsymbol{\Omega};$$

si tomamos el versor  $\mathbf{e}$  correspondiente a esta dirección ( $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$ ), se cumplirá

$$I_e = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot (\lambda \mathbf{e}) = \lambda;$$

es decir, el coeficiente de proporcionalidad es precisamente el momento de inercia según la dirección principal,  $\lambda = I_e$ . Éstos se denominan *momentos principales de inercia*.

La obtención de las direcciones principales y momentos principales asociados a un tensor  $\mathbf{I}_O$  constituye un *problema de autovalores*: Se trata de encontrar una dirección  $\mathbf{e}$  tal que, para algún  $\lambda$ , se verifique

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}. \quad (8.54)$$

Introduciendo el tensor unidad  $\mathbf{1}$ , cuyas componentes cartesianas son las deltas de Kronecker ( $\delta_{ij}$ ), resulta la igualdad

$$(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (8.55)$$

Esta expresión corresponde a un sistema de ecuaciones lineal y homogéneo, de incógnitas  $\mathbf{e} \equiv \|e_1 e_2 e_3\|$ . Para que exista solución no trivial ( $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ ), la matriz de coeficientes de (8.55) ha de ser singular:

$$\det(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) = 0, \quad (8.56)$$

expresión que constituye la denominada *ecuación característica* del problema de autovalores (8.54). Se trata de una ecuación cúbica en  $\lambda$ , que posee tres raíces ( $\lambda_I = A$ ,  $\lambda_{II} = B$ ,  $\lambda_{III} = C$ ). Por ser  $\mathbf{I}_O$  simétrico, estas tres raíces deben ser reales; como además es definido positivo, las tres serán además positivas, correspondiendo a los tres momentos principales de inercia.

Cada momento principal de inercia está asociado a una dirección principal de inercia, solución de (8.55) con el valor de  $\lambda$  apropiado: ( $\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}$ ). Admitamos en primer lugar que la ecuación característica tiene tres raíces distintas ( $A \neq B \neq C$ ), las tres direcciones principales se obtienen respectivamente de

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_I = A\mathbf{e}_I \quad (8.57)$$

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_{II} = B\mathbf{e}_{II} \quad (8.58)$$

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_{III} = C\mathbf{e}_{III} \quad (8.59)$$

Una propiedad esencial de las direcciones principales es que, si corresponden a autovalores distintos, han de ser mutuamente ortogonales. En efecto, multiplicando escalarmente (8.57) por  $\mathbf{e}_{II}$  y (8.58) por  $\mathbf{e}_I$ ,

$$\mathbf{e}_{II} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_I) = A\mathbf{e}_{II} \cdot \mathbf{e}_I$$

$$\mathbf{e}_I \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_{II}) = B\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_{II}$$

restando estas dos expresiones y haciendo uso de la simetría del tensor de inercia, se obtiene

$$0 = (A - B)\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_{II},$$

expresión que indica la ortogonalidad entre ambas direcciones, ya que por hipótesis antes realizada  $(A - B) \neq 0$ . Por lo tanto, el triedro de referencia ( $O, \mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}$ ) formado por las tres direcciones principales en  $O$  constituye una base ortonormal ligada al sólido. Las componentes del tensor de inercia en esta base son

$$I_{O,ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_j) = \lambda_i \delta_{ij} \quad (i \text{ no sumado}),$$

lo que equivale a una matriz de componentes diagonal:

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Los ejes principales de inercia corresponden a los ejes geométricos del elipsoide de inercia, cuya expresión en este triedro sería

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

ecuación que corresponde a un elipsoide de semiejes  $(1/\sqrt{A}, 1/\sqrt{B}, 1/\sqrt{C})$ .

En el caso en que existiera una raíz doble en la ecuación característica (8.56), habrá dos momentos principales iguales. Los ejes principales de inercia estarán constituidos por el correspondiente a la raíz única y otros dos ejes cualesquiera en el plano normal al primero y que sean ortogonales entre sí, adoptando entonces la matriz de componentes del tensor de inercia la forma

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}.$$

En este caso es inmediato comprobar que cualquier dirección del plano  $(O, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III})$  ortogonal al primer vector (es decir, un vector  $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{e}_{II} + \beta \mathbf{e}_{III}$  para  $\alpha$  y  $\beta$  arbitrarias) es también dirección principal de inercia. Estamos ante un tensor de inercia *cilíndrico*.

Por último, en el caso en que exista una única raíz triple, análogamente al caso anterior, cualquier dirección del espacio es principal. Podremos escoger como ejes principales tres direcciones ortogonales cualesquiera. Diremos que el tensor de inercia es *esférico*, siendo su expresión en cualquier sistema cartesiano de coordenadas la misma:

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Veamos ahora que los momentos de inercia correspondientes a las direcciones principales son los máximos y mínimos de los momentos de inercia para cualquier dirección. Basta plantear el problema de máximos/mínimos condicionados en el que se buscan los extremos de la función

$$I_e(\mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}), \quad (8.60)$$

sujetos a la ligadura

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1, \quad (8.61)$$

puesto que el versor  $\mathbf{e}$  debe tener módulo unidad. El problema se soluciona mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Tomando una variación infinitesimal de la primera expresión e igualando a cero, la condición de extremo (8.60) queda expresada como

$$2\mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \delta\mathbf{e}) = 0.$$

(donde se ha empleado la simetría de  $\mathbf{I}_O$ .) Multiplicando la ecuación de ligadura (8.61) por un multiplicador arbitrario  $\lambda$ , y tomando igualmente su variación,

$$2\lambda\mathbf{e} \cdot \delta\mathbf{e} = 0.$$

Restando ahora ambas expresiones,

$$(\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} - \lambda\mathbf{e}) \cdot \delta\mathbf{e} = 0,$$

lo que, al ser  $\delta\mathbf{e}$  arbitrario, obliga a

$$\boxed{\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}}. \quad (8.62)$$

Es decir,  $\mathbf{e}$  debe ser una dirección principal, como queríamos demostrar. Por lo tanto, de las tres direcciones principales, una corresponderá al máximo momento de inercia, otra al mínimo, y la tercera a un valor intermedio.

#### 8.4.4. Simetrías de masas

La existencia de simetrías en la distribución de masas simplifica de manera considerable el cálculo del tensor de inercia. En la práctica es conveniente emplear estas simplificaciones siempre que sea posible.

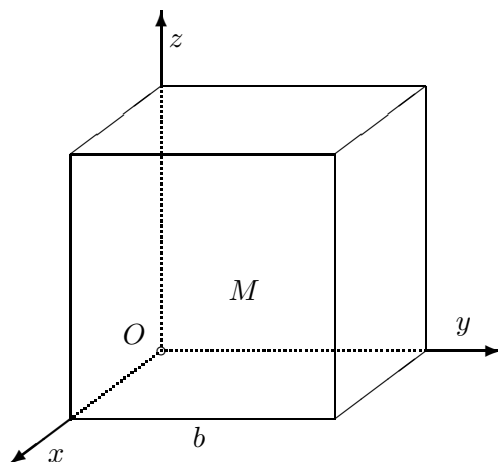
- Plano de Simetría.* Por ejemplo, si  $(Oxy)$  es un plano de simetría, cualquier partícula de coordenadas  $(x, y, z)$  posee una simétrica  $(x, y, -z)$ . Así,  $P_{xz} = \int_{\mathcal{B}} xz\rho dV = 0$ ,  $P_{yz} = \int_{\mathcal{B}} yz\rho dV = 0$ . En la expresión de la matriz de inercia (8.51), la tercera fila y la tercera columna se anulan, por lo que el eje  $Oz$  (perpendicular al plano de simetría) es un eje principal de inercia.
- Eje de Simetría.* Sea este, ejemplo el eje  $Oz$ . Para toda partícula en  $(x, y, z)$  existe otra en  $(-x, -y, z)$ . Por tanto  $P_{xz} = P_{yz} = 0$ , y el eje de simetría  $Oz$  es también eje principal de inercia.

- c. *Eje de Revolución.* Sea este por ejemplo el eje  $Oz$ . El eje de revolución es también eje de simetría, por lo que  $Oz$  será eje principal. Por otra parte, existe simetría respecto de cualquier plano que contenga al eje de revolución, por lo que todo eje  $\in Oxy$  es principal de inercia. Estaremos por tanto ante un tensor de inercia cilíndrico,

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 8.1: Sea un cubo homogéneo, de masa  $M$  y arista  $b$ . Se desea calcular las componentes del tensor de inercia referido a un vértice del cubo con ejes paralelos a las aristas, así como los ejes principales de inercia.

Figura 8.4: Obtención del tensor de inercia de un cubo respecto del vértice  $O$ , con ejes  $(x, y, z)$  paralelos a las aristas



Calculamos directamente las integrales que definen las componentes del tensor de inercia (8.51) en ejes cartesianos ortonormales (8.51):

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint_V (y^2 + z^2) \rho \, dx \, dy \, dz \\ &= \rho \int_0^b dz \int_0^b (y^2 + z^2) \, dy \int_0^b dx \\ &= \rho b \int_0^b dz \int_0^b (y^2 + z^2) \, dy \\ &= \rho b \int_0^b \left( \frac{b^3}{3} + bz^2 \right) dz \\ &= \rho b \left( \frac{b^4}{3} + \frac{b^4}{3} \right) = \frac{2}{3} Mb^2, \end{aligned}$$

ya que  $M = b^3\rho$ . Análogamente

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}Mb^2.$$

Los productos de inercia valen

$$\begin{aligned} P_{xy} &= \iiint_V xy\rho \, dx \, dy \, dz \\ &= \rho \int_0^b dx \int_0^b xy \, dy \int_0^b dz \\ &= \rho b \int_0^b dx \int_0^b xy \, dy \\ &= \rho \frac{b^3}{2} \int_0^b x \, dx \\ &= \rho \frac{b^3}{2} \frac{b^2}{2} = \frac{1}{4}Mb^2 \end{aligned}$$

y de igual manera

$$P_{yz} = P_{zx} = \frac{1}{4}Mb^2$$

Por lo tanto, la expresión del tensor de inercia es

$$[\mathbf{I}_O] = Mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix}. \quad (8.63)$$

Calculemos ahora los ejes principales de inercia. La ecuación característica es:

$$\det(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) = 0$$

denominando  $Mb^2 = \beta$ , para simplificar las expresiones, resulta

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\beta - \lambda & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - \lambda & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante,

$$\det(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) = \left(\frac{11}{12}\beta - \lambda\right) \left[\left(\frac{5}{12}\beta - \lambda\right) \left(\frac{2}{3}\beta - \lambda\right) - \frac{1}{8}\beta^2\right] = 0,$$

cuyas soluciones son  $\lambda = (1/6)\beta$  y  $\lambda = (11/12)\beta$  (doble).

Por lo tanto el tensor de inercia, expresado en los ejes principales, sería

$$[\mathbf{I}_O] = Mb^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 11/12 & 0 \\ 0 & 0 & 11/12 \end{pmatrix}$$

Para obtener las direcciones principales, sustituimos en (8.62) cada autovalor  $\lambda$  solución de la ecuación característica, y resolviendo para  $\mathbf{e}$  obtendremos la dirección principal asociada. Conviene recordar que al ser la matriz de coeficientes singular, estas direcciones principales quedan indeterminadas en función de al menos un parámetro, lo que nos permite elegir las soluciones normalizadas, correspondientes a versores de módulo unidad.

Sustituyendo el primer autovalor ( $\lambda = \beta/6$ ) en (8.62) y simplificando resulta:

$$\begin{aligned} 2e_1 - e_2 - e_3 &= 0, \\ -e_1 + 2e_2 - e_3 &= 0, \\ -e_1 - e_2 + 2e_3 &= 0. \end{aligned}$$

La solución —función de un parámetro indeterminado  $\mu$  ya que las tres ecuaciones no son independientes— es  $\mu(1, 1, 1)$ , que corresponde a la diagonal del cubo.

Las otras dos direcciones principales hay que buscarlas en el plano normal a ésta. Como el otro autovalor es una solución doble, serán cualesquiera dos direcciones de este plano que sean normales entre sí. (El tensor de inercia es por tanto cilíndrico.)

## 8.5. Campo tensorial de inercia

Tal y como se ha definido en el apartado 8.3, el tensor de inercia es un «tensor de punto», ligado al punto material  $O$  que se ha tomado como origen de coordenadas. Por lo tanto, al variar dicho punto, se obtendrá un tensor distinto, con lo que se define un *campo tensorial*. Si se toma como referencia el centro de masas  $G$ , obtendremos el llamado *tensor central de inercia*,  $\mathbf{I}_G$ :

$$\mathbf{I}_G = \int_{\mathcal{B}} (r_{GP}^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_{GP} \otimes \mathbf{r}_{GP}) \rho dV \quad (8.64)$$

Donde  $\mathbf{r}_{GP} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{GP}$ , vector desde  $G$  a un punto genérico  $P \in \mathcal{B}$ .



Calculemos la expresión de  $\mathbf{I}_O$  en función de  $\mathbf{I}_G$ ; empleando la descomposición<sup>8</sup>  $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}_{GP}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O &= \int_{\mathcal{B}} (r_P^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_P \otimes \mathbf{r}_P) \rho \, dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} (r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G) \rho \, dV + \int_{\mathcal{B}} (r_{GP}^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_{GP} \otimes \mathbf{r}_{GP}) \rho \, dV \\ &\quad + 2 \cdot \mathbf{1} \underbrace{\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r}_G \cdot \mathbf{r}_{GP}) \rho \, dV}_{=0} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_{GP} + \mathbf{r}_{GP} \otimes \mathbf{r}_G) \rho \, dV}_{=0} \end{aligned}$$

Las dos últimas integrales se anulan debido a que se reducen a factores constantes por integrales del tipo  $\int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_{GP} \rho \, dV = \mathbf{0}$ . Por lo tanto la expresión del campo tensorial de inercia resulta

$$\boxed{\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_G + M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G)}. \quad (8.65)$$

Desarrollando ésta en componentes:

$$I_{O,ij} = I_{G,ij} + M[r_G^2 \delta_{ij} - r_{G,i} r_{G,j}],$$

y matricialmente:

$$[\mathbf{I}_O] = [\mathbf{I}_G] + M(r_G^2 [\mathbf{1}] - \{\mathbf{r}_G\} \|\mathbf{r}_G\|).$$

Veamos a continuación algunas propiedades del campo tensorial de inercia.

a. *Ejes principales de inercia*

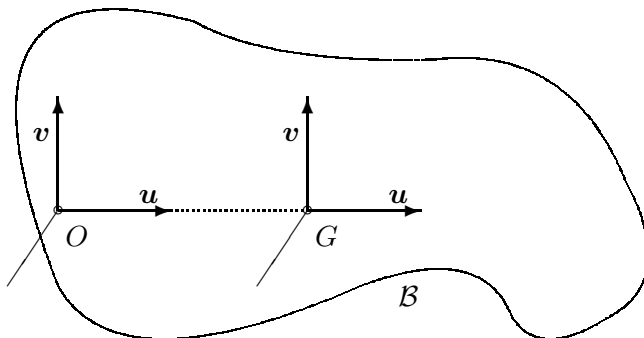
Sea un punto  $O$  sobre uno de los ejes principales de inercia en  $G$ . Entonces, tanto la dirección principal  $\mathbf{u} \|\mathbf{r}_G$  como las otras dos direcciones principales perpendiculares a  $\mathbf{u}$  son también principales en  $O$ . Para comprobar esto, distinguimos los dos casos, según que la dirección sea la del vector unitario  $\mathbf{u}$  o perpendicular a éste. En el primero,  $\mathbf{r}_G = \overline{OG} \mathbf{u}$ ; aplicando (8.65):

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{I}_G \cdot \mathbf{u} + M[r_G^2 \mathbf{u} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot (r_G^2 \mathbf{u})] \\ &= \lambda \mathbf{u} + M \underbrace{[r_G^2 \mathbf{u} - r_G^2 \mathbf{u} \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}_{=1}]}_{=0} \\ &= \lambda \mathbf{u} \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>empleamos la notación  $\mathbf{r}_P \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{OP}$  para denotar al vector desde el origen  $O$  a un punto  $P$  explicitado en el subíndice

Figura 8.5: ejes principales de inercia en un punto  $O$  sito sobre uno de los ejes principales por  $G$



En el caso de una dirección  $\mathbf{v}$  normal a  $\mathbf{r}_G$ , tal que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ , aplicando de nuevo (8.65) para  $\mathbf{I}_O$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{I}_G \cdot \mathbf{v} + M[r_G^2 \mathbf{v} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot (r_G^2 \mathbf{v})] \\ &= \lambda \mathbf{v} + M[r_G^2 \mathbf{v} - \underbrace{r_G^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}}_{=0}] \\ &= (\lambda + M r_G^2) \mathbf{v} \end{aligned}$$

En ambos casos la dirección principal de  $\mathbf{I}_G$  lo vuelve a ser de  $\mathbf{I}_O$ , con el mismo momento principal de inercia en el primer caso ( $\mathbf{u}$  paralela a  $\mathbf{r}_G$ ), y con el momento aumentado ( $I_{O,v} = I_{G,v} + M r_G^2$ ) en el segundo caso ( $\mathbf{v}$  perpendicular a  $\mathbf{r}_G$ ).

b. *Teorema de Steiner*

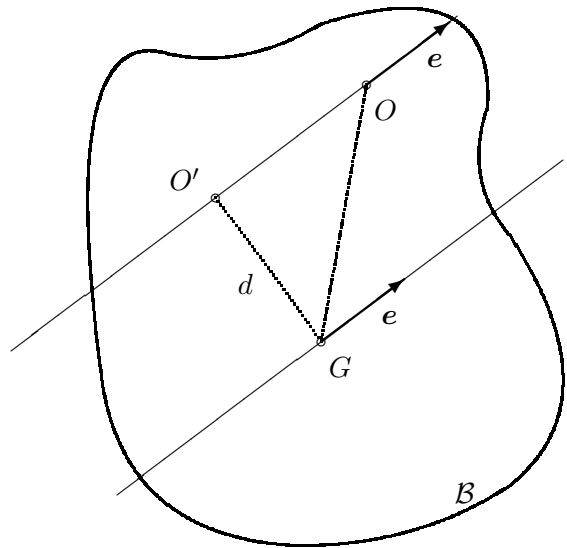
Sea un eje por el centro de masas ( $G, \mathbf{e}$ ) en el cual conocemos el momento de inercia  $I_{G,e}$ . El momento de inercia respecto de un eje ( $O, \mathbf{e}$ ) paralelo por otro punto  $O$  y que diste  $d$  del primero (figura 8.6) será

$$\begin{aligned} I_{O,e} &= \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}) \\ &= \mathbf{e} \cdot ([\mathbf{I}_G + M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G)] \cdot \mathbf{e}) \\ &= \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_G \cdot \mathbf{e}) + M[r_G^2 (\mathbf{e} \cdot (\mathbf{1} \cdot \mathbf{e})) - \mathbf{e} \cdot ((\mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G) \cdot \mathbf{e})] \\ &= I_{G,e} + M \underbrace{[r_G^2 - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_G)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_G)]}_{\overline{OO}^2} \\ & \qquad \qquad \qquad d^2 \end{aligned}$$

Se obtiene por tanto la expresión del *Teorema de Steiner*:

$$\boxed{I_{O,e} = I_{G,e} + M d^2}$$

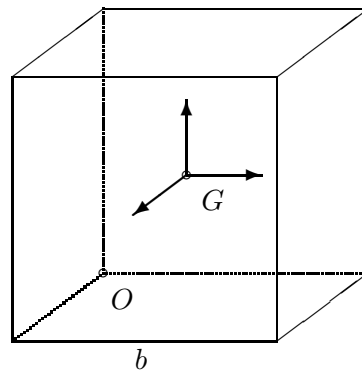
Figura 8.6: *Teorema de Steiner: momento de inercia para un eje  $(O, \mathbf{e})$  paralelo a  $(G, \mathbf{e})$*



Es inmediato ver que, para una dirección  $\mathbf{e}$  dada, el momento de inercia mínimo es el correspondiente a un eje  $(G, \mathbf{e})$  que pasa por  $G$ .

EJEMPLO 8.2: Continuando con el cubo del ejemplo 8.1 anterior se pretende ahora hallar el tensor de inercia en el centro de masas, respecto a unos ejes paralelos a las aristas del cubo, a partir del tensor de inercia obtenido antes en un vértice (8.63).

Figura 8.7: *Obtención del tensor central de inercia de un cubo respecto de su centro  $G$*



Aplicamos la expresión (8.65) del campo tensorial de inercia:

$$\mathbf{I}_G = \mathbf{I}_O - M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G).$$

El vector  $\mathbf{r}_G$  vale:

$$\|\mathbf{r}_G\| = \|b/2, b/2, b/2\| \Rightarrow \begin{cases} r_G^2 = \frac{3b^2}{4}; \\ r_{G,i} r_{G,j} = \frac{b^2}{4} \quad (\forall i, j). \end{cases}$$

luego:

$$[M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G)]_{ij} = M(r_G^2 \delta_{ij} - r_{G,i} r_{G,j}),$$

y su matriz de componentes es

$$M \frac{b^2}{4} \begin{pmatrix} 3-1 & -1 & -1 \\ -1 & 3-1 & -1 \\ -1 & -1 & 3-1 \end{pmatrix} = M \frac{b^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, a partir de (8.63),

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}_G] &= Mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix} - M \frac{b^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= Mb^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se comprueba pues que el triedro formado por las direcciones de las aristas es un triedro principal en  $G$ . Lo mismo se podría haber deducido por simetrías, ya que la dirección de cada arista en  $G$  forma un eje de simetría.

De hecho, por ser el tensor esférico (los tres momentos principales son iguales), la matriz de componentes es diagonal y cualquier eje es principal en  $G$ . El resultado habría sido el mismo para cualquier triedro de referencia cartesiano por el centro. El comportamiento de un cubo respecto al giro alrededor de su centro de masas es por lo tanto idéntico al de una esfera.

## 8.6. Rotación finita del sólido

### 8.6.1. Rotaciones infinitesimales y su composición

Supongamos un sólido  $\mathcal{B}$  con un punto fijo  $O$ , y un vector  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$  dirigido desde  $O$  a un punto  $P \in \mathcal{B}$ . Este vector está ligado al sólido, por lo que su matriz de coordenadas en una base ligada al mismo,  $\|\mathbf{x}\|^\circ = \|xyz\|$ ,

es constante a lo largo del movimiento. Por el contrario, si se considera un triedro fijo ( $OXYZ$ ), las coordenadas de  $\mathbf{x}$  variarán al moverse el sólido.

Supongamos que el movimiento es una rotación pequeña  $\epsilon$  alrededor de una determinada dirección. Sin pérdida de generalidad consideramos esta dirección según el eje  $Oz$ , por lo que la rotación la expresamos vectorialmente como  $\epsilon \mathbf{k}$ . Las nuevas coordenadas del vector  $\mathbf{x}$  en el triedro fijo después de esta rotación infinitesimal son (figura 8.8):

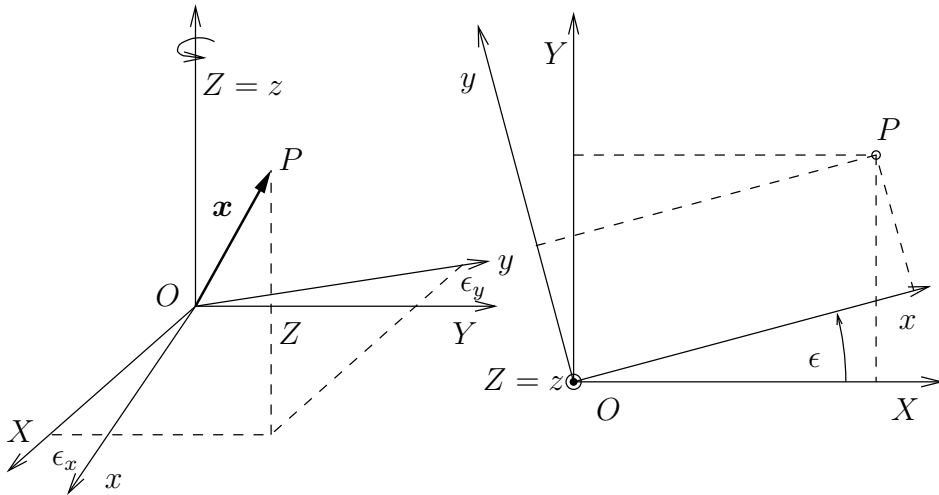


Figura 8.8: Rotación infinitesimal alrededor del eje  $z$ , en la que los ejes  $Oxyz$  giran solidariamente con el sólido, así como el vector posición  $\mathbf{x}$  de un punto  $P$  del sólido, mientras que los ejes  $OXYZ$  permanecen fijos.

$$\begin{aligned} X &= x \cos \epsilon - y \operatorname{sen} \epsilon = x - \epsilon y + \mathcal{O}(\epsilon^2); \\ Y &= x \operatorname{sen} \epsilon + y \cos \epsilon = y + \epsilon x + \mathcal{O}(\epsilon^2); \\ Z &= z. \end{aligned} \tag{8.66}$$

En forma matricial la expresión equivale a

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \epsilon \begin{Bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{Bmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{8.67}$$

En esta expresión, la matriz  $[\mathbf{J}_z] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  se denomina *generador de rotaciones infinitesimales alrededor de  $z$* , y corresponde a las coordenadas de

un tensor hemisimétrico  $\mathbf{J}_z$ . Suponiendo  $\epsilon$  suficientemente pequeño, la expresión (8.67), despreciando infinitésimos de orden dos o superior, equivale a la ecuación tensorial

$$\mathbf{x} = (\mathbf{1} + \epsilon \mathbf{J}_z) \cdot \mathbf{x}^\circ. \quad (8.68)$$

En esta expresión  $\mathbf{x} \equiv (X \ Y \ Z)^T$  es el vector de posición medido por un observador fijo, mientras que  $\mathbf{x}^\circ \equiv (x \ y \ z)^T$  es el *vector convectivo* de posición del punto  $P$ , es decir, un vector medido desde el punto de vista del observador móvil con el sólido, que es constante a lo largo del movimiento para una partícula dada. Este último vector puede interpretarse también como *coordenada material* de la partícula, ya que cada punto  $P \in \mathcal{B}$  está asociada a un vector constante  $\mathbf{x}^\circ$ .

Como todo tensor hemisimétrico,  $\mathbf{J}_z$  equivale a un producto vectorial (cf. apartado A.10). En esta ocasión el vector axial asociado es precisamente el versor del eje  $z$ :

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{J}_z \cdot \mathbf{a} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{a} \equiv (-a_y, a_x, 0)^T. \quad (8.69)$$

La ecuación (8.68) puede escribirse de forma incremental,

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ = \epsilon \mathbf{J}_z \cdot \mathbf{x}^\circ, \quad (8.70)$$

y en el límite infinitesimal ( $\epsilon \rightarrow d\phi$ ,  $\mathbf{x}^\circ \rightarrow \mathbf{x}$ )

$$d\mathbf{x} = d\phi \mathbf{J}_z \cdot \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad d\mathbf{x} = d\phi \mathbf{k} \wedge \mathbf{x}. \quad (8.71)$$

Definiendo la velocidad de rotación  $\boldsymbol{\Omega}_z \stackrel{\text{def}}{=} (d\phi/dt)\mathbf{k}$ , la ecuación anterior equivale a

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Omega}_z \wedge \mathbf{x}. \quad (8.72)$$

Como se ha dicho antes, la elección de la dirección  $z$  para la rotación no resta generalidad, siendo válida la expresión (8.72) para una rotación según una dirección cualquiera  $\boldsymbol{\Omega}$ . El razonamiento seguido establece por tanto la equivalencia entre una rotación infinitesimal y el campo de velocidades del sólido (4.10), estando ambas definidas por una aplicación hemisimétrica o equivalentemente por un producto vectorial.

**Composición de dos rotaciones infinitesimales.**— Supongamos ahora dos rotaciones infinitesimales sucesivas,

$$\begin{aligned} R_{\epsilon_1} : \mathbf{x}^\circ &\mapsto \mathbf{x}^1 = (\mathbf{1} + \epsilon_1 \mathbf{J}_1) \cdot \mathbf{x}^\circ; \\ R_{\epsilon_2} : \mathbf{x}^1 &\mapsto \mathbf{x}^2 = (\mathbf{1} + \epsilon_2 \mathbf{J}_2) \cdot \mathbf{x}^1. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de  $\mathbf{x}^1$  y despreciando infinitésimos de orden superior al primero, la composición de las dos puede expresarse como

$$\begin{aligned} R_{\epsilon_2} \circ R_{\epsilon_1} : \mathbf{x}^\circ \mapsto \mathbf{x}^2 &= (\mathbf{1} + \epsilon_1 \mathbf{J}_1 + \epsilon_2 \mathbf{J}_2) \cdot \mathbf{x}^\circ + \epsilon_1 \epsilon_2 (\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{J}_1) \cdot \mathbf{x}^\circ \\ &\approx (\mathbf{1} + \epsilon_1 \mathbf{J}_1 + \epsilon_2 \mathbf{J}_2) \cdot \mathbf{x}^\circ. \end{aligned} \quad (8.73)$$

Esto puede interpretarse como una rotación infinitesimal suma de las dos,

$$\epsilon_1 \mathbf{J}_1 + \epsilon_2 \mathbf{J}_2. \quad (8.74)$$

De forma equivalente, puesto que la primera rotación equivale al producto vectorial por  $\epsilon_1$  y la segunda por  $\epsilon_2$ , se comprueba igualmente que la composición de las dos equivale al producto vectorial por la suma de ambos vectores,  $\epsilon_1 + \epsilon_2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 &= \mathbf{x}^\circ + \epsilon_1 \wedge \mathbf{x}^\circ; \\ \mathbf{x}^2 &= \mathbf{x}^1 + \epsilon_2 \wedge \mathbf{x}^1 \\ &= \mathbf{x}^\circ + (\epsilon_1 + \epsilon_2) \wedge \mathbf{x}^\circ + \underbrace{\epsilon_2 \wedge (\epsilon_1 \wedge \mathbf{x}^\circ)}_{\approx 0}. \end{aligned}$$

Tanto la suma de tensores de orden dos como la suma de vectores son operaciones conmutativas, por lo que igualmente *la composición de rotaciones infinitesimales es conmutativa*, no importando el orden en que se produzca. Como se ha dicho antes, esta propiedad encuentra su equivalente en el campo de velocidades del sólido (4.5), en el que la composición de dos rotaciones por  $O$  es otra rotación con velocidad angular suma de las anteriores, no importando el orden de los sumandos en esta adición.

### 8.6.2. Composición de rotaciones finitas

Al contrario que las rotaciones infinitesimales, *la composición de rotaciones finitas no es una operación conmutativa*. Esto se puede comprobar fácilmente aplicando sucesivamente a un sólido dos rotaciones finitas elementales según ejes distintos, en diferente orden (figura 8.9). Esta falta de conmutatividad se debe a que, como se verá a continuación, las rotaciones finitas se caracterizan como producto por un tensor de rotación. La composición de rotaciones equivale pues al producto de tensores, operación que no es conmutativa.

De forma matricial, las componentes del vector rotado vienen dadas por el producto por una matriz ortogonal, y la composición de rotaciones por el producto de las matrices correspondientes. Comenzaremos por desarrollar esta interpretación matricial a través del cambio de base asociado a la rotación.

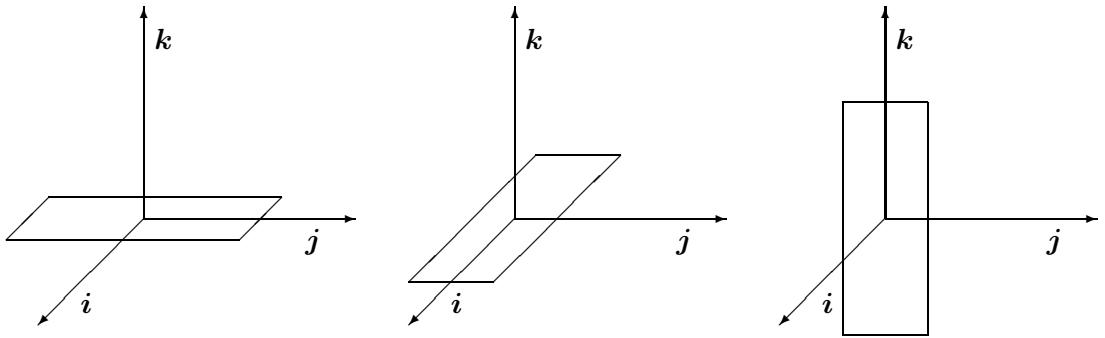
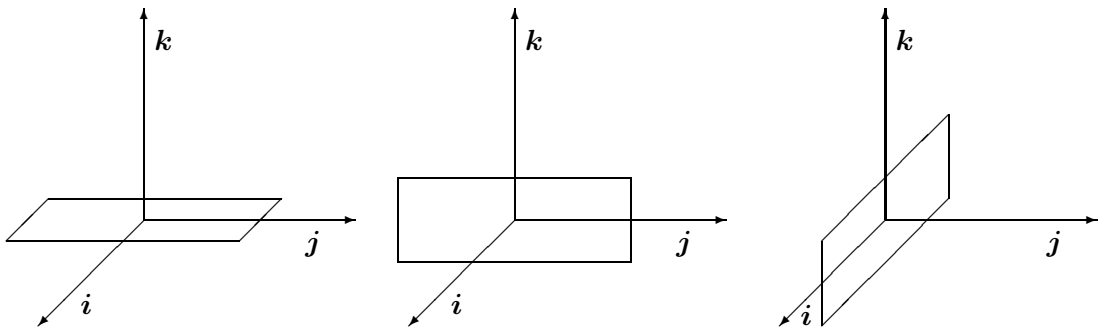
a) rotación  $\frac{\pi}{2}\mathbf{k}$  seguida de  $\frac{\pi}{2}\mathbf{j}$ .b) rotación  $\frac{\pi}{2}\mathbf{j}$  seguida de  $\frac{\pi}{2}\mathbf{k}$ .

Figura 8.9: Las rotaciones finitas no son conmutativas: en el caso a) se realiza primero la rotación  $(\pi/2)\mathbf{k}$  seguida de  $(\pi/2)\mathbf{j}$ ; en el caso b)  $(\pi/2)\mathbf{j}$  seguida de  $(\pi/2)\mathbf{k}$ , siendo el resultado claramente diferente.

### 8.6.3. La Rotación finita como cambio de base

Sea  $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  una base ortonormal ligada al sólido (*triedro del cuerpo*) y  $(O; \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  una base ortonormal fija (*triedro fijo*). Se puede interpretar la rotación del sólido a partir del cambio de base entre ambos triedros.



Supongamos este definido por una matriz  $[\mathbf{R}]$ , de forma que<sup>9</sup>:

$$\|i j k\| = \|\mathbf{I J K}\| [\mathbf{R}]. \quad (8.75)$$

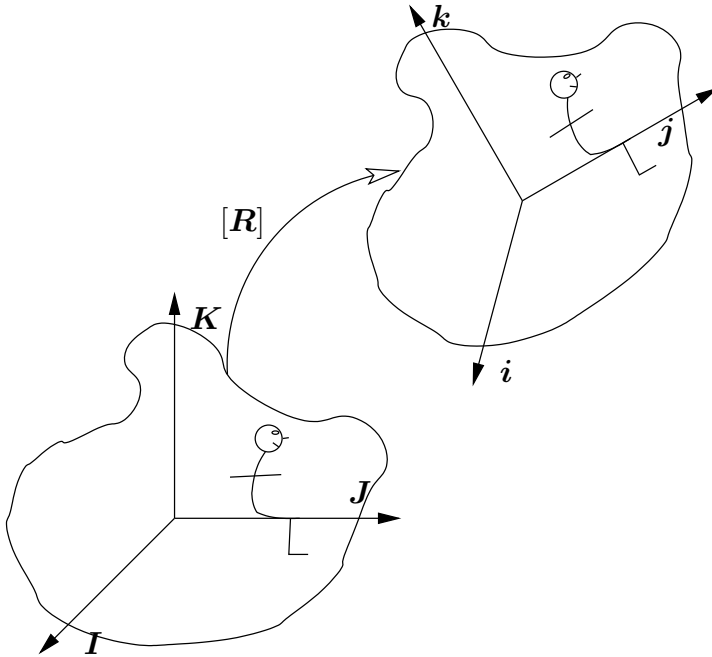


Figura 8.10: La rotación finita equivale a un cambio de base definido por la matriz  $[\mathbf{R}]$ , que permita pasar del triedro fijo  $\|\mathbf{I J K}\|$  al triedro del cuerpo  $\|i j k\|$

La relación de cambio de coordenadas asociada, denominando  $(X, Y, Z)$  a las coordenadas en el triedro fijo y  $(x, y, z)$  las del triedro del cuerpo, es

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \quad (8.76)$$

La rotación del sólido puede por tanto interpretarse como un cambio de base, definido por la matriz  $[\mathbf{R}]$ , que multiplica al vector columna de coordenadas «convectivas» para obtener las nuevas coordenadas. En esta interpretación, se trataría de distintas coordenadas (según dos triedros diferentes) para un mismo vector.

<sup>9</sup>Recordemos que, según A.5, otra manera de definir el cambio de base es mediante las siguientes expresiones de transformación de los vectores de la misma:  $i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I}$ ;  $j = \mathbf{R} \cdot \mathbf{J}$ ;  $k = \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}$ , donde el tensor  $\mathbf{R}$  es aquel cuya matriz de coordenadas en la base  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  es precisamente  $[\mathbf{R}]$ , la misma matriz de la expresión (8.75).

La superposición de dos rotaciones sucesivas, asociadas a dos matrices  $[\mathbf{R}_1]$  y  $[\mathbf{R}_2]$ , equivale al producto de las mismas<sup>10</sup>,  $[\mathbf{R}_2][\mathbf{R}_1]$ . Como se sabe, el producto de matrices *no es una operación conmutativa*:  $[\mathbf{R}_1][\mathbf{R}_2] \neq [\mathbf{R}_2][\mathbf{R}_1]$ .

La condición de que ambos triedros sean ortonormales obliga a que la matriz de cambio sea ortogonal,  $[\mathbf{R}]^T = [\mathbf{R}]^{-1}$  (cf. apéndice A). La matriz  $[\mathbf{R}]$  es de dimensión  $3 \times 3$  y tiene por tanto 9 componentes, pero la propiedad de ortogonalidad impone 6 condiciones escalares:

$$\sum_{k=1}^3 R_{ik} R_{jk} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \leq j), \quad (8.77)$$

por lo que el conjunto de dichas matrices se podrá por tanto representar mediante  $9 - 6 = 3$  parámetros independientes.

De esta manera, la orientación del triedro del cuerpo  $\|\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}\|$  queda definida por tres grados de libertad. Estos caracterizan el cambio del triedro fijo  $\|\mathbf{I} \mathbf{J} \mathbf{K}\|$  al triedro del cuerpo  $\|\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}\|$ , que se mueve con el sólido y define por tanto su orientación.

#### 8.6.4. La Rotación finita como transformación ortogonal

El movimiento más general de un sólido rígido con un punto fijo se representa mediante una transformación lineal  $\mathbf{R}$ , es decir, un tensor de orden dos (cf. apéndice A). Veremos además que este tensor es ortogonal propio.

Sea  $\mathbf{x}^\circ$  el vector posición de una partícula del sólido, medido desde el punto fijo  $O$ , en un instante inicial que tomaremos como *configuración de referencia*. Este vector  $\mathbf{x}^\circ$  se denomina *convectivo*, siendo constante a lo largo del movimiento para una partícula dada del sólido (siempre representa el vector posición en la configuración de referencia). De forma equivalente,  $\mathbf{x}^\circ$  puede considerarse como el vector posición medido por un observador móvil con el sólido, para el que la situación de los puntos del sólido es fija.

Por otra parte, sea  $\mathbf{x}$  el vector posición de un punto del sólido, para un observador fijo o inercial, en un instante genérico del movimiento, que denominaremos *configuración rotada*. La relación con el vector posición con-

<sup>10</sup>En efecto, si  $\{\mathbf{x}^1\} = [\mathbf{R}_1]\{\mathbf{x}^0\}$ ,  $\{\mathbf{x}^2\} = [\mathbf{R}_2]\{\mathbf{x}^1\} = [\mathbf{R}_2][\mathbf{R}_1]\{\mathbf{x}^0\}$

vectivo  $\mathbf{x}^\circ$  se establece mediante un tensor<sup>11</sup>  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ \quad \Rightarrow \quad x_i = R_{ij}x_j^\circ. \quad (8.78)$$

Es fácil comprobar porqué esta transformación debe ser ortogonal: al tratarse de un sólido rígido, la distancia al punto fijo tiene que coincidir en ambas configuraciones, la inicial y la rotada; desarrollando esta condición,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} &= (\mathbf{x}^\circ \cdot \mathbf{R}^\top) \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ) = \mathbf{x}^\circ \cdot ((\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{x}^\circ) \\ &= \mathbf{x}^\circ \cdot \mathbf{x}^\circ. \end{aligned}$$

Se deduce por tanto que el tensor  $\mathbf{R}$  debe cumplir la condición de ortogonalidad (cf. apéndice A):

$$\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{R} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top. \quad (8.79)$$

Tomando determinantes en la expresión anterior,

$$\det(\mathbf{R}^\top) \det(\mathbf{R}) = (\det(\mathbf{R}))^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{R}) = \pm 1. \quad (8.80)$$

De las dos posibilidades que se ofrecen para el signo del determinante, debe tomarse  $+1$ , lo que corresponde a una *transformación ortogonal propia*. Las transformaciones ortogonales cuyo determinante vale  $-1$  se denominan impropias, y producen, además de una rotación, una inversión en los ejes equivalente a la imagen reflejada en un espejo, lo que conllevaría inversión de los volúmenes.

Resumiendo lo expuesto en este apartado y anterior (8.6.3), es posible interpretar la rotación  $\mathbf{R}$  desde dos puntos de vista distintos:

1. *Rotación activa*: El tensor  $\mathbf{R}$  transforma el vector  $\mathbf{x}^\circ$  en otro vector distinto  $\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ$ .
2. *Rotación pasiva*: El tensor  $\mathbf{R}$ , o su matriz de coordenadas asociada  $[\mathbf{R}] = [R_{ij}]$ , define un cambio de base, del triedro fijo  $(\mathbf{E}_i) \equiv (\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  al triedro del cuerpo  $(\mathbf{e}_i) \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , según las relaciones de cambio (8.75):  $\mathbf{e}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_i = R_{ji}\mathbf{E}_j$ . Denominando  $\{\mathbf{x}\}^\circ = (xyz)^\top$  a las coordenadas del vector posición de un punto en el triedro del cuerpo y  $\{\mathbf{x}\} = (XYZ)^\top$  a las del triedro fijo, la relación entre éstas debe ser (8.76):  $\{\mathbf{x}\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{x}\}^\circ$ .

<sup>11</sup>Puede demostrarse que esta transformación es necesariamente lineal, teniendo en cuenta en primer lugar la conservación de las distancias relativas entre  $\mathbf{x}$  y su producto por un escalar  $\alpha\mathbf{x}$ , que conduce a  $\mathbf{R}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{R}(\mathbf{x})$ ; por otra parte, la conservación de los ángulos entre  $\mathbf{x}_1$  y  $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$  conduce a  $\mathbf{R}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{R}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_2)$ , por lo que se puede identificar con un tensor.

Nótese que en la acepción como rotación pasiva, se consideran distintas coordenadas para un mismo vector, en dos bases distintas: el sólido permanece mientras es el triedro de referencia el que rota. Por el contrario, la interpretación activa de la rotación considera dos vectores distintos: es el propio sólido el que rota.

La interpretación según uno u otro punto de vista es equivalente en cuanto a las expresiones en coordenadas, pudiendo adoptarse la que más convenga en cada caso. En lo que sigue consideraremos en principio la interpretación *activa*.

Por último, añadamos que una forma explícita de obtener el tensor de rotación, a partir de los vectores unitarios de los triedros fijo y rotado, es:

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{E}_k \otimes \mathbf{e}_k = \mathbf{I} \otimes \mathbf{i} + \mathbf{J} \otimes \mathbf{j} + \mathbf{K} \otimes \mathbf{k}. \quad (8.81)$$

### 8.6.5. Teorema de Euler

*«El desplazamiento más general de un sólido con un punto fijo es un giro alrededor de algún eje».*

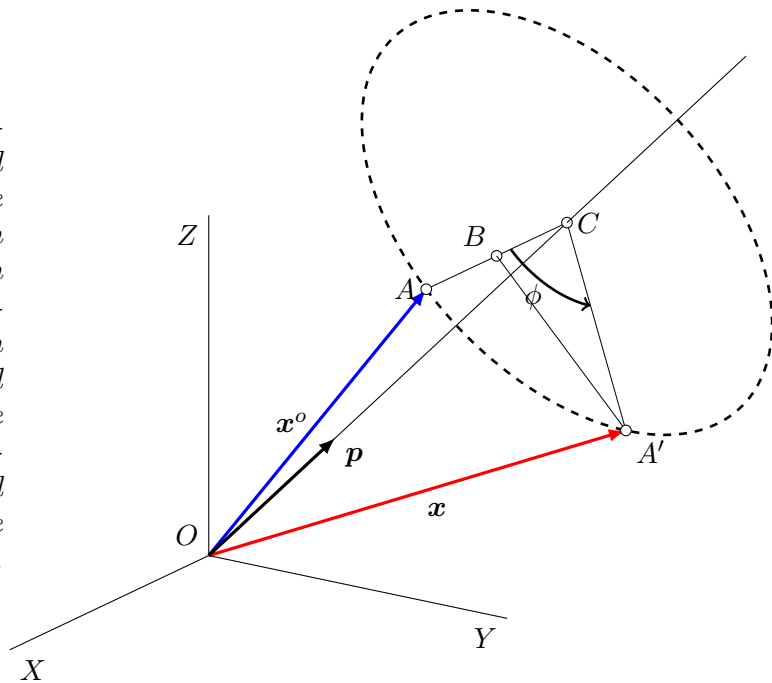
Este enunciado puede parecer trivial a primera vista, teniendo en cuenta que a menudo hemos asimilado los términos «movimiento de un sólido con un punto fijo» con «rotación de un sólido». Sin embargo, una lectura más cuidadosa permite comprobar que no resulta obvio. El significado que tiene este teorema es que, para todo movimiento de un sólido con un punto fijo, existe un determinado eje de rotación  $(O, \mathbf{p})$  que produce el mismo efecto girando el sólido alrededor de él un determinado ángulo  $\phi$ . Como ejemplo ilustrativo, considérense las dos rotaciones compuestas definidas en la figura 8.9, en las que no resulta inmediato identificar para cada una de ellas el eje de rotación resultante.

DEMOSTRACIÓN.— Si el movimiento es una rotación alrededor de un eje, los puntos del mismo no sufrirán cambio alguno, mientras que los puntos fuera del eje efectuarán un giro de magnitud angular finita  $\phi$  alrededor del mismo. Por tanto, el versor  $\mathbf{p}$  que define la dirección del eje debe ser invariante en la transformación definida por  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}.$$

Esta ecuación indica que  $\mathbf{p}$  debe ser un vector propio de  $\mathbf{R}$ , con autovalor  $\lambda = +1$ . El teorema quedará demostrado por tanto si probamos que  $\mathbf{R}$  posee

Figura 8.11: Teorema de Euler: el desplazamiento de un sólido con un punto fijo  $O$  es un giro de valor  $\phi$  alrededor de algún eje  $(O, \mathbf{p})$ . Para el punto  $A$  el giro se desarrolla alrededor de  $C$ , por el cual el punto  $A$  se transforma en  $A'$ , y  $\mathbf{x}^\circ$  en  $\mathbf{x}$ .



dicho autovalor, en cuyo caso la dirección buscada del eje de giro será la del vector propio correspondiente. Para ello partimos de la igualdad trivial siguiente, que se deduce inmediatamente de la condición de ortogonalidad (8.79):

$$(\mathbf{R} - \mathbf{1}) \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{1} - \mathbf{R}^T;$$

tomando determinantes,

$$|\mathbf{R} - \mathbf{1}| \cdot |\mathbf{R}^T| = |\mathbf{1} - \mathbf{R}^T|;$$

considerando en esta expresión que el determinante de un tensor es igual al del traspuesto, y que el determinante de una rotación propia vale  $+1$ ,<sup>12</sup>

$$|\mathbf{1} - \mathbf{R}^T| = (-1)^3 |\mathbf{R}^T - \mathbf{1}| = -|\mathbf{R} - \mathbf{1}|,$$

llegándose finalmente a

$$|\mathbf{R} - \mathbf{1}| = 0.$$

Esta igualdad garantiza el cumplimiento de la ecuación característica  $(|\mathbf{R} - \lambda \mathbf{1}| = 0)$  para el autovalor  $\lambda = +1$ . Admitiendo además que el autovalor

<sup>12</sup>Se cumple  $|\mathbf{R}^T| = |\mathbf{R}| = +1$  y  $|\mathbf{R}^T - \mathbf{1}| = |\mathbf{R} - \mathbf{1}|$

$\lambda = +1$  es único, cuestión que no demostraremos por no prolongar esta discusión, quedaría probado el teorema.  $\square$

El teorema de Euler es coherente con el comentario realizado antes sobre los tres grados de libertad que definen la rotación finita debido a las condiciones de ortogonalidad (8.77). Parece lógico buscar una correspondencia de estos tres parámetros con algún vector del espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ . Este podría ser el denominado *vector de rotación de Euler*, cuya dirección es  $\mathbf{p}$  y el módulo es el ángulo girado  $\phi$ .

A pesar de esto, debemos insistir en que no se puede considerar los movimientos del sólido con un punto fijo (o «rotaciones») como vectores, lo que implicaría su aditividad conmutativa para la composición de dos rotaciones. Hemos visto que la composición de dos rotaciones finitas consecutivas no es conmutativa, por lo que éstas no poseen estructura de espacio vectorial. Se debe seguir considerando a éstas como transformaciones lineales ortogonales (definidas mediante tensores o matrices ortogonales) y no como vectores, a pesar de que estén caracterizadas por tres parámetros que podrían servir para definir un vector en  $\mathbb{R}^3$ . Para precisar este aspecto y no inducir a error se suele decir que  $\mathbf{p}$  es un «pseudo-vector»<sup>13</sup>.

Un corolario del Teorema de Euler es el *Teorema de Chasles*, cuyo enunciado afirma:

*«El desplazamiento más general de un sólido rígido es una traslación más una rotación».*

La comprobación es inmediata, ya que al liberar la ligadura del punto fijo se introducen tres grados de libertad de traslación de dicho punto, que no afectan a la orientación del sólido. Chasles propuso también un enunciado más fuerte de este teorema, que no demostraremos aquí, según el cual es posible escoger un origen de coordenadas de forma que los ejes de traslación y rotación coincidan, siendo entonces el movimiento el de un sacacorchos (helicoidal).

### 8.6.6. Relación entre rotaciones finitas e infinitesimales

#### Generación del tensor de rotación $R$ integrando las rotaciones infinitesimales

Sea una rotación finita de ángulo  $\phi$  alrededor de cierto eje, que para concretar tomaremos como el  $Oz$ , sin pérdida de generalidad. Es decir,

<sup>13</sup>Las rotaciones finitas forman un grupo no conmutativo, denominado  $SO(3)$  o *grupo especial ortogonal*.

la rotación finita puede caracterizarse por el vector de Euler asociado  $\phi\mathbf{k}$ . Podemos imaginar el giro completo  $\phi$  como composición de  $n$  giros infinitesimales  $\phi/n$ ,  $n \rightarrow \infty$ . En el límite, cada uno de estos giros elementales está asociado a la transformación  $(\mathbf{1} + \frac{\phi}{n}\mathbf{J}_z)$ , siendo  $\mathbf{J}_z$  el tensor hemisimétrico asociado al vector axial  $\mathbf{k}$  (ver ecuación 8.69). La composición de estos giros elementales se asocia al producto de todos los tensores elementales correspondientes,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbf{1} + \frac{\phi}{n}\mathbf{J}_z \right)^n = \mathbf{1} + \phi\mathbf{J}_z + \frac{\phi^2}{2}\mathbf{J}_z^2 + \dots + \frac{\phi^n}{n!}\mathbf{J}_z^n + \dots \quad (8.82)$$

Este desarrollo, por analogía con la función exponencial de exponente real<sup>14</sup>, se define como la exponencial del tensor  $\phi\mathbf{J}_z$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbf{1} + \frac{\phi}{n}\mathbf{J}_z \right)^n = \sum_0^{\infty} \frac{\phi^n}{n!}\mathbf{J}_z^n = e^{\phi\mathbf{J}_z}. \quad (8.83)$$

En el caso que nos ocupa, se puede comprobar sumando la serie (8.82) que el desarrollo de la exponencial da lugar a la siguiente matriz de componentes, que corresponde a un giro  $\phi\mathbf{k}$ :

$$\left[ e^{\phi\mathbf{J}_z} \right] = [\mathbf{R}(\phi\mathbf{k})] = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 \\ \text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.84)$$

Otra forma de justificar la exponencial de (8.83) es considerando que una rotación infinitesimal elemental se puede expresar como

$$d\mathbf{x} = d\phi \mathbf{k} \wedge \mathbf{x} = d\phi \mathbf{J}_z \cdot \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\phi} = \mathbf{J}_z \cdot \mathbf{x}. \quad (8.85)$$

Esta ecuación diferencial vectorial es similar a la siguiente ecuación diferencial escalar, cuya integral es la exponencial:

$$\frac{dy}{dx} = ay \quad \Rightarrow \quad y = y_0 e^{ax}. \quad (8.86)$$

Análogamente, la solución de la ecuación (8.85) se puede escribir también como una exponencial,

$$\mathbf{x} = e^{\phi\mathbf{J}_z} \cdot \mathbf{x}^{\circ}. \quad (8.87)$$

Comprobamos que se obtiene el mismo resultado que antes (8.83) para el tensor de rotación.

<sup>14</sup>recordemos:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n = e^x$

### Obtención de la velocidad angular $\Omega$ derivando el tensor de rotación $R$

Desde el otro punto de vista, si derivamos la expresión de la transformación de rotación (8.78) podemos obtener también una relación entre la rotación finita y la rotación infinitesimal, caracterizada esta última por la velocidad de rotación. En efecto, teniendo en cuenta que en (8.78) el vector  $\mathbf{x}^\circ$  que representa la posición de una partícula para un observador ligado al sólido es constante:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x}^\circ. \quad (8.88)$$

Podemos eliminar ahora  $\mathbf{x}^\circ = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x}$ , resultando

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x}) = (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{x}. \quad (8.89)$$

El operador  $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$  que aparece en esta fórmula es hemisimétrico, como se comprueba fácilmente<sup>15</sup>, por lo que cabe asociarlo al producto vectorial por un vector axial asociado (cf. apartado A.10), que denominamos  $\Omega$ . Al operador hemisimétrico lo denominamos  $\widehat{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$ :

$$(\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{x} = \widehat{\Omega} \cdot \mathbf{x} = \Omega \wedge \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x}. \quad (8.90)$$

El resultado final es por tanto

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \Omega \wedge \mathbf{x},$$

expresión que coincide con el campo de velocidades de un sólido rígido respecto del punto  $O$  fijo, véase (4.10), lo que justifica la consideración de dicho vector axial  $\Omega$  como velocidad de rotación del sólido.

#### 8.6.7. Parametrización de la rotación; fórmula de Rodrigues y parámetros de Euler

La rotación queda definida por la ecuación (8.78):

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ; \quad (8.91)$$

veamos cómo se puede expresar el tensor  $\mathbf{R}$  correspondiente a esta transformación de manera explícita, a partir de la rotación  $(\mathbf{p}, \phi)$  definida por el teorema de Euler.

<sup>15</sup>En efecto:  $\mathbf{0} = \frac{d}{dt} \mathbf{1} = \frac{d}{dt} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T) = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^T = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T)^T$ .



Refiriéndose a la figura 8.11 podemos expresar los vectores posición mediante las igualdades vectoriales siguientes:

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}_{OC} + \mathbf{r}_{CA'}; \tag{8.92}$$

$$\mathbf{x}^\circ = \mathbf{r}_{OC} + \mathbf{r}_{CA}. \tag{8.93}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{OC} &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}; \mathbf{r}_{CA'} &&= \mathbf{r}_{CB} + \mathbf{r}_{BA'} \\ &= [\mathbf{x}^\circ - (\mathbf{x}^\circ \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}] \cos \phi + (\mathbf{p} \wedge \mathbf{x}^\circ) \sin \phi; \end{aligned}$$

desarrollando estos términos mediante (8.92) y (8.93),

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^\circ \cos \phi + (\mathbf{x}^\circ \cdot \mathbf{p})\mathbf{p} (1 - \cos \phi) + (\mathbf{p} \wedge \mathbf{x}^\circ) \sin \phi \tag{8.94}$$

expresión que constituye la denominada *fórmula de Euler-Rodrigues*. De forma equivalente, también se puede expresar como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^\circ \cdot \cos \phi + (\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}^\circ (1 - \cos \phi) + (\mathbf{p} \wedge \mathbf{x}^\circ) \sin \phi \tag{8.95}$$

De aquí se deduce inmediatamente el operador de la transformación correspondiente que es

$$\mathbf{R} = \underbrace{\mathbf{1} \cos \phi}_{\substack{\text{tensor} \\ \text{diagonal}}} + \underbrace{\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} (1 - \cos \phi)}_{\substack{\text{tensor} \\ \text{simétrico}}} + \underbrace{\widehat{\mathbf{p}} \sin \phi}_{\substack{\text{tensor} \\ \text{hemisimétrico}}} \tag{8.96}$$

donde el símbolo  $\widehat{\mathbf{p}}$  representa el tensor definido por la aplicación hemisimétrica correspondiente al producto vectorial por  $\mathbf{p}$ :

$$\forall \mathbf{a}, \quad \widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{a}.$$

Se comprueba pues en (8.96) que el tensor ortogonal  $\mathbf{R}$  de la rotación resultante se descompone en tres partes: una diagonal, otra simétrica, y otra hemisimétrica<sup>16</sup>.

Cuando el ángulo girado  $\phi$  es muy pequeño, desarrollando en serie ( $\sin \phi$ ) y ( $\cos \phi$ ) y despreciando infinitésimos de segundo orden, la parte diagonal se convierte en la identidad; la parte simétrica, afectada de  $(1 - \cos \phi)$ , se hace despreciable; y la parte hemisimétrica, afectada de  $\sin \phi \rightarrow \phi$ , se convierte

<sup>16</sup>Otras expresiones equivalentes de la fórmula de Euler-Rodrigues son  $\mathbf{R} = \mathbf{1} + (1 - \cos \phi)\widehat{\mathbf{p}}^2 + \sin \phi \widehat{\mathbf{p}}$ , o  $\mathbf{R} = \mathbf{1} + \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\phi/2)}{(\phi/2)^2} \widehat{\phi}^2 + \frac{\sin \phi}{\phi} \widehat{\phi}$ , siendo  $\phi = \phi \mathbf{p}$ .

en el producto vectorial por el vector de rotación infinitesimal (dirección  $\mathbf{p}$  y módulo  $\phi$  infinitésimo). Por lo tanto, el incremento infinitesimal de  $\mathbf{x}$ , para una rotación elemental, equivale a un producto vectorial. Esto coincide con la descripción antes realizada para giros infinitesimales (apartado 8.6.1).

Para definir la rotación se podrían emplear los 4 parámetros que definen el vector de rotación de Euler:

$$\{\phi, p_1, p_2, p_3\}, \quad (8.97)$$

estando sujetos a la ligadura que expresa que el módulo de  $\mathbf{p}$  es la unidad:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (8.98)$$

Esta manera de caracterizar el movimiento del sólido con un punto fijo, en función del ángulo girado y la dirección del eje de rotación, resulta particularmente intuitiva y fácil de visualizar. Sin embargo no es la única forma para describir la rotación, ni tampoco la más conveniente en la práctica, debido a que en general no es inmediata la obtención de la dirección de rotación  $\mathbf{p}$ .

Existen otras parametrizaciones posibles para definir la rotación del sólido. Una de las más empleadas es la definida por los denominados *parámetros de Euler*:

$$e_0 = \cos \frac{\phi}{2}; \quad e_1 = p_1 \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}; \quad e_2 = p_2 \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}; \quad e_3 = p_3 \operatorname{sen} \frac{\phi}{2}.$$

Estos cuatro parámetros constituyen un *cuaternio* y se hallan sujetos a la ligadura

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1,$$

equivaliendo por tanto a 3 grados de libertad. Los parámetros de Euler resultan ventajosos para su uso en modelos numéricos de cálculo, siendo empleados en numerosos programas de ordenador para cinemática y dinámica de mecanismos.

Por último, otra forma para definir la rotación finita es la caracterizada por los *ángulos de Euler*, que será la que emplearemos de manera preferente en este curso, por ser la más conveniente para el desarrollo analítico de las expresiones.

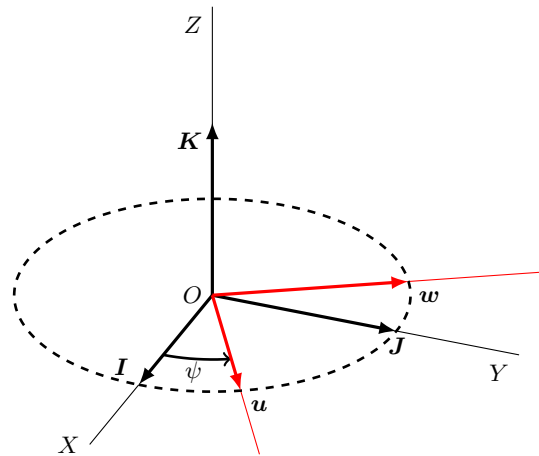
### 8.6.8. Ángulos de Euler

La manera que emplearemos en lo sucesivo para caracterizar la orientación del sólido será mediante los *ángulos de Euler*. Definiremos estos a

partir de tres rotaciones elementales, que interpretaremos como sucesivos cambios de base (apartado 8.6.3), partiendo del triedro fijo  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ , hasta obtener el triedro del cuerpo  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Estos cambios son rotaciones del triedro efectuadas por orden según el esquema «313»: primer giro respecto del eje 3, seguido de un giro respecto del eje transformado 1, y por último un nuevo giro alrededor del nuevo eje 3.

**Precesión,  $\psi\mathbf{K}$ .**— En primer lugar se efectúa un giro de magnitud  $\psi$  en torno al eje  $\mathbf{K}$ , pasando del triedro  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  al triedro  $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K})$ . Refiriéndose a la figura 8.12, las expresiones de los vectores del nuevo triedro son:

Figura 8.12: rotación  $\psi\mathbf{K}$  (precesión)



$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{I} \cos \psi + \mathbf{J} \operatorname{sen} \psi, \\ \mathbf{w} &= -\mathbf{I} \operatorname{sen} \psi + \mathbf{J} \cos \psi. \end{aligned}$$

La expresión matricial equivalente es

$$\|\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}\| = \|\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\| \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & 0 \\ \operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_\psi]}.$$

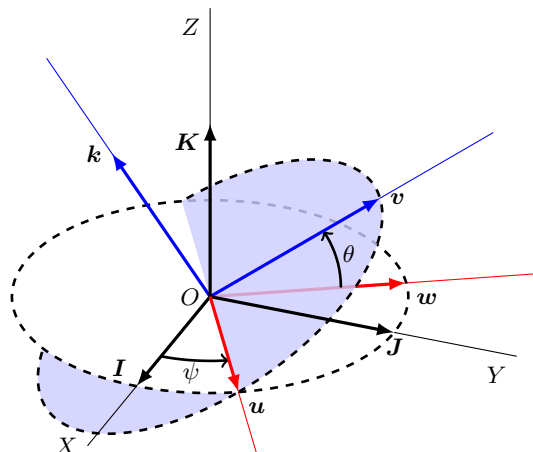
La matriz de rotación inversa es:

$$[\mathbf{R}_\psi]^{-1} = [\mathbf{R}_\psi]^T = \begin{pmatrix} \cos \psi & \operatorname{sen} \psi & 0 \\ -\operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

equivalente a un giro de  $(-\psi)$  alrededor de  $\mathbf{K}$ .

**Nutación,  $\theta\mathbf{u}$ .**— Se define como un giro de ángulo  $\theta$  en torno al eje  $\mathbf{u}$ , obteniendo a partir del triedro  $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K})$  el llamado *triedro intermedio*,  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$ . La operación queda ilustrada en la figura 8.13, siendo la expresión matricial del cambio:

Figura 8.13: rotación  $\theta\mathbf{u}$  (nutación)



$$\|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\| = \|\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}\| \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_\theta]}.$$

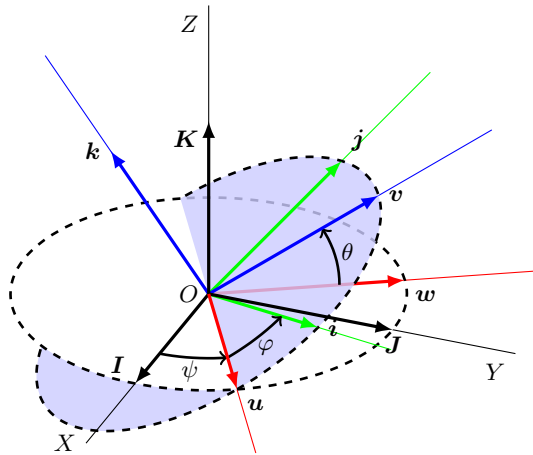
**Rotación propia,  $\varphi\mathbf{k}$ .**— La última operación consiste en un giro de magnitud  $\varphi$  alrededor del eje  $\mathbf{k}$ , obteniendo finalmente a partir del triedro intermedio  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$  el *triedro del cuerpo*  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  (figura 8.14). La expresión matricial es:

$$\|\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\| = \|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\| \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi & 0 \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[\mathbf{R}_\varphi]}.$$

La rotación total hasta obtener finalmente el triedro del cuerpo será la composición de las tres rotaciones consecutivas:

$$\left. \begin{aligned} \|\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}\| &= \|\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\| \cdot [\mathbf{R}_\psi] \\ \|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\| &= \|\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{k}\| \cdot [\mathbf{R}_\theta] \\ \|\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\| &= \|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\| \cdot [\mathbf{R}_\varphi] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\| = \|\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\| \cdot [\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi],$$

Figura 8.14: rotación  $\varphi \mathbf{k}$  (rotación propia)



por tanto la matriz de rotación total es<sup>17</sup>

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi].$$

Su expresión en función de los ángulos de Euler resulta

$$[\mathbf{R}] = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \text{sen } \psi \cos \theta \text{sen } \varphi; & -\cos \psi \text{sen } \varphi - \text{sen } \psi \cos \theta \cos \varphi; & \text{sen } \psi \text{sen } \theta \\ \text{sen } \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \text{sen } \varphi; & -\text{sen } \psi \text{sen } \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi; & -\cos \psi \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta \text{sen } \varphi; & \text{sen } \theta \cos \varphi; & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (8.99)$$

Dejamos como ejercicio sugerido al lector la comprobación de que se verifica la condición de ortogonalidad,  $[\mathbf{R}]^{-1} = [\mathbf{R}]^T$ .

De los triedros manejados los más utilizados a efectos prácticos son el *triedro fijo* ( $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ ) y el *triedro del cuerpo* ( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ). A veces interesa también emplear también el denominado *triedro intermedio*, ( $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}$ ) cuya relación con el triedro fijo viene dada por

$$\|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\| = \|\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\| \cdot [\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta],$$

siendo la matriz de transformación correspondiente a este triedro

$$[\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi \cos \theta & \text{sen } \psi \text{sen } \theta \\ \text{sen } \psi & \cos \psi \cos \theta & -\cos \psi \text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

<sup>17</sup>La interpretación de esta rotación como transformación *activa* indica que sobre el sólido se efectúa primero  $\mathbf{R}_\varphi$  seguida de  $\mathbf{R}_\theta$  y por último  $\mathbf{R}_\psi$ . Por el contrario para la interpretación *pasiva* como cambios del triedro o base sigue el orden inverso, en el que el primer cambio ha sido  $[\mathbf{R}_\psi]$  seguido de  $[\mathbf{R}_\theta]$  y de  $[\mathbf{R}_\varphi]$ .

Para calcular las matrices inversas haremos uso en general de la condición de ortogonalidad, evaluando en su lugar las traspuestas:

$$\begin{aligned}([\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta])^{-1} &= ([\mathbf{R}_\varphi] \cdot [\mathbf{R}_\theta])^T; \\([\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi])^{-1} &= ([\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi])^T.\end{aligned}$$

Hacemos notar que una rotación general siempre se puede descomponer de esta manera, por lo que los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$  son una parametrización adecuada de las rotaciones.

Sin embargo, existen posiciones singulares en las que la representación mediante ángulos de Euler no es única. Por ejemplo, basta considerar los casos  $\theta = 0$  ó  $\theta = \pi$ , correspondientes a rotaciones alrededor del eje  $(O, \mathbf{k})$ , en los que la descomposición del giro entre  $\psi$  y  $\varphi$  no es unívoca.

### 8.6.9. Expresiones de la velocidad de rotación

La ecuación de la dinámica del sólido (8.8) determina la derivada del momento cinético, que a su vez depende linealmente de la velocidad de rotación (8.29). La expresión de ésta es por lo tanto un aspecto clave para el desarrollo de las ecuaciones de la dinámica del sólido.

Interesa definir la velocidad de rotación  $\boldsymbol{\Omega}$  a través de sus expresiones en alguno de los triedros descritos en el apartado anterior, especialmente en el del sólido  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , intermedio  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$  o fijo  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ .

Según la definición realizada de los ángulos de Euler en el apartado anterior,  $\boldsymbol{\Omega}$  se puede descomponer según las tres direcciones correspondientes a éstos como<sup>18</sup>:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\mathbf{K} + \dot{\theta}\mathbf{u} + \dot{\varphi}\mathbf{k}. \quad (8.100)$$

Las componentes de esta expresión no están definidas según direcciones ortonormales, por lo que resulta conveniente desarrollarlas en alguno de los triedros definidos anteriormente. En cualquier caso debemos notar que las distintas expresiones de  $\boldsymbol{\Omega}$  se refieren siempre a la velocidad de rotación *total* o *absoluta* del sólido, no se trata en ningún caso de la velocidad de rotación relativa a un triedro.

### Expresión de $\boldsymbol{\Omega}$ en el Triedro del cuerpo

Denominamos  $(p, q, r)$  a las componentes de  $\boldsymbol{\Omega}$  en este triedro:

$$\boldsymbol{\Omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$$

<sup>18</sup>En esta expresión se ha tenido en cuenta que, al referirse la velocidad a rotaciones infinitesimales ( $d\psi = \dot{\psi}dt, \dots$ ), éstas sí se pueden sumar vectorialmente al contrario de lo que ocurre para rotaciones finitas.

Para obtenerlas desarrollamos  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{u}$  en la expresión (8.100). La expresión de  $\mathbf{K}$  se obtiene de

$$\|\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\| = \|\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\| \cdot ([\mathbf{R}_\psi] \cdot [\mathbf{R}_\theta] \cdot [\mathbf{R}_\varphi])^{-1}$$

resultando

$$\mathbf{K} = \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi \mathbf{i} + \text{sen } \theta \text{ cos } \varphi \mathbf{j} + \text{cos } \theta \mathbf{k}. \quad (8.101)$$

La expresión de  $\mathbf{u}$  se obtiene de

$$\|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\| = \|\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\| \cdot [\mathbf{R}_\varphi]^{-1},$$

resultando

$$\mathbf{u} = \text{cos } \varphi \mathbf{i} - \text{sen } \varphi \mathbf{j}.$$

Se obtiene finalmente:

$$\begin{cases} p = \dot{\theta} \text{ cos } \varphi + \dot{\psi} \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi, \\ q = -\dot{\theta} \text{ sen } \varphi + \dot{\psi} \text{ sen } \theta \text{ cos } \varphi, \\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \text{ cos } \theta. \end{cases} \quad (8.102)$$

### Expresión de $\Omega$ en el Triedro Intermedio

En este caso denotamos las componentes por  $(p', q', r')$  :

$$\Omega = p' \mathbf{u} + q' \mathbf{v} + r' \mathbf{k}.$$

Desarrollamos  $\mathbf{K}$  en la expresión (8.100) mediante

$$\|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\| = \|\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{K}\| \cdot [\mathbf{R}_\theta],$$

resultando<sup>19</sup>

$$\mathbf{K} = \text{sen } \theta \mathbf{v} + \text{cos } \theta \mathbf{k}.$$

Se obtiene así

$$\begin{cases} p' = \dot{\theta}, \\ q' = \dot{\psi} \text{ sen } \theta, \\ r' = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \text{ cos } \theta \quad [= r]. \end{cases} \quad (8.103)$$

La expresión anterior prodría haberse deducido también de particularizar (8.102) para  $\varphi = 0$ , ya que el triedro intermedio no es sino el triedro del cuerpo anulando la rotación propia,  $\varphi \mathbf{k}$ .

<sup>19</sup>También puede obtenerse este resultado mediante proyección directa en la figura 8.13

### Expresión de $\Omega$ en el Triedro Fijo

Por último, si llamamos  $(P, Q, R)$  a las componentes en este triedro:

$$\Omega = PI + QJ + RK,$$

la expresión de las mismas resulta

$$\begin{cases} P = \dot{\varphi} \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta + \dot{\theta} \cos \psi, \\ Q = -\dot{\varphi} \cos \psi \operatorname{sen} \theta + \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi, \\ R = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta. \end{cases} \quad (8.104)$$

La comprobación de estas expresiones queda propuesta como ejercicio al lector.

### Obtención de las componentes de $\Omega$ a partir de la matriz de rotación $R$

Merece la pena observar que un procedimiento alternativo para calcular las expresiones de las componentes de  $\Omega$  es emplear la expresión que la define a partir de la derivada del tensor de rotación (8.90):

$$[\widehat{\Omega}] = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} = [\dot{R}] \cdot [R]. \quad (8.105)$$

En esta expresión, los términos  $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  indican las componentes en el triedro que se escoja, equivaliendo a  $(p, q, r)$  en el triedro del cuerpo,  $(p', q', r')$  en el intermedio o  $(P, Q, R)$  si se emplea el fijo. Particularizando en los distintos triedros puede comprobarse la equivalencia con las expresiones de las componentes de  $\Omega$  obtenidas anteriormente (respectivamente (8.102), (8.103) y (8.104) por métodos vectoriales.

## 8.7. Ecuaciones de la dinámica

En lo que antecede se han desarrollado los conceptos necesarios de cinemática de la rotación (rotaciones finitas y su parametrización mediante los ángulos de Euler) y de cinética y geometría de masas (tensor de inercia, momentos de inercia, expresiones del momento cinético y energía cinética). Pasaremos ahora a plantear las ecuaciones de la dinámica del sólido con un punto fijo, debidas a Euler. Partimos para ello de la ecuación del momento cinético, que tomará la forma (8.7.2) si se aplica en  $G$  y (8.8) si se aplica en un punto fijo  $O$ .



### 8.7.1. Ecuaciones de Euler

Según hemos visto, el momento cinético  $\mathbf{H}_O$  viene expresado por (8.29), en función del tensor de inercia  $\mathbf{I}_O$ , que define la geometría de masas del sólido respecto a  $O$ . El tensor de inercia será *constante* para un observador ligado al movimiento del cuerpo; en cambio, respecto del sistema de referencia fijo, sería necesario considerar la variación de sus componentes. Así, la derivada (absoluta) de  $\mathbf{H}_O$  conviene realizarla a través de la derivada relativa al triedro del cuerpo, añadiendo el término complementario correspondiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \\ &= \left( \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \right)_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}). \end{aligned}$$

Resulta la denominada *ecuación de Euler* de la dinámica, en su expresión vectorial:

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})} \quad (8.106)$$

Hacemos notar que esta ecuación es una expresión vectorial *intrínseca*, es decir, independiente del sistema en el que se expresen sus coordenadas.

Observamos además que en esta expresión la derivada de  $\boldsymbol{\Omega}$  es indiferente realizarla respecto al triedro fijo (absoluta) o respecto al triedro del cuerpo (relativa):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \left( \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{abs} = \left( \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \\ &= \dot{p}\mathbf{i} + \dot{q}\mathbf{j} + \dot{r}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Desarrollemos ahora las componentes de la expresión vectorial (8.106) en el triedro del cuerpo. Suponiendo que hemos escogido éste según las direcciones principales de inercia,

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = Ap\mathbf{i} + Bq\mathbf{j} + Cr\mathbf{k};$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} \\ &= -(B-C)qr\mathbf{i} - (C-A)pr\mathbf{j} - (A-B)pq\mathbf{k}; \end{aligned}$$

por lo que la expresión en componentes de las *ecuaciones de Euler* resulta:

$$\begin{cases} M_x = A\dot{p} - (B - C)qr, \\ M_y = B\dot{q} - (C - A)rp, \\ M_z = C\dot{r} - (A - B)pq. \end{cases} \quad (8.107)$$

Para desarrollar el planteamiento completo de las ecuaciones dinámicas en función de las coordenadas o grados de libertad que definen la configuración (en este caso, los ángulos de Euler), sería necesario sustituir en la expresión anterior los valores de  $(p, q, r)$  y de sus derivadas en función de los ángulos de Euler (8.102). Se obtendría así un conjunto de 3 ecuaciones diferenciales de 2.º orden en función de los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$ . Sin embargo, resulta más conveniente plantear dos conjuntos de 3 ecuaciones de primer orden de manera simultánea, planteamiento que es equivalente. Así, de la expresión (8.102) de  $(p, q, r)$  podemos despejar  $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ :

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{p \operatorname{sen} \varphi + q \cos \varphi}{\operatorname{sen} \theta}; \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \operatorname{sen} \varphi; \\ \dot{\varphi} &= r - \frac{p \operatorname{sen} \varphi + q \cos \varphi}{\tan \theta}. \end{aligned} \quad (8.108)$$

Por otra parte, de las ecuaciones de Euler (8.107)

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{M_x}{A} + \frac{B - C}{A} q r, \\ \dot{q} &= \frac{M_y}{B} + \frac{C - A}{B} r p, \\ \dot{r} &= \frac{M_z}{C} + \frac{A - B}{C} p q. \end{aligned} \quad (8.109)$$

El conjunto de 6 ecuaciones diferenciales de primer orden (8.108) y (8.109) queda planteado en función de las 6 variables,  $(\psi, \theta, \varphi)$  y  $(p, q, r)$ . Su resolución puede llevarse a cabo por métodos analíticos (en el capítulo 9 se discute la solución para algunas aplicaciones concretas), o bien por métodos numéricos (por ejemplo mediante el método de integración paso a paso en el tiempo de Runge-Kutta).

### 8.7.2. Ecuaciones de Euler derivando respecto al triedro intermedio

Cuando se trata de un sólido de revolución puede ser conveniente expresar las ecuaciones dinámicas realizando la derivada relativa respecto al

triedro intermedio, cuya velocidad de rotación respecto al fijo<sup>20</sup> es  $(\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\mathbf{k})$ :

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{I}_O \cdot \left( \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{rel} + (\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})$$

Al expresar la derivada relativa en la ecuación anterior, que lo es respecto a un observador ligado al triedro intermedio, se ha tenido en cuenta que al ser el sólido de revolución su tensor de inercia permanece inalterado por la rotación propia.

Desarrollando la ecuación en componentes, suponiendo que se ha elegido el triedro principal de inercia con momentos principales  $(A, A, C)$ :

$$\mathbf{I}_O \cdot \left( \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{rel} = A\dot{p}'\mathbf{u} + Aq'\dot{v} + Cr'\dot{r}'\mathbf{k}$$

$$(\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{k} \\ p' & q' & r' - \dot{\varphi} \\ Ap' & Aq' & Cr' \end{vmatrix}$$

resulta:

$$\begin{cases} M_u = A\dot{p}' - (A - C)q'r' + Aq'\dot{\varphi} \\ M_v = A\dot{q}' - (C - A)r'p' - Ap'\dot{\varphi} \\ M_z = Cr'\dot{r}' \end{cases} \quad (8.110)$$

Observamos además que se verifica  $r' = r$ , por lo que no hace falta la distinción entre ambas.

Estas ecuaciones se complementan con las (8.103) para definir el problema en función de los ángulos de Euler  $(\psi, \theta, \varphi)$ :

$$\begin{cases} M_u = A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta + Cr\dot{\psi} \sin\theta, \\ M_v = A\ddot{\psi} \sin\theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta} \cos\theta - Cr\dot{\theta}, \\ M_z = Cr\dot{r}. \end{cases} \quad (8.111)$$

De la última ecuación (8.110) se observa que, para sólidos de revolución, si el momento según el eje de revolución se anula, la velocidad de rotación según dicho eje se conserva: si  $M_{z'} = 0 \Rightarrow r = \text{cte.}$ . Conviene notar que esta propiedad sólo se verifica para un eje de revolución en que los momentos de inercia según dos ejes perpendiculares a él son iguales.

<sup>20</sup>No debe confundirse esta velocidad de rotación relativa con la expresión de la velocidad de rotación absoluta en el triedro intermedio explicada en el apartado 8.6.9.

### 8.7.3. Ecuaciones de Euler derivando respecto al triedro fijo

La rotación  $\mathbf{R}$  relaciona los vectores *convectivos* o materiales (los observados desde la referencia del cuerpo,  $\mathbf{x}^\circ, \boldsymbol{\Omega}^\circ, \dots$ ) y sus contrapartidas *espaciales* (los observados desde una referencia fija,  $\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}, \dots$ ) mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^\circ; & \mathbf{x}^\circ &= \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x}; \\ \boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Omega}^\circ; & \boldsymbol{\Omega}^\circ &= \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\Omega}; \\ \dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}^\circ; & \dot{\boldsymbol{\Omega}}^\circ &= \mathbf{R}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}.\end{aligned}$$

Derivando el vector posición  $\mathbf{x}$ , y teniendo en cuenta la definición del operador hemisimétrico correspondiente a la velocidad de rotación (8.90):

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x}^\circ = \dot{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x}) = (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{x} = \widehat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}.$$

De forma análoga, pueden establecerse las relaciones entre el tensor de inercia convectivo (constante) y su contrapartida espacial (variable):

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_O^\circ &= \int_{\mathcal{B}^\circ} (\mathbf{x}^\circ \cdot \mathbf{x}^\circ)^2 \mathbf{1} - \mathbf{x}^\circ \otimes \mathbf{x}^\circ \rho dV; \\ \mathbf{I}_O &= \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^2 \mathbf{1} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \rho dV \\ &= \mathbf{R} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot \mathbf{R}^T).\end{aligned}$$

Empleando las relaciones anteriores, pueden desarrollarse las ecuaciones de la dinámica, derivando desde un sistema de referencia fijo el momento cinético:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O &= \frac{d}{dt} (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \frac{d}{dt} ((\mathbf{R} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot \mathbf{R}^T)) \cdot \boldsymbol{\Omega}) \\ &= \frac{d}{dt} (\mathbf{R} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot (\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\Omega}))) = \frac{d}{dt} (\mathbf{R} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot \boldsymbol{\Omega}^\circ)) \\ &= \dot{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot \boldsymbol{\Omega}^\circ) + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}^\circ) \\ &= (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T) \cdot ((\mathbf{R} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot \mathbf{R}^T)) \cdot (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Omega}^\circ)) + (\mathbf{R} \cdot (\mathbf{I}_O^\circ \cdot \mathbf{R}^T)) \cdot (\mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\Omega}}^\circ) \\ &= \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{I}_O \cdot (\mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\Omega}}^\circ) = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}.\end{aligned}$$

Como puede comprobarse, la expresión a la que se llega es la misma ecuación de Euler que se obtuvo anteriormente derivando respecto a un sistema de referencia convectivo (8.106).

Cabe recalcar que este resultado constituye una expresión vectorial intrínseca, es decir independiente de las coordenadas en las que se exprese. Por lo tanto, podrán emplearse tanto las referidas al triedro del cuerpo como las del triedro fijo o cualquier otro sistema.

### 8.7.4. Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de la dinámica (8.107) ó (8.110) se han obtenido antes por los procedimientos vectoriales (Newton-Euler). A partir de la dinámica analítica se podrían haber obtenido también tres ecuaciones dinámicas, equivalentes en su conjunto a las ecuaciones de Euler. Sin embargo, tan sólo una de las ecuaciones así obtenidas coincide con alguna de las ecuaciones de Euler: se trata de la ecuación de Lagrange en  $\varphi$ , que es la misma que la ecuación en (8.107<sub>3</sub>), es decir la ecuación de Euler correspondiente al movimiento de giro alrededor del eje  $Oz$  del triedro móvil.

Obtenemos la ecuación de Lagrange en dirección  $\varphi$  desarrollando los términos de (7.12). Para ello expresamos las derivadas mediante la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial p} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}}}_{=0} + \frac{\partial T}{\partial q} \underbrace{\frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}}}_{=0} + \frac{\partial T}{\partial r} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}}}_{=1} \right] = C\dot{r}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial r} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}}}_{=0} \\ &= Ap \underbrace{(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)}_q + Bq \underbrace{(-\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi)}_{-p} \\ &= (A - B)pq \end{aligned}$$

siendo por tanto la ecuación resultante

$$Q_\varphi = C\dot{r} - (A - B)pq.$$

Se observa la identidad de ésta con (8.107<sub>3</sub>), teniendo la fuerza generalizada  $Q_\varphi$  la interpretación física de la componente  $M_z$  del momento. Por permutación cíclica, cambiando los papeles de los ejes  $(x, y, z)$ , sería posible deducir las otras dos ecuaciones de Euler expresadas en (8.107).

También se pueden obtener directamente las ecuaciones de Lagrange relativas a las variables  $\psi$  y  $\theta$ . No detallaremos aquí el desarrollo y daremos únicamente el resultado, quedando propuesta la deducción como ejercicio al

lector:

$$\begin{aligned}
 Q_\psi &= A\dot{p}\sin\theta\sin\varphi + Ap(\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi) + B\dot{q}\sin\theta\cos\varphi \\
 &\quad + Bq(\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi) + Cr\dot{\theta}\cos\theta - Cr\dot{\theta}\sin\theta \\
 Q_\theta &= A\dot{p}\cos\varphi - Ap(\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi) - B\dot{q}\sin\varphi \\
 &\quad - Bq(\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi) + Cr\dot{\psi}\sin\theta
 \end{aligned}$$

Conviene recalcar que, aunque las ecuaciones de Lagrange en función de las coordenadas generalizadas  $(\psi, \theta, \varphi)$  no son las mismas ecuaciones que las de Euler (8.107), son combinación lineal de ellas y en conjunto constituyen un sistema equivalente. Es fácil, obteniendo los coeficientes de esta combinación lineal, expresar los momentos generalizados  $(Q_\psi, Q_\theta, Q_\varphi)$  a partir de los momentos «físicos»  $(M_x, M_y, M_z)$ :

$$\begin{aligned}
 Q_\psi &= M_x \sin\theta \sin\varphi + M_y \sin\theta \cos\varphi + M_z \cos\theta \\
 Q_\theta &= M_x \cos\varphi - M_y \sin\varphi \\
 Q_\varphi &= M_z
 \end{aligned}$$

### 8.7.5. Cálculo de reacciones en los enlaces

#### Sólido con un punto fijo

Como es lógico, en la ligadura del punto fijo se produce una fuerza de reacción. Ésta será un vector  $\mathbf{R}$  de dirección en principio arbitraria aplicado en un eje por  $O$ .

La reacción se puede calcular fácilmente a través de la expresión del balance de la cantidad de movimiento (8.7<sub>1</sub>), descomponiendo las fuerzas en activas y reactivas:

$$\mathbf{F}^{\text{act}} + \mathbf{R} = M\mathbf{a}_G$$

siendo  $\mathbf{F}^{\text{act}} = \sum \mathbf{f}^{\text{act}}$  la resultante de las fuerzas externas activas aplicadas al sólido.

Por cinemática sabemos que

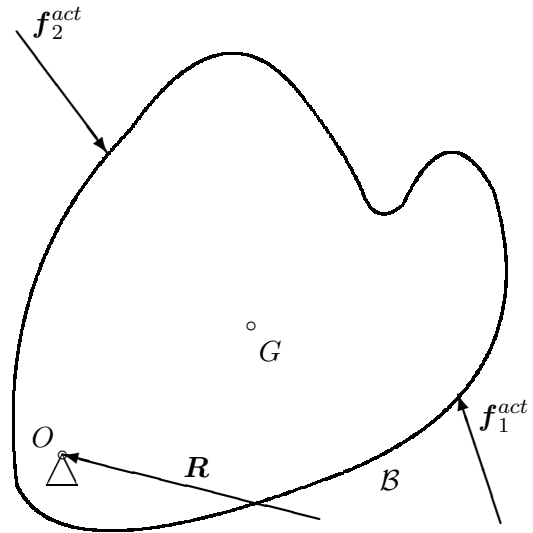
$$\mathbf{a}_G = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{OG} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OG})$$

de donde

$$\boxed{\mathbf{R} = M[\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{OG} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OG})] - \mathbf{F}^{\text{act}}} \quad (8.112)$$

El valor de  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  y  $\boldsymbol{\Omega}$  se obtendría de resolver las ecuaciones de Euler (8.106). En el caso en que el punto fijo sea precisamente  $G$ , la ecuación anterior (8.112) se reduce a la expresión trivial  $\mathbf{R} = -\mathbf{F}^{\text{act}}$ .

Figura 8.15: Fuerza de reacción de un sólido con un punto fijo



### Sólido con un eje fijo (2 puntos fijos)

Suponemos que el eje fijo se materializa mediante un punto fijo (\$O\$) y otro punto \$A\$ que pueda deslizar según el eje \$OA\$ pero no en dirección normal a él. El momento de las fuerzas en \$O\$ es el de las fuerzas exteriores activas, más el de la reacción en \$A\$; planteando así las ecuaciones de Euler (8.106)

$$M_O^{act} + OA \wedge R_A = I_O \cdot \dot{\Omega} + \Omega \wedge (I_O \cdot \Omega)$$

donde \$OA = de\$ y al ser \$e\$ fijo,

$$\Omega = \Omega e, \quad \dot{\Omega} = \dot{\Omega} e.$$

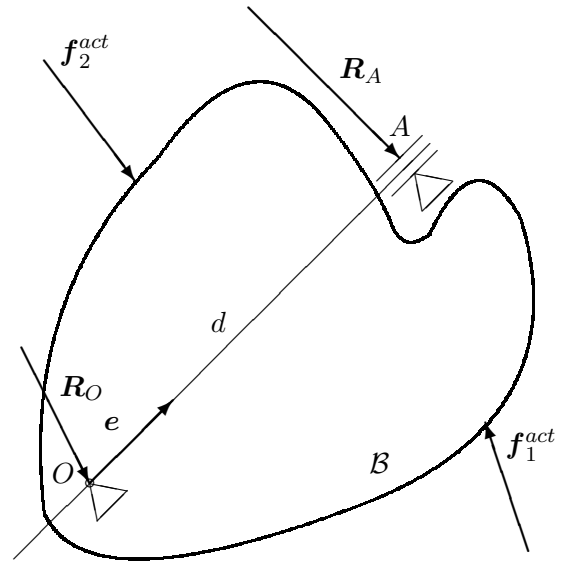
La expresión anterior es una ecuación vectorial que permite calcular \$R\_A\$. Recordemos que en el apartado 4.3.1 ya se estudiaron este tipo de ecuaciones, en el contexto de la cinemática. Para que exista solución, la condición de compatibilidad exige que \$e\$ sea normal al término independiente:

$$e \cdot [I_O \cdot \dot{\Omega} + \Omega \wedge (I_O \cdot \Omega) - M_O^{act}] = I_e \dot{\Omega} - M_e = 0,$$

condición que como vemos efectivamente se cumple (recuérdese (8.26)). Despejando pues \$R\_A\$,

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{[I_O \cdot \dot{\Omega} + \Omega \wedge (I_O \cdot \Omega) - M_O^{act}] \wedge de}{d^2} \\ &= \frac{[\dot{\Omega} I_O \cdot e + \Omega^2 e \wedge (I_O \cdot e) - M_O^{act}] \wedge e}{d} \end{aligned}$$

Figura 8.16: Fuerzas de reacción de un sólido con un eje fijo, materializado mediante un punto fijo y otro punto que sólo permite movimiento en la dirección del eje.



En el caso particular en que se cumpla  $\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} = I_e \mathbf{e}$  (es decir si  $\mathbf{e}$  es un eje principal), entonces la expresión anterior resulta

$$\mathbf{R}_A = \frac{\mathbf{e} \wedge \mathbf{M}_O^{\text{act}}}{d}$$

Es inmediato comprobar que este valor es el mismo que se produciría en situación estática, por lo que en este caso particular no se producen efectos dinámicos sobre la reacción.

Una vez calculada  $\mathbf{R}_A$ , la reacción en el otro punto,  $\mathbf{R}_O$ , se calcula igual que en (8.112):

$$\mathbf{R}_O = M\mathbf{a}_G - \mathbf{F}^{\text{act}} - \mathbf{R}_A.$$



## Capítulo 9

# Aplicaciones de la dinámica del sólido

Se describen en este capítulo algunos ejemplos de aplicación significativos de la dinámica del sólido en 3D. Se estudia en primer lugar el movimiento por inercia y los ejes permanentes de rotación. A continuación se trata de la peonza simétrica, la brújula giroscópica, y el péndulo esférico. Por último, se estudia el comportamiento dinámico del sólido en un sistema no inercial.

### 9.1. Movimiento por inercia; descripción de Poincot.

Cuando un sólido con un punto fijo no tiene fuerzas aplicadas o éstas son tales que su momento respecto del punto fijo es nulo ( $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ ), el movimiento se produce únicamente por la inercia del mismo. Este movimiento tiene varias propiedades notables, por lo que lo estudiaremos en primer lugar en este capítulo de aplicaciones.

#### 9.1.1. Propiedades del movimiento

a. *El momento cinético,  $\mathbf{H}_O$ , es constante.*

Se deduce inmediatamente de la nulidad del momento de las fuerzas,

$$\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_O); \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{H}_O = \text{cte.}$$

□

Por tanto  $\mathbf{H}_O$  define un vector de módulo y dirección constantes en el espacio. Convencionalmente, escogeremos esta dirección como versor  $\mathbf{K}$  del “triedro fijo”, y llamaremos  $H$  al módulo:

$$\mathbf{H}_O = HK. \quad (9.1)$$

b. *La Energía Cinética,  $T$ , es constante.*

En efecto, debido a la constancia de  $\mathbf{H}_O$ ,

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt}\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega});$$

premultiplicando escalarmente por  $\boldsymbol{\Omega}$ , que es perpendicular al segundo sumando de la expresión anterior, resulta:

$$0 = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}});$$

por otra parte, considerando la simetría de  $\mathbf{I}_O$ :

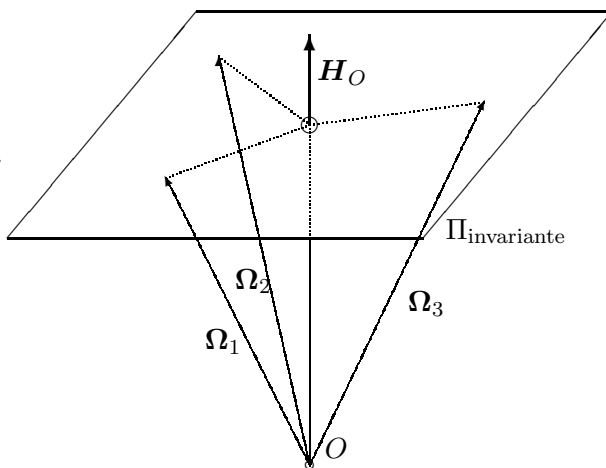
$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \right] = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}) = 0.$$

□

Como corolario de esta última propiedad, se puede afirmar que

«la proyección de  $\boldsymbol{\Omega}$  sobre la dirección fija de  $\mathbf{H}_O$  es constante.»

Figura 9.1: *En el movimiento por inercia la proyección de  $\boldsymbol{\Omega}$  sobre la dirección fija de  $\mathbf{H}_O$  es constante, estando el extremo del vector  $\boldsymbol{\Omega}$  situado sobre el plano invariante.*



En efecto,

$$\mathbf{H}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = 2T \quad (\text{cte})$$

Otra forma de expresar este resultado es diciendo que el extremo del vector  $\mathbf{\Omega}$ , supuesto su origen en  $O$ , pertenece a un plano fijo, perpendicular a  $\mathbf{H}_O$  y situado a una distancia  $2T/h$ , denominado *plano invariante*.

c. Dada la constancia de  $\mathbf{H}_O$ ,

$$H^2 = \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{H}_O = (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}) \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}) = \mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O^2 \cdot \mathbf{\Omega}), \quad (9.2)$$

donde se ha tenido en cuenta la simetría de  $\mathbf{I}_O$ . Por otra parte, de la constancia de  $T$ , se expresa:

$$2T = \mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}). \quad (9.3)$$

Multiplicando (9.2) por  $2T$ , (9.3) por  $H^2$  y restando ambas términos a término:

$$\mathbf{\Omega} \cdot [(\mathbf{H}^2 \mathbf{I}_O - 2T \mathbf{I}_O^2) \cdot \mathbf{\Omega}] = 0, \quad (9.4)$$

ecuación que indica que  $\mathbf{\Omega}$  es la generatriz de un cono cuádrico<sup>1</sup> en el triedro del sólido, ya que en este triedro las componentes de  $\mathbf{I}_O$  se mantienen constantes. Este cono se denomina *cono del cuerpo*, y a lo largo del movimiento rueda sin deslizar sobre el *cono fijo*, superficie que describe  $\mathbf{\Omega}$  en relación al triedro fijo. Este último es también un cono, al pasar su generatriz  $\mathbf{\Omega}$  siempre por el punto  $O$ , aunque por lo general no es cuádrico. Ambos conos corresponden, respectivamente, a los axoides móvil y fijo del movimiento del sólido (apartado 4.3.2).

d. La constancia de la energía cinética permite escribir:

$$\mathbf{\Omega} \cdot \left( \frac{\mathbf{I}_O}{2T} \cdot \mathbf{\Omega} \right) = 1,$$

expresión que es enteramente análoga a la (8.53) del elipsoide de inercia, sin más que tomar  $\mathbf{r} = \mathbf{\Omega}/\sqrt{2T}$  (recordemos que  $T$  es constante). Por lo tanto, el lugar geométrico definido por el vector  $\mathbf{\Omega}/\sqrt{2T}$  es precisamente el elipsoide de inercia<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Un cono cuádrico es un cono (superficie reglada definida por generatrices que pasan todas por  $O$ ), cuya sección recta es una cónica, no necesariamente circular, pudiendo ser una elipse, parábola o hipérbola; En el caso en que la sección recta es una circunferencia se denomina cono de revolución o circular. Es inmediata la comprobación de que la ecuación (9.4) define un cono cuádrico, sin más que particularizar la expresión de las componentes de  $\mathbf{I}_O$  en el triedro principal.

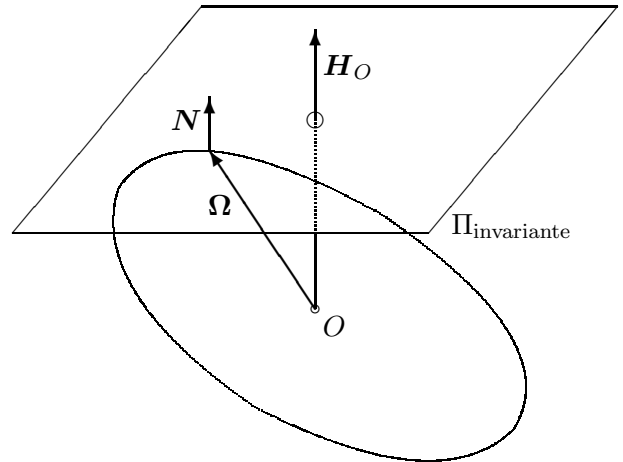
<sup>2</sup>Otra manera de expresar lo mismo es diciendo que  $\mathbf{\Omega}$  define un elipsoide homotético al de inercia, de razón  $\sqrt{2T}$ .

La normal a este elipsoide en  $\Omega$  viene definida por el gradiente de la superficie:

$$\frac{\partial}{\partial \Omega} \left[ \Omega \cdot \left( \frac{\mathbf{I}_O}{2T} \cdot \Omega \right) \right] = \frac{\mathbf{I}_O}{T} \cdot \Omega = \frac{\mathbf{H}_O}{T}.$$

Comprobamos por tanto que este elipsoide es tangente precisamente al plano invariante definido en la propiedad b.

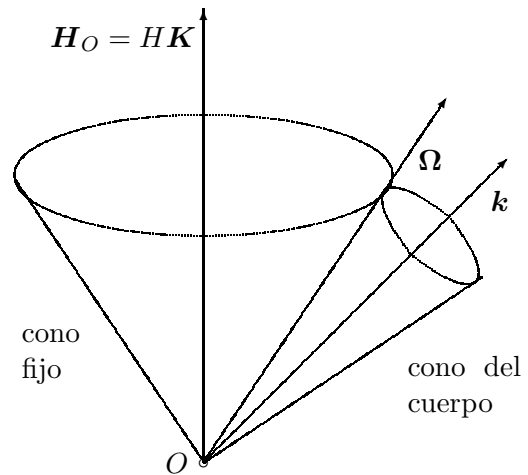
Figura 9.2: *El extremo de  $\Omega$ , en relación con el sistema de referencia del cuerpo, está sobre un elipsoide, homotético al de inercia. Este elipsoide es además tangente en todo instante al plano invariante (su normal común es  $\mathbf{N}$ ), sobre el cual rueda (y pivota) sin deslizar.*



En resumen, las propiedades anteriores del movimiento por inercia permiten la siguiente interpretación geométrica del mismo debida a Poincot:

1. El vector  $\Omega$  define un *elipsoide* homotético al de inercia (de razón  $\sqrt{2T}$ ), con centro en  $O$ .
2. Este elipsoide permanece tangente a lo largo del movimiento al *plano invariante*, plano perpendicular a  $\mathbf{H}_O$  y situado a una distancia  $2T/H$  de  $O$ .
3. Al ser nula la velocidad de todos los puntos del sólido sobre el eje  $(O, \Omega)$ , el movimiento es una *rodadura sin deslizamiento* del elipsoide sobre el plano invariante.
4. El movimiento del sólido se puede interpretar igualmente como el del *cono del cuerpo* (cono cuádrico) rodando sin deslizar sobre el *cono fijo*.

Figura 9.3: El movimiento por inercia es análogo al de un cono móvil con el cuerpo, que rueda sin deslizar sobre un cono fijo. Ambos conos son los axoides del movimiento, y comparten en todo instante una generatriz, definida por el vector  $\Omega$ .



OBSERVACIONES.-

- En general  $\Omega$  no es constante ni en módulo ni en dirección, a pesar de que  $H_O$  sí lo sea.
- En el caso en que el tensor de inercia sea cilíndrico, es decir si dos momentos principales de inercia son iguales ( $A = B$ ), por ejemplo para un sólido de revolución, según la expresión (9.4) el eje de  $\Omega$  genera un cono de revolución. En este caso particular, el módulo de  $\Omega$  sí es constante, aunque su dirección no lo será en general. Es fácil ver que el cono fijo también es de revolución en este caso, por lo que el movimiento se reduce a la rodadura de un cono circular (de eje el de revolución del sólido,  $k$ ) sobre otro cono circular (de eje la dirección invariante,  $K$ ).

EJEMPLO 9.1: Sea un cilindro macizo homogéneo de radio  $r$ , altura  $h$  y masa  $m$ , que se mueve libremente en el campo gravitatorio simplificado. Se le pone en movimiento comunicándole una velocidad inicial de rotación que forma  $45^\circ$  con el eje del cilindro, y cuya componente según dicho eje vale  $\omega$ . Describir el movimiento del sólido.

SOLUCIÓN: Los momentos principales de inercia son:

$$A = B = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2; \quad C = \frac{1}{2}mr^2.$$

La velocidad de rotación inicial es  $\boldsymbol{\Omega}_0 = (\omega, 0, \omega)$ , luego

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= A\omega \mathbf{i} + C\omega \mathbf{k}; & T &= \frac{1}{2}(A\omega^2 + C\omega^2); \\ H &= \omega\sqrt{A^2 + C^2}; & \mathbf{K} &= \frac{1}{\sqrt{A^2 + C^2}}(A\mathbf{i} + C\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de coeficientes del cono del cuerpo (cf. ecuación (9.4)) es

$$\mathbf{A} = 2T\mathbf{I}_O^2 - H^2\mathbf{I}_O = AC(A - C)\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se trata de un cono de revolución, con vértice en el centro del cilindro y cuyo eje lleva la dirección  $\mathbf{k}$ . El semiángulo cónico es

$$\cos \alpha_1 = \mathbf{k} \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}_0}{\Omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Por otra parte, el cono fijo es igualmente un cono de revolución, cuyo eje lleva la dirección de  $\mathbf{K}$  y el semiángulo cónico es

$$\cos \alpha_1 = \mathbf{K} \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}_0}{\Omega_0} = \frac{A + C}{\sqrt{2}\sqrt{A^2 + C^2}}.$$

A su vez, el elipsoide de inercia será de revolución con semiejes  $(1/\sqrt{A}, 1/\sqrt{C})$ , siendo su ecuación  $Ax^2 + Ay^2 + Cz^2 = 1$ . El vector velocidad angular, en el sistema de referencia del cuerpo, permanece sobre un elipsoide homotético al de inercia, de ecuación

$$Ap^2 + Aq^2 + Cr^2 = 2T.$$

(Siendo  $(p, q, r)$  las componentes de  $\boldsymbol{\Omega}$ .)

### 9.1.2. Ejes permanentes de rotación

En el apartado anterior hemos hecho notar que el vector velocidad de rotación  $\boldsymbol{\Omega}$  no tiene porqué ser constante, ni en dirección ni en módulo, en un caso general de movimiento por inercia. Se plantea ahora obtener las condiciones en las que dirección de  $\boldsymbol{\Omega}$  pueda permanecer constante. Se denomina *eje permanente de rotación* de un sólido aquél que, para un movimiento por inercia con velocidad de rotación inicial alrededor de dicho eje, se mantenga invariante la dirección de rotación.

Sea el eje  $(O, \mathbf{e})$ , y una velocidad de rotación inicial  $\mathbf{\Omega}_0 = \Omega_0 \mathbf{e}$ . Suponemos que la dirección de  $\mathbf{\Omega}$  permanece según la misma dirección  $\mathbf{e}$  a lo largo del movimiento. En primer lugar, observemos que puesto que la energía  $T$  es constante,

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}) = \frac{\Omega^2}{2} I_e = \text{cte},$$

siendo  $I_e = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e})$ , momento de inercia respecto al eje  $(O, \mathbf{e})$ . Al ser éste constante se deduce que el módulo de  $\mathbf{\Omega}$  tampoco varía:  $\Omega = \Omega_0$ .

Por otra parte, de la ecuación de Euler (8.106), al ser  $\dot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{0}$ ,

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O = \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}).$$

Se deduce por tanto que  $\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}$  ha de ser paralelo a  $\mathbf{\Omega}$ , es decir la dirección  $\mathbf{e}$  debe ser principal de inercia en  $O$ . Por tanto, un eje permanente de rotación será *necesariamente un eje principal de inercia del sólido*.

Esta condición, que es necesaria, no basta sin embargo para garantizar la *estabilidad* del eje permanente de rotación. Para analizar este aspecto, elegiremos unos ejes del cuerpo de forma que  $\mathbf{k}$  corresponda con la dirección principal que se desea estudiar, según la cual se imprime una velocidad de rotación  $\mathbf{\Omega}$ . Supongamos que se producen unas inevitables perturbaciones pequeñas en las otras dos direcciones perpendiculares, con lo que la velocidad angular es:

$$\mathbf{\Omega} \equiv (\epsilon_p, \epsilon_q, r) \quad \text{siendo } \epsilon_p, \epsilon_q \ll r$$

La estabilidad de  $\mathbf{\Omega}$  como dirección permanente de rotación equivale a garantizar que las perturbaciones introducidas  $(\epsilon_p, \epsilon_q)$  se mantengan pequeñas (acotadas) a lo largo del movimiento. Si por el contrario estas perturbaciones crecen sin acotar, el movimiento de rotación alrededor de dicho eje será inestable.

Analicemos por tanto la evolución de  $(\epsilon_p, \epsilon_q)$ . Desarrollando para este caso las ecuaciones de Euler (8.107) con  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= A\dot{\epsilon}_p - (B - C)\epsilon_q r \\ 0 &= B\dot{\epsilon}_q - (C - A)r\epsilon_p \\ 0 &= C\dot{r} - (A - B)\epsilon_p \epsilon_q \simeq C\dot{r} \end{aligned} \tag{9.5}$$

De la ecuación (9.5<sub>3</sub>), despreciando infinitésimos de orden superior, se deduce que  $r = \text{cte}$ . Derivando (9.5<sub>1</sub>),

$$0 = A\ddot{\epsilon}_p - (B - C)\dot{\epsilon}_q r;$$

despejando de (9.5<sub>2</sub>) ( $\dot{\epsilon}_q = (C - A)r\epsilon_p/B$ ) y eliminando en la ecuación anterior se obtiene finalmente:

$$A\ddot{\epsilon}_p + \frac{(C - B)(C - A)}{B}r^2\epsilon_p = 0.$$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo grado en función exclusivamente de  $\epsilon_p$ . Es una ecuación similar a la del oscilador armónico simple (apartado 3.1),

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Como se vió esta ecuación tiene solución armónica (acotada) para  $x$  si  $k > 0$ , y solución exponencial (monótona creciente, no acotada) si  $k < 0$ . Así, la condición de estabilidad para que  $\epsilon_p$  se mantenga pequeña es:

$$(C - B)(C - A) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{bien} & C > B \text{ y } C > A, \\ \text{ó bien} & C < B \text{ y } C < A. \end{cases}$$

Por lo tanto para que el eje principal sea estable como eje permanente ha de corresponder bien al máximo, bien al mínimo, de los momentos principales de inercia. En el caso en que corresponda al intermedio, no podrá ser eje permanente, siendo en este caso el movimiento inestable.

La propiedad anterior se puede confirmar experimentalmente con numerosos objetos de uso cotidiano, arrojándolos al aire con una velocidad de rotación inicial, en caída libre. Es fácil verificar que sometido únicamente a su propio peso, para un objeto en caída libre el momento en el centro de masa  $G$  es nulo<sup>3</sup>, por lo que experimenta un movimiento por inercia alrededor de  $G$ .

Podemos realizar el experimento con una caja rectangular de cartón fácil de encontrar en cualquier domicilio u oficina. Admitiendo que la caja es sensiblemente plana, como se muestra en la figura 9.4, dos momentos principales de inercia corresponden a los dos ejes de simetría dentro del plano  $A$  y  $B$ . La planitud de la caja permite deducir que para la tercera dirección principal, normal al plano, el momento de inercia será suma de los

<sup>3</sup>En efecto, calculemos dicho momento para un cuerpo  $\mathcal{B}$  de masa  $M$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_G &= \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge (-g\mathbf{k}) \rho dV = - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge g\mathbf{k} \rho dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_G \wedge g\mathbf{k} \rho dV \\ &= -M\mathbf{r}_G \wedge g\mathbf{k} + \mathbf{r}_G \wedge Mg\mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Como receta, es válido suponer que un campo de fuerzas uniforme y paralelo como el gravitatorio simplificado produce en el sólido el mismo efecto que su resultante ( $-Mg\mathbf{k}$ ) “aplicada” en el C.D.M. ( $G$ ).



otros dos ( $C = A + B$ ) y por tanto el máximo. Por otra parte, el momento del eje paralelo al lado menor del rectángulo ( $B$  en la figura) será mayor que el otro ( $A$ ), por lo que  $B$  será el intermedio y  $A$  el mínimo. Si se lanza la caja al aire girando alrededor de los ejes  $C$  o  $A$ , permanecerá en rotación estable, mientras que la rotación alrededor del eje  $B$  es inestable.

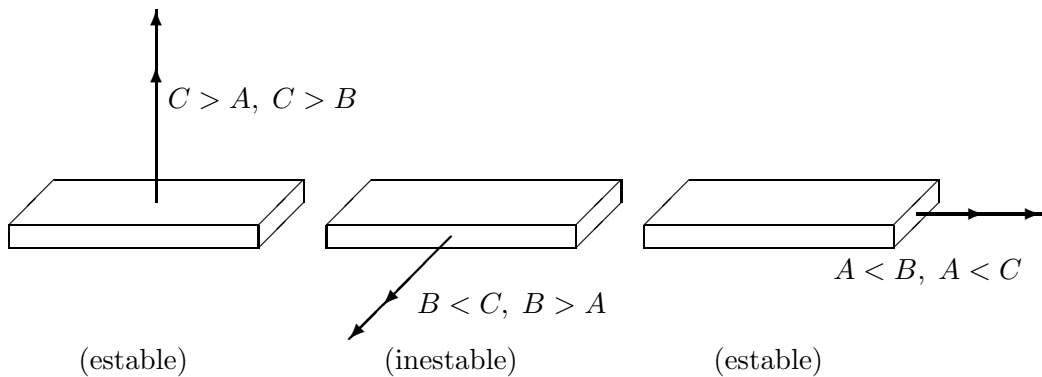


Figura 9.4: Los ejes de momento de inercia máximo ( $C$ ) y mínimo ( $A$ ) permiten movimientos de rotación permanente estables, mientras que el intermedio ( $B$ ) es inestable.

Análogamente podríamos probar con una raqueta de tenis o de ping-pong. En este caso el momento de inercia mínimo corresponde al eje del mango, y el máximo al eje perpendicular a la raqueta.

### 9.1.3. Ecuaciones del movimiento

En un caso general de sólido con punto fijo el movimiento se define mediante las 6 ecuaciones diferenciales de primer orden (8.108) y (8.109), en función de las correspondientes 6 variables. Veremos en primer lugar éstas para el caso más general de movimiento por inercia. En el caso particular en que dos momentos principales sean iguales (sólido de revolución), la solución se simplifica considerablemente y se puede integrar directamente.

**Caso general.**— Recordemos en primer lugar la expresión de las componentes de la velocidad de rotación en el triedro del cuerpo,  $\boldsymbol{\Omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ ,

en función de los ángulos de Euler (8.102):

$$p = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \quad (9.6)$$

$$q = -\dot{\theta} \operatorname{sen} \varphi + \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \quad (9.7)$$

$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad (9.8)$$

La expresión del momento cinético en este triedro es, a partir de (9.1) y (8.101)

$$\mathbf{H}_O = H\mathbf{K} = H(\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \mathbf{i} + \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k})$$

Es posible obtener otra expresión del momento cinético en el triedro del cuerpo aplicando directamente (8.29). Supondremos para ello, sin pérdida de generalidad, que los ejes son los principales de inercia, con momentos de inercia ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ):

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = A p \mathbf{i} + B q \mathbf{j} + C r \mathbf{k}.$$

Igualando componentes entre ambas expresiones de  $\mathbf{H}_O$ ,

$$p = \frac{H}{A} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi; \quad (9.9)$$

$$q = \frac{H}{B} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi; \quad (9.10)$$

$$r = \frac{H}{C} \cos \theta. \quad (9.11)$$

De (9.11) se deduce

$$\cos \theta = \frac{Cr}{H}; \quad (9.12)$$

y del cociente término a término entre las ecuaciones (9.9) y (9.10),

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap}{Bq}. \quad (9.13)$$

Sumando la ecuación (9.6) multiplicada por  $\operatorname{sen} \varphi$  a la (9.7) multiplicada por  $\cos \varphi$ , se puede despejar  $\dot{\psi}$ :

$$\dot{\psi} = \frac{p \operatorname{sen} \varphi + q \cos \varphi}{\operatorname{sen} \theta};$$

eliminando mediante (9.9) y (9.10)  $\operatorname{sen} \varphi = \frac{pA}{h \operatorname{sen} \theta}$  y  $\cos \varphi = \frac{qB}{h \operatorname{sen} \theta}$ , obtenemos:

$$\dot{\psi} = \frac{Ap^2 + Bq^2}{H \operatorname{sen}^2 \theta},$$

y por último, eliminando  $\text{sen}^2 \theta$  en virtud de (9.12),

$$\dot{\psi} = \frac{Ap^2 + Bq^2}{H \left(1 - \frac{C^2 r^2}{H^2}\right)} = H \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2 p^2 + B^2 q^2} \quad (9.14)$$

Las ecuaciones (9.12, 9.13, 9.14), junto con las tres ecuaciones de Euler,

$$0 = A\dot{p} - (B - C)qr \quad (9.15)$$

$$0 = B\dot{q} - (C - A)rp \quad (9.16)$$

$$0 = C\dot{r} - (A - B)pq \quad (9.17)$$

forma un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas:  $(\psi, \theta, \varphi, p, q, r)$ , que se puede resolver de manera autónoma.

**Sólido de revolución.**— Sea el caso particular de un sólido de revolución<sup>4</sup>. Según se sabe (apartado 8.4.4) un eje de revolución es siempre principal de inercia. Todos los ejes normales a éste son también principales y tienen igual momento de inercia. Tomaremos convencionalmente la dirección  $\mathbf{k}$  según el eje de revolución; los momentos de inercia serán  $C$  (según  $\mathbf{k}$ ) y  $A = B$  (según direcciones perpendiculares a  $\mathbf{k}$ ).

En la tercera ecuación de Euler (9.17) el segundo sumando se anula, por lo que:

$$C\dot{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \text{cte}}.$$

De la igualdad (9.12) con  $r$  constante, se deduce que la nutación es también constante:

$$\cos \theta = \frac{Cr}{h} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \text{cte}}.$$

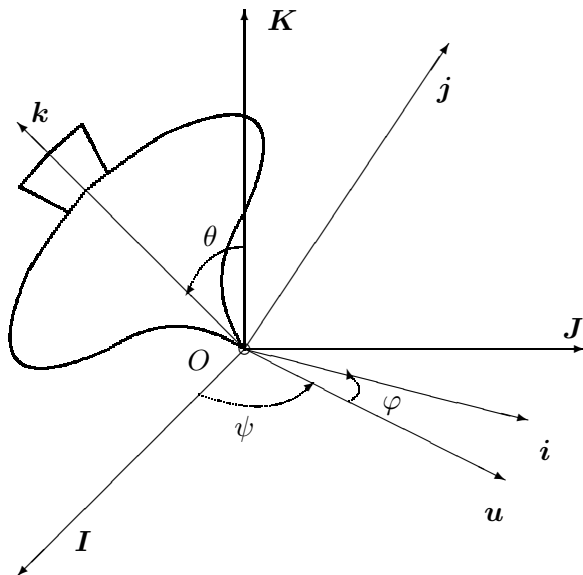
La interpretación geométrica de la nutación (figura 9.5) es el ángulo que forma el eje del cuerpo ( $\mathbf{k}$ ) con el eje invariante ( $\mathbf{K}$ ) (recuérdese que en el movimiento por inercia se ha tomado convencionalmente  $\mathbf{K}$  según la dirección fija de  $\mathbf{H}_O$ ).

De la ecuación (9.14) con  $A = B$  se obtiene:

$$\dot{\psi} = H \frac{Ap^2 + Aq^2}{A^2 p^2 + A^2 q^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\psi} = \frac{H}{A} \quad (\text{cte})}.$$

<sup>4</sup>Para el desarrollo que sigue no es necesario exigir estrictamente que el sólido sea de revolución, bastaría con la condición de que el tensor de inercia sea cilíndrico, es decir, con dos momentos principales iguales ( $A = B$ ).

Figura 9.5: Interpretación geométrica de los ángulos de Euler para el movimiento de Poinsot de un sólido con simetría de revolución.



Por último, a partir de este último resultado y las ecuaciones (9.8) y (9.12),

$$\dot{\varphi} = \frac{A - C}{A} r \quad (\text{cte}).$$

Por tanto, en el caso en que el sólido sea de revolución, en el movimiento por inercia el eje del cuerpo describe un cono circular alrededor de la dirección invariante (nutación  $\theta$  constante). El movimiento de precesión de dicho eje tiene velocidad  $\dot{\psi}$  constante, con una velocidad de rotación propia alrededor del mismo ( $\dot{\varphi}$ ) asimismo constante. El cono del cuerpo es de revolución, con semiángulo cónico dado por  $\alpha = \arctg\left(\frac{C}{A} \operatorname{tg} \theta\right)$ . El cono fijo es también de revolución, con semiángulo  $\beta = \theta \pm \alpha$  (dos casos posibles).

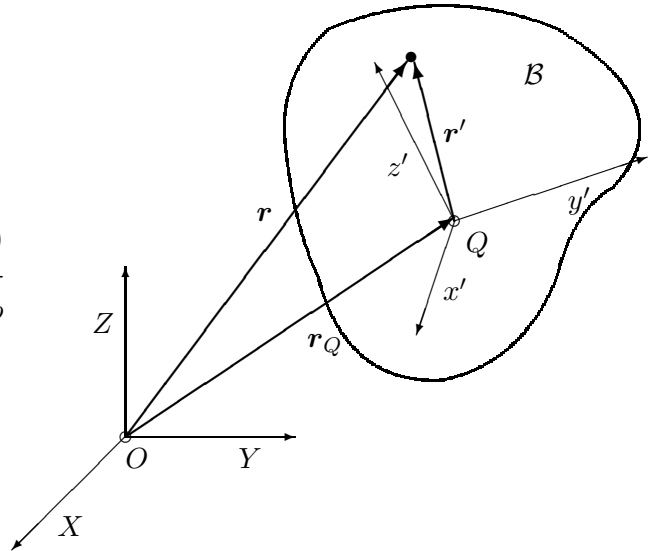
## 9.2. Dinámica del sólido en sistemas no inerciales

Las ecuaciones de Euler (8.106) son las ecuaciones de la dinámica en un sistema de referencia inercial ( $OXYZ$ ), siendo  $O$  un punto fijo del sólido. Alternativamente, pueden aplicarse también para el movimiento alrededor del centro de masas ( $G$ ).

Las ecuaciones (8.107) son la expresión en coordenadas de las ecuaciones de Euler para el triedro del cuerpo. Recordemos que independientemente del sistema en el que se expresan las coordenadas en un instante dado, las

derivadas que intervienen en las ecuaciones de la dinámica deben realizarse siempre respecto a una referencia inercial<sup>5</sup>

Figura 9.6: Ejes inerciales ( $Oxyz$ ) y no inerciales ( $Qx'y'z'$ ) para la descripción del movimiento del sólido  $\mathcal{B}$ .



Si se quiere describir el movimiento en relación a un sistema no inercial  $SQ \equiv (Qx'y'z')$ , siendo  $Q$  un punto arbitrario dado del sólido<sup>6</sup>, será necesario considerar el efecto de las fuerzas de inercia correspondientes.

### Sistema ligado a un punto del sólido con orientación arbitraria.-

Se plantea en primer lugar el caso más general, en que se desea establecer las ecuaciones del movimiento relativas a un sistema de referencia de orientación arbitraria  $SQ \equiv (Qx'y'z')$ , que no coincida necesariamente con el triedro del sólido que gira con el mismo ( $Qxyz$ ). Sea  $\Omega$  la velocidad de rotación del sólido, y  $\omega \neq \Omega$ , la del triedro ( $Qx'y'z'$ ). Sea  $\mathbf{r}$  el vector posición genérico medido desde  $O$ ,  $\mathbf{r}'$  el vector posición medido desde  $Q$ , y  $\mathbf{r}_Q = \mathbf{OQ}$  (figura 9.6). La relación entre la aceleración absoluta y la relativa al sistema

<sup>5</sup>Recordemos la diferencia existente entre el sistema de referencia en que un observador realiza las derivadas para las ecuaciones de la dinámica, con la expresión de las componentes de estas ecuaciones, que en un momento dado pueden obtenerse en cualquier triedro o sistema de coordenadas.

<sup>6</sup>Es decir,  $Q$  se identifica con una partícula dada del sólido; en general este punto no tiene porqué estar fijo en el espacio, ni coincidirá con el centro de masas, aunque sí sería “fijo” para un sistema de referencia ligado al sólido, al moverse junto con él.

no inercial ( $SQ$ ) es:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \underbrace{\ddot{\mathbf{r}}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}')}_{\mathbf{a}_{arr}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \wedge \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{SQ}}_{\mathbf{a}_{cor}} + \underbrace{\left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\right)_{SQ}}_{\mathbf{a}_{rel}} \quad (9.18)$$

El movimiento del sólido relativo a ( $SQ$ ) es una rotación instantánea de velocidad ( $\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}$ ), por lo que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{SQ} &= (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{r}' \quad (9.19) \\ \left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\right)_{SQ} &= \left(\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})\right)_{SQ} \wedge \mathbf{r}' + (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \wedge [(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{r}'] \end{aligned}$$

Para establecer la ecuación dinámica del movimiento relativo a ( $SQ$ ) es preciso añadir al momento de las fuerzas exteriores en  $Q$ ,  $\mathbf{M}_Q$ , el momento debido a las fuerzas (ficticias) de inercia originadas por  $\mathbf{a}_{arr}$  y  $\mathbf{a}_{cor}$ :

$$\mathbf{M}_Q^* = \mathbf{M}_Q - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}' \wedge (\mathbf{a}_{arr} + \mathbf{a}_{cor}) \rho dV \quad (9.20)$$

El desarrollo de esta expresión requeriría sustituir las expresiones de  $\mathbf{a}_{arr}$  a partir de (9.18) y  $\mathbf{a}_{cor}$  a partir de (9.18) y (9.19) y puede resultar algo engorroso.

**Sistema ligado a un punto del sólido, sin rotación.-** Es raro el caso en que sea necesario un planteamiento tan general como el anterior. En la práctica es más común que lo que interese sea el estudio del movimiento del sólido relativo a un punto  $Q$  del mismo, de movimiento conocido o impuesto, sin prescribir necesariamente una velocidad de rotación  $\boldsymbol{\omega}$  al triedro. En este caso, tomaremos el triedro de referencia ( $Qx'y'z'$ ) = ( $QXYZ$ ) con origen en  $Q$  y direcciones paralelas al inercial (cumpliendo un papel similar al del “triedro fijo” para el planteamiento de las ecuaciones de Euler), y por otra parte tomaremos el triedro “del cuerpo” ( $Qxyz$ ) con direcciones materiales fijas, es decir, que rote con el sólido. Será entonces  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , y (9.18) se convierte en:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_Q + \left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\right)_{SQ},$$

Por lo que el término adicional en (9.20) será únicamente el debido al arrastre de la traslación de  $Q$ :

$$- \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r}' \wedge \ddot{\mathbf{r}}_Q) \rho dV = - \underbrace{\mathbf{r}'_G}_{=QG} \wedge (M\ddot{\mathbf{r}}_Q) \quad (9.21)$$

Resulta finalmente la ecuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q - \mathbf{r}'_G \wedge (M\ddot{\mathbf{r}}_Q) &= \left( \frac{d\mathbf{H}_Q^{SQ}}{dt} \right)_{SQ} \\ &= \mathbf{I}_Q \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (9.22)$$

Nótese que en esta expresión se ha empleado el momento cinético  $\mathbf{H}_Q^{SQ}$  con velocidades relativas al sistema  $(SQ)$ , para el que es válida la expresión  $\mathbf{H}_Q^{SQ} = \mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega}$ . Sin embargo, si se empleasen velocidades “absolutas”, resultaría

$$\mathbf{H}_Q = \mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega} + M(\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_Q) \wedge \mathbf{v}_Q$$

Por otra parte, al igual que en el desarrollo de las ecuaciones de Euler, se ha derivado primero respecto al sistema de referencia  $(Qxyz)$ , utilizando la propiedad de constancia de  $\mathbf{I}_Q$  en relación con este sistema de referencia. El término adicional (9.21) se puede interpretar como el momento en  $Q$  de  $(-M\ddot{\mathbf{r}}_Q)$  situado en  $G$ .

**Sistema del Centro de Masas (SCM).**- En el caso en que sea  $Q \equiv G$ , será  $\mathbf{r}'_G = \mathbf{Q}G = \mathbf{0}$ , por lo que las fuerzas de inercia no dan momento en  $G$ , y la ecuación (9.22) es idéntica a la de un punto fijo en un sistema inercial (8.106):

$$\mathbf{M}_G = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_G = \mathbf{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega})$$

Este resultado lo conocíamos ya, habiéndolo visto al tratar del principio del momento cinético.

Si consideramos el movimiento de un sólido en el campo gravitatorio simplificado, sin otras fuerzas aplicadas ni ligaduras, será entonces posible descomponerlo en:

1. Movimiento del centro de masas  $G$ , como si fuera una partícula

$$\mathbf{a}_G = -g\mathbf{k},$$

que da lugar a una trayectoria parabólica.

2. Movimiento relativo a  $G$ , con momento nulo (movimiento por inercia), ya que el peso no produce momento respecto del centro de masas:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}_G = \mathbf{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{0} \quad (9.23)$$

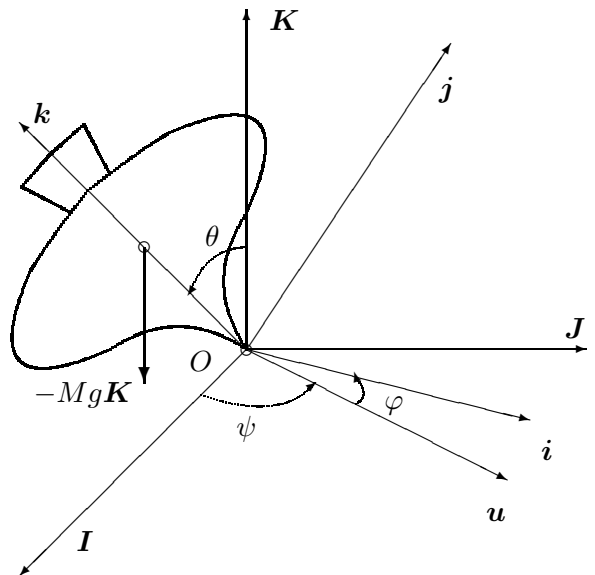
### 9.3. El giróscopo

#### 9.3.1. Ecuaciones del movimiento de una peonza

Consideremos el movimiento de una peonza con simetría de revolución, moviéndose con un punto de su eje fijo, sometida a su propio peso (figura 9.7). Tomando los ejes locales de forma que  $\mathbf{k}$  esté según el eje de revolución, el tensor de inercia es:

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Figura 9.7: *Movimiento de una peonza simétrica sometida a su propio peso, alrededor de un punto fijo  $O$  de su eje.*



La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} A (p^2 + q^2) + \frac{1}{2} C r^2$$

Desarrollando la expresión en función de los ángulos de Euler mediante (8.102):

$$T = \frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2$$

A su vez, el potencial es

$$V = Mgd \cos \theta$$



donde se ha llamado  $d = OG$ . La Lagrangiana resulta entonces:

$$L = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 - Mgd \cos \theta \quad (9.24)$$

Se observa que  $L$  no depende expl6citamente de  $\psi$  ( $\partial L/\partial \psi = 0$ ) ni de  $\varphi$  ( $\partial L/\partial \varphi = 0$ ); por lo tanto ambas coordenadas son c6clicas, y podemos escribir las correspondientes integrales primeras como ecuaciones del movimiento:

$$\boxed{p_\psi = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + C\dot{\psi} \cos^2 \theta + C\dot{\varphi} \cos \theta \quad (\text{cte})}$$

$$\boxed{p_\varphi = C \underbrace{(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)}_r \quad (\text{cte})}$$

La integral primera de  $p_\psi$  corresponde a la constancia del momento cin6tico seg6n el eje vertical  $\mathbf{K}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{K} &= (Ap \mathbf{i} + Aq \mathbf{j} + Cr \mathbf{k}) \cdot (\sin \theta \sin \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}) \\ &= A\dot{\psi} \sin^2 \theta + Cr \cos \theta \\ &= A\dot{\psi} \sin^2 \theta + C\dot{\psi} \cos^2 \theta + C\dot{\varphi} \cos \theta \\ &= H. \end{aligned}$$

Esta magnitud, que denotamos por la constante escalar  $H$ , se conserva puesto que el momento de las fuerzas en esta direcci6n fija es nulo:

$$M_Z = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{K} = [d\mathbf{k} \wedge (-Mg\mathbf{K})] \cdot \mathbf{K} = 0$$

La integral primera de  $p_\varphi$  expresa simplemente la constancia de  $r$ , componente de  $\boldsymbol{\Omega}$  seg6n el eje  $\mathbf{k}$  del cuerpo; de forma equivalente, se puede considerar que establece la conservaci6n del momento cin6tico seg6n este eje:

$$\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k} = (Ap \mathbf{i} + Aq \mathbf{j} + Cr \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = Cr$$

La conservaci6n de esta magnitud no es tan obvia como en el caso anterior, al ser  $\mathbf{k}$  una direcci6n m6vil. Para justificarla derivamos directamente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k}) &= \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k} + \mathbf{H}_O \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} \\ &= \underbrace{\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{k}}_{=0} + \mathbf{H}_O \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{k}) \\ &= (A - B)pq, \end{aligned}$$

siendo este término nulo gracias a que el sólido es de revolución ( $A = B$ ).

Al no existir fuerzas disipativas, otra integral primera es la constancia de la energía,  $T + V = E$ .

Resumiendo, las tres integrales primeras de la peonza simétrica son:

$$\boxed{H = A\dot{\psi} \operatorname{sen}^2 \theta + Cr \cos \theta \quad (\text{cte})} \quad (9.25)$$

$$\boxed{r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad (\text{cte})} \quad (9.26)$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta) + \frac{1}{2}Cr^2 + Mgd \cos \theta \quad (\text{cte})} \quad (9.27)$$

Podemos despejar  $\dot{\psi}$  de (9.25),

$$\dot{\psi} = \frac{H - Cr \cos \theta}{A \operatorname{sen}^2 \theta} \quad (9.28)$$

para después eliminarla en (9.27), obteniendo así una ecuación función de  $\theta$  exclusivamente, que expresaremos en relación a la nueva constante  $E'$ :

$$E' \stackrel{\text{def}}{=} E - \frac{1}{2}Cr^2 = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{(H - Cr \cos \theta)^2}{2A \operatorname{sen}^2 \theta} + Mgd \cos \theta \quad (9.29)$$

Realizando el cambio de variable:

$$u = \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -\frac{\dot{u}}{\sqrt{1 - u^2}}$$

se obtiene

$$E' = \frac{1}{2}A \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2} + \frac{(H - Cru)^2}{2A(1 - u^2)} + Mgd u$$

y despejando  $\dot{u}^2$ ,

$$\dot{u}^2 = f(u) = (1 - u^2) \left( \frac{2E'}{A} - \frac{2Mgd u}{A} \right) - \frac{(H - Cru)^2}{A^2} \quad (9.30)$$

Ecuación cuya solución se obtendría directamente mediante la cuadratura:

$$t(u) = \int_{u_0}^{u_t} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(2E'/A - 2Mgd u/A) - (H - Cru)^2/A^2}} \quad (9.31)$$

Una vez calculado  $u(t)$  y en consecuencia  $\theta(t)$ , sustituiríamos en las ecuaciones (9.25) y (9.26) para obtener  $\psi$  y  $\varphi$  respectivamente. La cuadratura

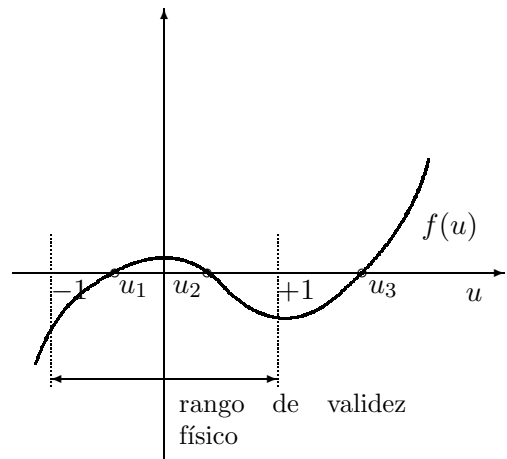
planteada en (9.31) no es inmediata de manera anal6tica, pero se puede abordar mediante integrales el6pticas, o bien por m6todos num6ricos.

Sin necesidad de obtener la soluci6n expl6cita, podemos sin embargo estudiar de manera cualitativa el movimiento. Para ello, observemos que las ra6ices de la ecuaci6n (9.30):  $f(u) = 0$ , corresponden a los puntos en que  $\dot{u} = 0$  y por tanto  $\dot{\theta} = 0$ , es decir los m6ximos o m6nimos locales de  $\theta$ . Al ser  $f(u)$  un polinomio c6cico, podr6 tener hasta tres ra6ices reales. Podemos acotar dos ra6ices de esta ecuaci6n, observando que para los valores

$$u = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad f(u) = -\frac{(H - Cru)^2}{A^2} < 0$$

El rango de validez de  $u$  es precisamente  $-1 < u < +1$ , correspondiente

Figura 9.8: *Valor de la ecuaci6n c6cica  $f(u)$ , de la que buscamos las ra6ices  $f(u) = 0$ , correspondientes a los valores extremos de la nutaci6n. Esta ecuaci6n siempre tiene dos ra6ices en el rango de validez f6sico de  $u$ ,  $-1 < u < +1$ .*



a  $\pi > \theta > 0$ . Al ser  $f(u) = \dot{u}^2$  esencialmente positivo, por motivos f6sicos en este rango existir6 al menos una zona en que  $f(u) > 0$ . Por tanto en el intervalo  $[-1, +1]$  existen dos ra6ices  $u_1$  y  $u_2$ . As6,  $\theta$  oscilar6 entre los dos valores correspondientes  $\theta_1 = \arccos u_1$  y  $\theta_2 = \arccos u_2$ , m6ximo y m6nimo de la nutaci6n,  $\theta_1 > \theta > \theta_2$ .

Una forma de visualizar geom6tricamente el movimiento es a trav6s de la trayectoria descrita por extremo del versor del eje de revoluci6n  $\mathbf{k}$ , que podr6 describir distintos tipos de curvas sobre una esfera de radio unidad, restringidas a la banda entre dos paralelos extremos:  $\theta_1 > \theta > \theta_2$  (ver figura 9.9). Los distintos comportamientos vienen definidos por el signo de la velocidad de precesi6n, obtenido por el numerador en la ecuaci6n (9.28), pudi6ndose distinguir tres casos en funci6n de las condiciones iniciales del movimiento (en concreto seg6n el valor de las constantes  $H$  y  $r$ ):

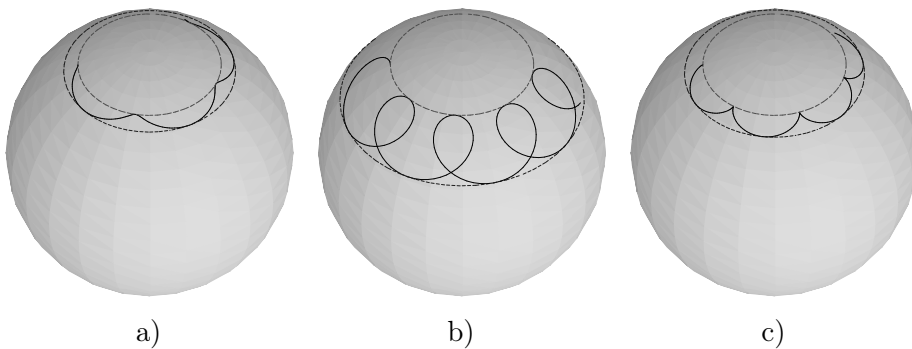


Figura 9.9: *Los tres tipos de soluciones para el movimiento de la peonza simétrica, obtenidos mediante integración numérica en el ordenador de las ecuaciones del movimiento. La figura representa, sobre una superficie esférica, la trayectoria del extremo del eje de revolución de la peonza. En el caso a) la velocidad de precesión lleva siempre el mismo signo; en el caso b) alterna de signo, describiendo bucles característicos; en el caso límite c), en los puntos de nutación mínima (puntos más altos de la trayectoria) se anula  $\dot{\psi}$ , produciendo cúspides en la trayectoria.*

1.  $H - Cr \cos \theta_2 > 0$  y  $H - Cr \cos \theta_1 > 0$ , en cuyo caso la precesión siempre tiene el mismo sentido;
2.  $H - Cr \cos \theta_2 < 0$  y  $H - Cr \cos \theta_1 > 0$ , en cuyo caso la precesión alterna de sentido, desarrollándose unos lazos característicos;
3.  $H - Cr \cos \theta_2 = 0$ , en cuyo caso se producen unas cúspides en la trayectoria con velocidad de precesión nula. Este caso se produce en la práctica cuando las condiciones iniciales corresponden a la peonza con rotación propia y su eje en reposo, a partir de una inclinación determinada (nutación  $\theta_2$ ). A partir de este instante la peonza empieza a caer y a precesionar simultáneamente, siendo inicialmente  $\dot{\psi} = 0$ .

### 9.3.2. Efecto giroscópico

El giróscopo es un cuerpo con simetría de revolución, con un punto de su eje fijo, y girando a gran velocidad respecto de dicho eje. En estas condiciones se produce el llamado “efecto giroscópico” que describimos a continuación.

Veremos en primer lugar el efecto giroscópico aplicado a la peonza simétrica estudiada en el apartado anterior. La condición de rotación propia

elevada la concretaremos admitiendo que la energa cinetica de rotaci6n alrededor de su eje sea mucho mayor que las posibles fluctuaciones de energa potencial gravitatoria. Como m6ximo, estas se producen al variar la altura de  $G$  entre  $[-d, +d]$ . Admitimos por tanto que

$$\frac{1}{2}Cr^2 \gg 2Mgd \quad (9.32)$$

De esta manera, al ser la energa asociada a la rotaci6n propia mucho mayor, cabe esperar que las oscilaciones de nutaci6n ( $\theta$ ) debidas al potencial gravitatorio sean pequeas, produci6ndose un movimiento de precesi6n con nutaci6n cuasi-constante. En la realidad, debido al inevitable amortiguamiento, estas oscilaciones pequeas en la nutaci6n se amortiguan, dando lugar con bastante aproximaci6n a un movimiento con nutaci6n constante.

En el planteamiento de las ecuaciones de Lagrange vimos que las correspondientes a  $\psi$  y  $\varphi$  daban lugar a sendas integrales primeras (9.25) y (9.26). La ecuaci6n en  $\theta$  se obtiene derivando la Lagrangiana (9.24):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = A\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr(-\dot{\psi} \sin \theta) + Mgd \sin \theta$$

y resulta

$$\boxed{A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr\dot{\psi} \sin \theta - Mgd \sin \theta = 0} \quad (9.33)$$

Deseamos comprobar las condiciones bajo las que se puede dar un movimiento con nutaci6n cuasi-constante. Suponiendo entonces que las oscilaciones de nutaci6n son pequeas y  $\ddot{\theta} \approx 0$ , se obtiene:

$$Mgd = Cr\dot{\psi} - A\dot{\psi}^2 \cos \theta$$

y resolviendo para  $\dot{\psi}$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{Cr \pm \sqrt{C^2r^2 - 4AMgd \cos \theta}}{2A \cos \theta} \\ &= \frac{Cr}{2A \cos \theta} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4AMgd \cos \theta}{C^2r^2}} \right) \end{aligned} \quad (9.34)$$

Para que puedan existir soluciones reales el radicando debe ser positivo, es decir  $C^2r^2 > 4AMgd \cos \theta$ . Debido a la hip6tesis anteriormente realizada

(9.32) queda garantizada esta condición. Por otra parte, considerando que la raíz en (9.34) se puede aproximar como  $\sqrt{1-\epsilon} \approx 1 - \epsilon/2$  (teniendo en cuenta  $\epsilon \ll 1$ ) se obtienen dos soluciones posibles para  $\dot{\psi}$ :

$$\begin{cases} \dot{\psi} \approx \frac{Cr}{A \cos \theta} & (\text{precesión rápida}) \\ \dot{\psi} \approx \frac{Mgd}{Cr} & (\text{precesión lenta}) \end{cases} \quad (9.35)$$

De las dos soluciones, la que se obtiene en la mayoría de los casos prácticos es la precesión lenta. Aunque en teoría sería posible la otra solución, la energía requerida es mucho mayor, por lo que es difícil alcanzar las condiciones iniciales precisas. No entramos en consideraciones de la estabilidad de las soluciones, que también juegan en contra de la precesión rápida por lo general.

Vemos pues que, en el caso del giróscopo sujeto a una fuerza gravitatoria excéntrica respecto del punto fijo, se ocasiona un movimiento de precesión alrededor del eje vertical paralelo a la acción gravitatoria, con velocidad constante.

Para generalizar este efecto, definamos los vectores siguientes:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_p = \dot{\psi} \mathbf{K} & (\text{velocidad de precesión}) \\ \mathbf{H}_z = (\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} = Cr \mathbf{k} & (\text{Momento cinético respecto del eje del cuerpo, orientado}) \end{cases}$$

El vector  $\mathbf{H}_z$  tiene módulo constante, siendo su ángulo con la dirección fija  $\mathbf{K}$  asimismo constante (e igual a  $\theta$ ). Su evolución es una rotación alrededor de  $\mathbf{k}$  con velocidad  $\boldsymbol{\omega}_p$ . Por tanto, aplicando la fórmula de derivación de vectores móviles,

$$\frac{d\mathbf{H}_z}{dt} = \boldsymbol{\omega}_p \wedge \mathbf{H}_z = \dot{\psi} Cr (\mathbf{K} \wedge \mathbf{k}) \quad (9.36)$$

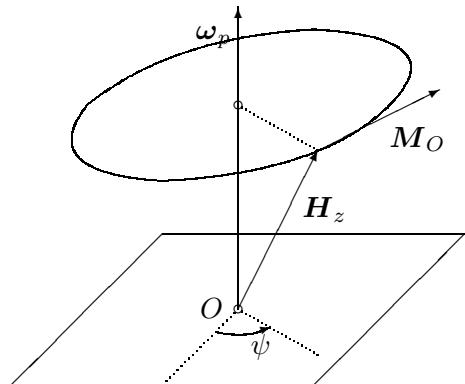
El momento de las fuerzas en  $O$  vale

$$\mathbf{M}_O = d\mathbf{k} \wedge (-Mg\mathbf{K}) = Mgd(\mathbf{K} \wedge \mathbf{k}). \quad (9.37)$$

Podemos comprobar que, si se sustituye el valor obtenido en (9.35) para la precesión lenta,  $\dot{\psi} = Mgd/Cr$ , en la ecuación (9.36), se obtiene la identidad de esta última con (9.37):

$$\mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{H}_z}{dt} = \boldsymbol{\omega}_p \wedge \mathbf{H}_z.$$

Figura 9.10: En el movimiento girosc6pico, el vector  $\mathbf{H}_z$  que define el eje del gir6scopo gira alrededor del eje  $\omega_p$ , movi6ndose en direcci6n normal a la fuerza aplicada (es decir, paralelamente al momento  $\mathbf{M}_O = d\mathbf{k} \wedge \mathbf{F}$ ).



El resultado anterior se verifica no s6lo para el momento originado por el peso, sino en general para una fuerza exc6ntrica  $\mathbf{F}$  cualquiera. Si consideramos a 6sta aplicada en un punto  $P$  definido por  $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ , considerando el eje  $\mathbf{K}$  de precesi6n en la direcci6n de  $\mathbf{F}$ , se verifica igualmente

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \omega_p \wedge \mathbf{H}_z$$

Conviene destacar dos caracter6sticas importantes del efecto girosc6pico, aparentemente contradictorias con las leyes cl6sicas de la din6mica, al menos tal y como se formulan para part6culas:

1. La acci6n de una fuerza  $\mathbf{F}$  sobre el s6lido produce un desplazamiento del eje del cuerpo en direcci6n *perpendicular a  $\mathbf{F}$* , en lugar de seg6n la direcci6n de  $\mathbf{F}$ . En efecto, el movimiento del eje lleva la direcci6n de  $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$ .
2. La acci6n de  $\mathbf{F}$  y por consiguiente  $\mathbf{M}_O$  produce una *velocidad de precesi6n constante*, en lugar de una aceleraci6n constante, como ocurrir6a en un cuerpo sin efecto girosc6pico. Si cesa la acci6n de  $\mathbf{M}_O$ , cesa inmediatamente la velocidad de precesi6n.

Un gir6scopo que no est6 sometido a momentos —por ejemplo, si est6 sometido al campo gravitatorio en movimiento libre, en cuyo caso el momento respecto del centro de masas es nulo— mantiene fija la orientaci6n de su eje con una gran exactitud. Tan s6lo se produce una variaci6n de la direcci6n de su eje si se aplica un momento sobre 6l, precesionando en este caso seg6n la direcci6n del momento. Similarmente al concepto de “fuerzas de inercia” en din6mica de la part6cula, que representa la resistencia a variar

la velocidad de la misma, se produce aquí un “momento giroscópico” que es la resistencia a variar la orientación del eje del giróscopo.

Este fenómeno es la base de numerosas aplicaciones prácticas. Cabe citar entre ellas la brújula giroscópica. Esta consiste en un giróscopo cuyo eje puede girar libremente alrededor del centro de masas, con la única restricción de obligarle a mantenerse horizontal. En estas condiciones el eje tiende a colocarse orientado hacia el Norte geográfico, con oscilaciones pequeñas alrededor de esta orientación<sup>7</sup>. Asimismo, los giróscopos se emplean como sistemas de navegación inercial en aeronaves, cohetes, y satélites espaciales.

Por último, un fenómeno interesante basado en el efecto giroscópico es la *precesión de los equinoccios* en el movimiento de la tierra. Es sabido que

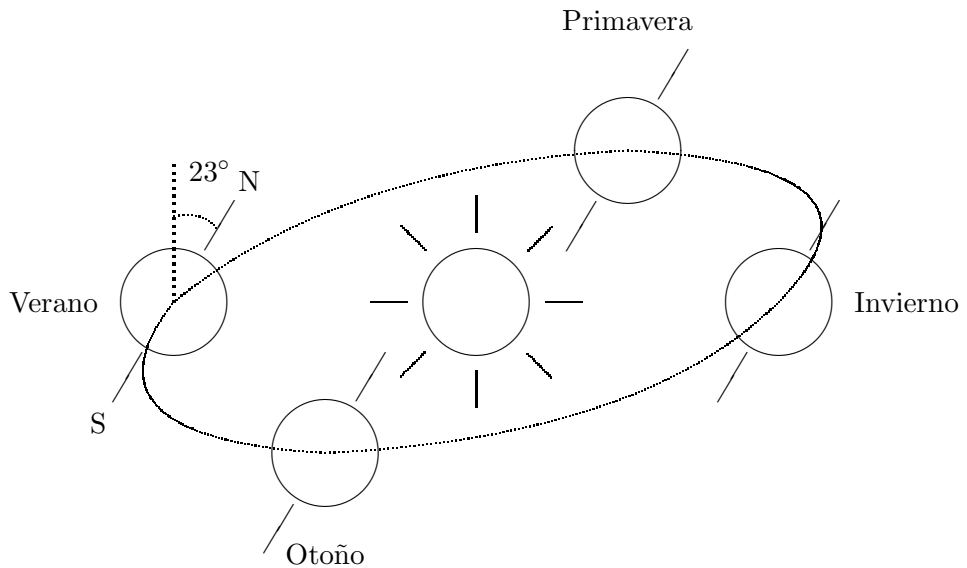


Figura 9.11: *En el movimiento de la tierra alrededor del sol, que se desarrolla sobre el plano de la eclíptica, debido a los momentos originados por la atracción excéntrica del sol y la luna, el eje N-S de rotación de la tierra precesiona muy lentamente alrededor de la perpendicular al plano, originando el fenómeno llamado “precesión de los equinoccios”.*

el movimiento de la tierra se produce en el plano de la eclíptica, con una rotación propia alrededor del eje N-S que se halla inclinado respecto a la

<sup>7</sup>Se puede encontrar una descripción más detallada de la brújula giroscópica en: J.A. Fernández Palacios, *Mecánica teórica de los sistemas de sólidos rígidos*, Ed. el autor, 1989; J.L. Synge y B.A. Griffith, *Principles of Mechanics*, McGraw-Hill 1970; J.M. Bastero y J. Casellas, *Curso de Mecánica*, Ediciones Univ. de Navarra, 1987



ecl6ptica unos  $23^\circ$ . Esta inclinaci3n produce una incidencia distinta de los rayos solares en distintas fases de la 3rbita terrestre, siendo la responsable de los equinoccios (primavera y oto3o) y los solsticios (verano e invierno). En principio, parece que el eje de la tierra se mantiene constante en direcci3n, por lo cual los equinoccios ocurrir6an siempre en la misma 3poca del a3o sidereo. Si la tierra fuera perfectamente esf6rica y homog6nea, esto ser6a as6, ya que la acci3n gravitatoria del sol y de la luna dar6an un momento neto nulo respecto del centro de masas, con lo cual no existir6a precesi3n de su eje. Sin embargo la tierra no es una esfera homog6nea sino que est6 achatada, no siendo tampoco perfectamente uniforme, debido a la fuerza centr6fuga de la propia rotaci3n terrestre. As6 el momento neto ejercido por la luna y el sol sobre la tierra producen una precesi3n del eje de giro (N-S) de la tierra alrededor de la normal a la ecl6ptica, con un periodo aproximado de 26.000 a3os.

Esto quiere decir que, respecto a direcciones fijas en el firmamento, l3ase estrellas del zodiaco o galaxias lejanas, la posici3n de los equinoccios var6a a lo largo del tiempo; cada 2000 a3os aproximadamente se produce un corrimiento de un mes. As6 los signos del Zodiaco, asociados con la posici3n de la tierra alineada en la ecl6ptica bajo diversas constelaciones en el firmamento celeste que dan su nombre a cada signo, no corresponden a fechas fijas en el calendario de las estaciones. Asimismo, en cada 3poca distintas estrellas hacen el papel de estrella Polar (situada sobre el Norte, en la prolongaci3n del eje N-S).

### 9.3.3. Estabilidad de la peonza dormida

Estudiamos aqu6 la estabilidad del movimiento de la peonza sim6trica, cuyas ecuaciones se desarrollaron en el apartado 9.3.1, en la posici3n  $\theta = 0$  (peonza «dormida»). El estudio de estabilidad tiene como objetivo analizar bajo qu6 condiciones un movimiento posible, cuando est6 sometido a peque3as perturbaciones, se mantiene pr3ximo al movimiento original, en cuyo caso se denomina *estable*. En el caso contrario, cualquier perturbaci3n peque3a respecto del movimiento producir6 la p3rdida del mismo, denomin6ndose *inestable*.

Estudiaremos las oscilaciones de nutaci3n ( $\theta$ ), caracterizadas por la ecuaci3n de Lagrange correspondiente que ya fue deducida anteriormente (9.33):

$$A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr\dot{\psi} \sin \theta - Mgd \sin \theta = 0. \quad (9.38)$$

Esta ecuaci3n se ve complementada por las dos integrales primeras de la

peonza simétrica, expresadas anteriormente en (9.25) y (9.26):

$$H = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + Cr \cos \theta = \text{cte.} \quad (9.39)$$

$$Cr = \text{cte.} \quad (9.40)$$

Al ser inicialmente  $\theta = 0$ , de la primera de las expresiones anteriores (9.39) se deduce que la constante es  $H = Cr$ . Empleando este valor y despejando  $\dot{\psi}$  en (9.39),

$$\dot{\psi} = \frac{H - Cr \cos \theta}{A \sin^2 \theta} = \frac{Cr}{A} \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta};$$

si se tiene en cuenta que el valor de  $\theta$  es pequeño, desarrollando en esta expresión denominador y numerador de forma que despreciemos términos de orden superior a 2,

$$\dot{\psi} \approx \frac{Cr}{A} \frac{\theta^2/2}{\theta^2} = \frac{Cr}{2A}.$$

Sustituimos ahora el valor de  $\dot{\psi}$  en la ecuación (9.38), y despreciamos los términos de orden 2 ó superior en función de  $\theta$  pequeño:

$$A\ddot{\theta} - A \left( \frac{Cr}{2A} \right)^2 \theta + Cr \frac{Cr}{2A} \theta - Mgd\theta = 0$$

$$\downarrow$$

$$A\ddot{\theta} + \left( \frac{C^2 r^2}{4A} - Mgd \right) \theta = 0.$$

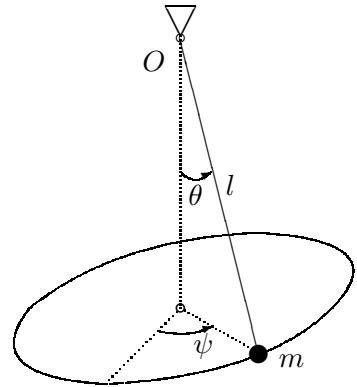
Observamos que esta ecuación corresponde a un oscilador armónico simple, siempre que el coeficiente de  $\theta$  sea positivo, en cuyo caso resulta un movimiento armónico acotado para  $\theta$ . La condición de estabilidad es por tanto

$$\frac{C^2 r^2}{4A} > Mgd. \quad (9.41)$$

## 9.4. El péndulo esférico

Sea una masa puntual  $m$  sujeta al extremo de una varilla rígida y sin masa de longitud  $l$ , cuyo otro extremo ( $O$ ) está fijo. No tiene sentido en este caso definir la rotación propia, por lo que el movimiento está caracterizado únicamente por dos ángulos:  $\psi$  (precesión) y  $\theta$  (nutación) (figura 9.12). Las ecuaciones son similares a la peonza simétrica, pero sin considerar rotación propia. Eligiendo como triedro “del cuerpo” un triedro con la dirección  $Oz$

Figura 9.12: Un péndulo esférico consiste en una masa puntual  $m$  unida por una varilla rígida a un punto fijo  $O$ , pudiéndose mover en cualquier dirección del espacio.



según la varilla, los ejes resultan principales de inercia y el tensor de inercia en  $O$  vale

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} ml^2 & & \\ & ml^2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

La Lagrangiana es

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}ml^2(p^2 + q^2) + mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta \end{aligned}$$

Podemos expresar dos integrales primeras: en primer lugar  $\psi$  es una coordenada cíclica,

$$\boxed{H = ml^2 \dot{\psi} \sin^2 \theta} \quad (9.42)$$

Por otra parte, la energía total se conserva, al estar en el campo gravitatorio:

$$\boxed{E = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta} \quad (9.43)$$

De la ecuación (9.42) despejamos:

$$\dot{\psi} = \frac{H}{ml^2 \sin^2 \theta}$$

De esta expresión se desprende que  $\dot{\psi}$  nunca cambia de signo, al contrario de lo que podría ocurrir en la peonza, en la que la ecuación correspondiente (9.28) resultaba:

$$\dot{\psi} = \frac{H - Cr \cos \theta}{A \sin^2 \theta}$$

Eliminando  $\dot{\psi}$  en la ecuación (9.43), se obtiene:

$$E = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{H^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta,$$

y despejando  $\dot{\theta}^2$ ,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E}{ml^2} - \frac{H^2}{m^2 l^4 \sin^2 \theta} + \frac{2g}{l} \cos \theta$$

Se puede ahora realizar el cambio

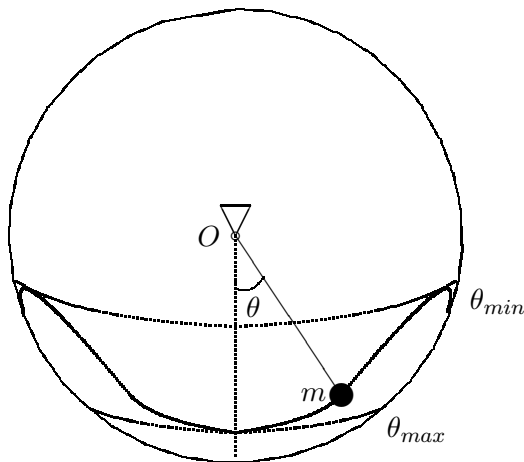
$$u = \cos \theta; \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2},$$

obteniéndose al eliminar  $\theta$  una ecuación cúbica en  $u$ :

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2) \left( \frac{2E}{ml^2} + \frac{2g}{l}u \right) - \frac{H^2}{m^2 l^4} = f(u).$$

Esta ecuación posee tres soluciones reales para  $f(u) = \dot{u}^2 = 0$ , correspondientes a puntos de máximo o mínimo de  $u$ . De ellas, dos y sólo dos están comprendidas entre  $u = 1$  y  $u = -1$ , rango de validez del cambio de variable anterior. En efecto, ha de existir un intervalo de validez física en que  $f(u) > 0$ , ya que en el movimiento real  $\dot{u}^2 > 0$  es intrínsecamente positivo. Sin embargo en  $u = \pm 1$ ,  $f(u) < 0$ ; luego dentro del intervalo considerado, debe haber dos puntos en que  $f(u) = 0$ .

Figura 9.13: La trayectoria del péndulo esférico se sitúa entre dos valores extremos, máximo y mínimo, de la nutación. El mínimo (punto más bajo de la trayectoria) está necesariamente por debajo del punto  $O$ , es decir, por debajo del ecuador de la esfera.



Por ello, al igual que ocurría en la peonza simétrica (ver apartado 9.3.1 y figura 9.9), la nutación  $\theta$  oscilará comprendida entre dos valores extremos,  $\theta_{min}$  y  $\theta_{max}$ .

Se puede demostrar que en el péndulo el mínimo de  $\theta$  necesariamente debe estar por debajo del punto de apoyo  $O$ , es decir,  $0 \leq \theta_{min} \leq \pi/2$ . En efecto, obtengamos la ecuación de Lagrange en  $\theta$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta}; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgl \sin \theta,$$

resultando

$$ml^2 \ddot{\theta} = ml^2 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgl \sin \theta.$$

Para  $\pi/2 < \theta < \pi$  se verifica  $\sin \theta > 0$ ,  $\cos \theta < 0$ ; por tanto de la ecuación de Lagrange anterior se deduce que en este intervalo  $\ddot{\theta} < 0$ , lo que hace imposible que exista un mínimo dentro de él (asociado a  $\ddot{\theta} > 0$ ). El mínimo de  $\theta$  ha de estar necesariamente entre 0 y  $\pi/2$ , como queríamos demostrar (figura 9.13).



# Capítulo 10

## Dinámica de impulsiones

### 10.1. Introducción

La dinámica de impulsiones estudia las situaciones en las que se producen cambios rápidos en la cantidad de movimiento o en el momento cinético de sistemas materiales. Estos fenómenos se suelen denominar *impactos*, *percusiones* o *choques*, y exigen fuerzas muy elevadas, que actúan durante intervalos de tiempo muy cortos. Ello permite que, al estudiar los cambios de movimiento debidos a la impulsión, se puedan despreciar las otras fuerzas “ordinarias” de valor acotado, por ser su efecto muy pequeño respecto al de las fuerzas impulsivas.

En la dinámica de impulsiones para sistemas discretos<sup>1</sup> se admite que el cambio de movimiento puede ser considerado como instantáneo, de forma que se estudia tan sólo el salto entre la situación inmediatamente anterior y la inmediatamente posterior a la impulsión. Se emplea un modelo simplificado, en el que se desprecian los efectos de deformabilidad de los sólidos y de transmisión de ondas de tensión en los mismos, pero que puede resultar válido siempre que las condiciones se aproximen a las de una impulsión teórica (intervalo de tiempo muy corto y fuerzas muy elevadas).

---

<sup>1</sup>es decir, aquellos que se representan mediante un número finito (discreto) de parámetros, como las partículas, conjuntos de partículas, sólidos rígidos, y mecanismos o ensamblajes de piezas rígidas. Por el contrario, *los medios continuos* (fluidos, sólidos deformables, estructuras de piezas prismáticas o laminares) poseen un número infinito de grados de libertad

## 10.2. Teoría de impulsiones

### 10.2.1. Impulsión sobre una partícula

Consideramos una partícula (punto material) de masa  $m$ , con velocidad  $v_1$  en el instante inmediatamente anterior a la impulsión y  $v_2$  en el instante inmediatamente después, moviéndose según una recta. Se trata por tanto de un sistema con un sólo grado de libertad.

Suponemos asimismo que se produce una fuerza impulsiva que actúa durante un intervalo de tiempo pequeño  $[\tau - \epsilon, \tau + \epsilon]$ , centrado en el instante  $\tau$ .

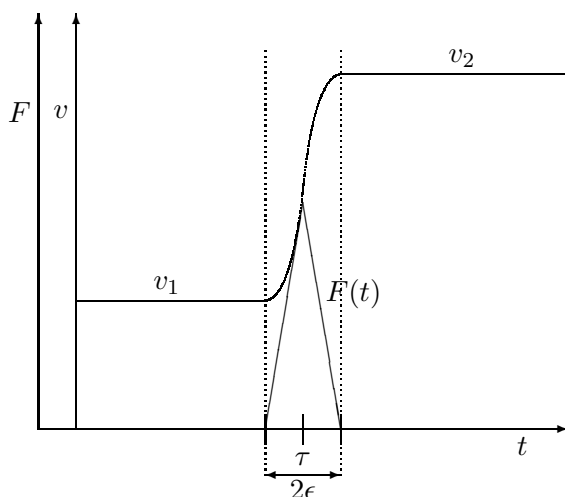


Figura 10.1: La variación de las velocidades en una impulsión se produce en un intervalo de tiempo  $[\tau - \epsilon, \tau + \epsilon]$  muy breve, asociado a una fuerza de tipo impulsivo de valor máximo elevado.

Definimos la *impulsión* como el incremento de la cantidad de movimiento de la partícula debido a esta fuerza:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} mv_2 - mv_1 = \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} F dt$$

Podemos generalizar esta definición a un movimiento no rectilíneo, en el cual se produzca también una variación de la velocidad en dirección, mediante la expresión vectorial:

$$\mathbf{I} \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \mathbf{F} dt \quad (10.1)$$

En la teoría de impulsiones se adopta la hipótesis de que la duración del intervalo de la impulsión ( $2\epsilon$ ) es muy breve, pudiendo considerarse el fenómeno como prácticamente instantáneo. Al mismo tiempo se admite que



la integral (10.1) conserva un valor finito para la impulsión. Para que esto ocurra, el módulo de la fuerza impulsiva  $\mathbf{F}$  debe ser muy alto, mucho mayor que las fuerzas ordinarias, y en el límite de impulsión instantánea ( $\epsilon \rightarrow 0$ ), infinito ( $F \rightarrow \infty$ ).

### 10.2.2. Fuerzas impulsivas; función delta de Dirac

Las fuerzas impulsivas que verifican las hipótesis de la teoría de impulsiones se pueden describir mediante un formalismo matemático que emplea la función delta de Dirac. Esta función  $\delta(t)$  se define de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad \delta(t) = 0 \quad \text{para todo } t \neq 0 \\ 2. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{array} \right. \quad (10.2)$$

Estas condiciones implican que para  $t \rightarrow 0$ ,  $\delta(t) \rightarrow \infty$ .

También deducimos de ellas que la integral vale 1 cuando se extiende a cualquier intervalo finito que comprenda el punto  $t = 0$ :

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(t) dt = 1 \quad (10.3)$$

Como corolario, podemos afirmar que para cualquier función acotada  $f(t)$  se cumple

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau). \quad (10.4)$$

Esto se demuestra fácilmente, puesto que al ser nulo  $\delta(t - \tau)$  salvo en el punto  $t = \tau$ , podemos sustituir en (10.4)  $f(t)$  por la constante  $f(\tau)$ , que sale fuera de la integral; empleando la propiedad (10.3), se obtiene directamente el resultado buscado.

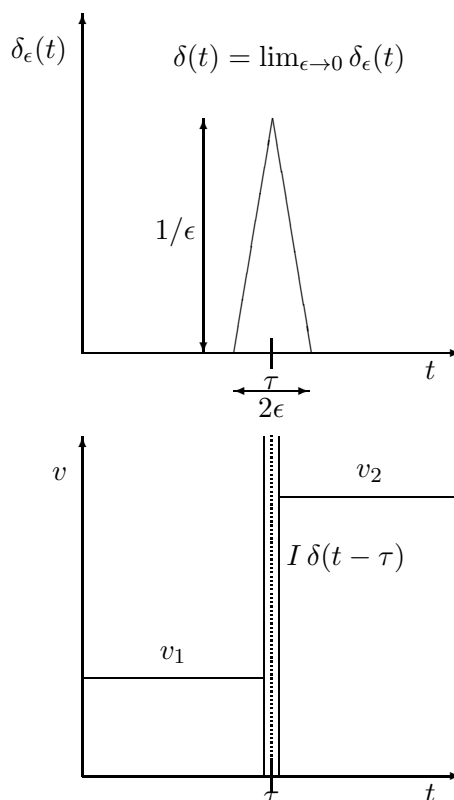
Definimos la fuerza impulsiva que produce la impulsión  $\mathbf{I}$  en el instante  $\tau$  como

$$\boxed{\mathbf{F}^{imp}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I} \delta(t - \tau)} \quad (10.5)$$

En virtud de (10.4) la integral de esta fuerza sobre cualquier intervalo que contenga el instante  $\tau$  será precisamente la impulsión  $\mathbf{I}$ . Asimismo, la fuerza tiene valor nulo para cualquier otro instante  $t \neq \tau$ .

En el estudio de los fenómenos impulsivos distinguiremos entre dos clases de fuerzas, las *fuerzas impulsivas*  $\mathbf{F}^{imp}$ , causantes de la variación “impulsiva” del movimiento, y las *fuerzas ordinarias*,  $\mathbf{F}^{ord}$ .

Figura 10.2: La función  $\delta$  de Dirac permite representar la fuerza impulsiva como  $F(t) = I \delta(t - \tau)$ , de forma que se produce un salto  $I$  de la cantidad de movimiento en el instante  $\tau$ .



Fuerzas ordinarias son aquellas cuyo efecto durante el breve intervalo de la impulsión es despreciable frente a las impulsivas. Para tener efectos apreciables en el movimiento, necesitan intervalos de tiempo mayores (un ejemplo es el peso o acción gravitatoria).

Esta distinción es claramente relativa, e imposible de cuantificar de manera exacta. La teoría de impulsiones no es por tanto absolutamente exacta, sino que constituye un modelo aproximado, que será más preciso cuanto más nítida sea la distinción entre ambos tipos de fuerzas.

El papel de las fuerzas ordinarias en una impulsión se puede establecer calculando la integral del impulso:

$$\int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} [\mathbf{F}^{imp}(t) + \mathbf{F}^{ord}(t)] dt$$

Por la definición de  $\mathbf{F}^{imp}$  (10.5), la integral anterior valdrá:

$$\int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \mathbf{I} \delta(t - \tau) dt + \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \mathbf{F}^{ord}(t) dt = \mathbf{I} + \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \mathbf{F}^{ord}(t) dt \quad (10.6)$$

Al estar  $\mathbf{F}^{ord}(t)$  acotada, el impulso debido a ellas se hace despreciable si  $\epsilon \rightarrow 0$ , mientras que el efecto de las fuerzas impulsivas se mantiene finito.

### 10.2.3. Axiomática

En función de los conceptos anteriores, se puede definir una axiomática para las impulsiones como sigue.

- *Principio de acción y reacción.*

Por cada impulsión  $\mathbf{I}$  existe otra impulsión reactiva ( $-\mathbf{I}$ ), igual y de sentido contrario. Este axioma proviene directamente de generalizar el principio de acción y reacción para las fuerzas.

- *Impulsiones exteriores e interiores.*

Las impulsiones se consideran interiores si ambas (activa y reactiva) se ejercen sobre puntos que pertenecen al sistema; si la impulsión actúa entre una partícula del sistema y otras externas a él, se llama exterior. En este caso, la reacción está fuera del sistema, mientras que si es interior tanto acción ( $\mathbf{I}$ ) como reacción ( $-\mathbf{I}$ ) se producen sobre el sistema, siendo la impulsión neta nula.

- *Aditividad Vectorial*

El efecto de dos o más impulsiones simultáneas es igual al de su suma vectorial, como vectores deslizantes. El concepto de simultaneidad hay que matizarlo, pues en la práctica es imposible que dos impulsiones ocurran de forma exactamente simultánea. Se consideran simultáneas las impulsiones si actúan con una diferencia de tiempo del orden del intervalo real de actuación de las fuerzas impulsivas.

### 10.2.4. Teorema fundamental

Basándose en la axiomática arriba expuesta, podemos considerar los siguientes sistemas de vectores deslizantes:

- $\Sigma_1$  Cantidades de movimiento de cada partícula antes del choque.
- $\Sigma_2$  Cantidades de movimiento después del choque.
- II Impulsiones sobre cada partícula (interiores y exteriores).

La igualdad vectorial establecida en la definición de la impulsión sobre una partícula nos permite establecer la equivalencia siguiente entre sistemas de vectores deslizantes:

$$m\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}_1 + \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Sigma_2 \equiv \Sigma_1 + \Pi}$$

Donde el signo + de la fórmula recuadrada indica la composición de sistemas de vectores deslizantes.

Puesto que las impulsiones interiores, por el principio de acción y reacción, forman un sistema nulo, el *Teorema fundamental* de la dinámica de impulsiones permite expresar la equivalencia como:

$$\boxed{\Sigma_2 \equiv \Sigma_1 + \Pi_{ext}} \quad (10.7)$$

Donde  $\Pi_{ext}$  es el sistema de vectores deslizantes que sólo incluye las impulsiones exteriores.

La aplicación del teorema fundamental (10.7) se hace a través de las igualdades de resultante y momentos, como criterio para la equivalencia de sistemas de vectores deslizantes:

$$\Sigma_2 \equiv \Sigma_1 + \Pi_{ext} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Phi_2 = \Phi_1 + \sum \mathbf{I}^{ext} \\ (\mathbf{H}_O)_2 = (\mathbf{H}_O)_1 + \sum \mathbf{r} \wedge \mathbf{I}^{ext} \end{cases} \quad (10.8)$$

Donde  $\Phi$  y  $\mathbf{H}_O$  son respectivamente la cantidad de movimiento y el momento cinético totales del sistema.

Las ecuaciones de equivalencia (10.8) son condiciones necesarias que ha de verificar el sistema de vectores deslizantes  $\Sigma_2$ , pero no constituyen en un caso general un conjunto suficiente de condiciones para determinar  $\Sigma_2$ . Para comprender esto basta darse cuenta de que se trata de 6 ecuaciones escalares, y siempre que el sistema tenga mayor número de grados de libertad, serán precisas ecuaciones adicionales.

Como criterio práctico, las ecuaciones (10.8) no serán suficientes si existen grados de libertad o movimientos relativos internos permitidos en el sistema. En este caso, sería necesario dividirlo en subsistemas para establecer las ecuaciones adicionales necesarias, aplicando la equivalencia (10.8) en cada subsistema.

Al contrario que en las ecuaciones de la dinámica, el punto  $O$  en el que se toman los momentos en (10.8) puede ser un punto geométrico cualquiera, puesto que en estas ecuaciones no interviene el tiempo, sino que se plantea únicamente la equivalencia de sistemas de vectores deslizantes en un instante dado. No existe por tanto la restricción de que el punto sea fijo, como

veíamos en dinámica de sistemas para el teorema del momento cinético. Ahora bien, es necesario tener precaución a la hora de evaluar el momento cinético si el punto no tiene velocidad nula, no pudiéndose aplicar entonces algunas de las fórmulas usuales (ver apartado 11.4.2).

### 10.2.5. Aplicación del principio de los trabajos virtuales

Puesto que el sistema  $(\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Pi)$  es un sistema nulo, la impulsión se puede plantear como un problema de equilibrio, pudiendo aplicar por tanto el principio de los trabajos virtuales enunciado en el apartado 6.4.1. Tal y como se observó entonces, la ventaja más importante de este principio consiste en que establece una condición necesaria y suficiente para el equilibrio global de un sistema, sin necesidad de considerar las fuerzas de reacción que no realizan trabajo virtual. Buscaremos aquí por tanto la misma ventaja, de forma que se puedan eliminar de la expresión de equilibrio las impulsiones debidas a los vínculos lisos y permanentes.

Suponemos un sistema general sometido a un conjunto de impulsiones  $\{\mathbf{I}_i\}$ ; para cualquier conjunto de velocidades virtuales  $\{\mathbf{v}_i^*\}$  se ha de cumplir

$$\sum_i (m_i \Delta \mathbf{v}_i - \mathbf{I}_i) \cdot \mathbf{v}_i^* = 0 \quad \forall \{\mathbf{v}_i^*\} \quad (10.9)$$

Donde el sumatorio  $\sum_i$  se extiende a todas las partículas del sistema. Si las velocidades virtuales  $\mathbf{v}_i^*$  en (10.9) son completamente arbitrarias, en esta suma se deben incluir todas las impulsiones, tanto internas como externas, activas y reactivas. Esto es debido a que, en un caso general, aunque para cada percusión interna exista otra reactiva, de forma que su suma neta es nula, el trabajo virtual de las dos no lo es necesariamente. Supongamos para ello una percusión  $\mathbf{I}$  sobre una partícula  $A$ , con velocidad virtual  $\mathbf{v}^*$ , y la reacción  $-\mathbf{I}$  sobre  $B$  con velocidad virtual  $-\mathbf{v}^*$ . El trabajo virtual de esta pareja de impulsiones es

$$W^* = \mathbf{I} \cdot \mathbf{v}^* + (-\mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{v}^*) = 2\mathbf{I} \cdot \mathbf{v}^* \neq 0$$

Debido a esto, el enunciado más general del Principio de Trabajos Virtuales (10.9), para velocidades virtuales  $\{\mathbf{v}_i^*\}$  completamente arbitrarias, no resulta de gran utilidad práctica.

Si restringimos el sistema a uno con vínculos lisos y bilaterales, de forma que todas las impulsiones interiores se deban a vínculos permanentes, y consideramos tan sólo velocidades virtuales compatibles con los enlaces  $\{\mathbf{v}_i^*\}$ , es posible eliminar el efecto de las impulsiones interiores:

$$\sum_i (m_i \Delta \mathbf{v}_i - \mathbf{I}_i^{ext}) \cdot \mathbf{v}_i^* = 0 \quad \forall \{\mathbf{v}_i^*\} \text{ compatibles} \quad (10.10)$$

Tan sólo necesitamos tener en cuenta en este enunciado las impulsiones externas, al desaparecer las internas porque no realizan trabajo virtual. No desaparecerían, en cambio, las impulsiones debidas a choques internos con separación (vínculos no permanentes), puesto que las velocidades virtuales del punto de acción y del de reacción no serán necesariamente las mismas, y por tanto pueden dar trabajo virtual neto no nulo. En caso de existir estas impulsiones, no invalidarían la aplicación de (10.10), sino que habría que introducirlas como sumandos adicionales en la expresión del trabajo virtual en dicha ecuación.

### 10.2.6. Aplicación del principio de la cantidad de movimiento

El principio de la Cantidad de Movimiento (6.4) establece que, para un sistema cuya cantidad de movimiento es  $\Phi$ ,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i^{ext}}_{\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}}$$

Descomponiendo las fuerzas exteriores en impulsivas y ordinarias, e integrando para una impulsión que ocurra en el instante  $t = \tau$ :

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \left( \sum_i \mathbf{F}_i^{imp} + \sum_i \mathbf{F}_i^{ord} \right) dt \quad (10.11)$$

$$= \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \left( \sum_i \mathbf{I}_i^{ext} \delta(t - \tau) \right) dt + \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \left( \sum_i \mathbf{F}_i^{ord} \right) dt \quad (10.12)$$

despreciando, para  $\epsilon \rightarrow 0$ , el efecto de  $\sum_i \mathbf{F}_i^{ord}$ , resulta la ecuación de balance

$$\boxed{\Phi_2 - \Phi_1 = \sum_i \mathbf{I}_i^{ext}} \quad (10.13)$$

Observamos que el resultado es el mismo que el obtenido antes en (10.8<sub>1</sub>).

### 10.2.7. Aplicación del principio del momento cinético

La expresión de este principio es (6.12):

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \underbrace{\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext}}_{\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}_O}$$

Integramos esta expresión descomponiendo  $\mathbf{F}_i^{ext}$  en Fuerzas impulsivas ( $\mathbf{F}_i^{imp}$ ) y Fuerzas ordinarias ( $\mathbf{F}_i^{ord}$ ), ambas exteriores:

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1 &= \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \left[ \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{imp} + \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ord} \right] dt \\ &= \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \wedge \left[ \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \mathbf{I}_i^{ext} \delta(t - \tau) dt + \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \mathbf{F}_i^{ord} dt \right], \end{aligned} \quad (10.14)$$

siendo  $\bar{\mathbf{r}}_i$  la posición media de cada partícula durante la impulsión. La primera integral es precisamente la impulsión, mientras que la segunda es despreciable para  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\boxed{(\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1 = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{I}_i^{ext}} \quad (10.15)$$

Donde  $\bar{\mathbf{r}}_i$  ha sido sustituido por  $\mathbf{r}_i$  (Posición de cada partícula en el instante  $\tau$ ), al tender el intervalo  $[\tau - \epsilon, \tau + \epsilon]$  a cero. Observamos, al igual que antes, que se obtiene idéntico resultado que el expresado en (10.8<sub>2</sub>).

Esta ecuación, al contrario que (6.12) para el caso general de la dinámica, se puede aplicar también tomando momentos respecto de un punto que no sea fijo. En efecto, se vió en el apartado 6.3 que al tomar un punto  $Q$  cualquiera aparecía un término adicional en la ecuación del momento cinético (6.23):

$$\frac{d\mathbf{H}_Q}{dt} = \mathbf{M}_Q - M\mathbf{v}_Q \wedge \mathbf{v}_G$$

Sin embargo, el término adicional  $M\mathbf{v}_Q \wedge \mathbf{v}_G$  está acotado, al estarlo las velocidades de los dos puntos  $G$  y  $Q$ , y se puede englobar por tanto dentro de las fuerzas ordinarias, cuyos efectos de cambio de movimiento durante la percusión se desprecian por ser el intervalo de actuación infinitesimal.

## 10.3. Consideraciones energéticas

### 10.3.1. Energía cinética

Por lo general en una impulsión no se conserva la energía. El cambio energético proviene exclusivamente de la variación de la energía cinética, puesto que la energía potencial, al no variar la configuración del sistema sensiblemente durante un intervalo infinitesimal, sí que se conserva.

De forma global, el balance energético es tal que la energía mecánica disminuye, o a lo sumo se mantiene constante. La disminución proviene

físicamente de la transformación a otras formas de energía más “degradadas”, como calor, ruido, dislocaciones plásticas, etc., siguiendo el segundo principio de la termodinámica (entropía creciente).

Dentro de un sistema dado, para el balance de energía se pueden distinguir dos situaciones diferentes:

- Si sólo hay impulsiones interiores, la energía disminuye siempre o a lo sumo se conserva.
- Si hay impulsiones exteriores, la energía puede aumentar o disminuir. El aumento se produce a costa de que el sistema “robe” energía cinética del exterior: en conjunto debe quedar claro que nunca puede aumentar la energía.

En las impulsiones no ocurre lo mismo que en la dinámica, en la que el teorema de conservación de la energía tenía considerable utilidad práctica. Esto se debía a que permitía pasar de un estado a otro, obviando la (a menudo difícil) integración de las ecuaciones diferenciales de segundo orden de la dinámica, a lo largo de un camino cambiante. Para ello bastaba emplear la ecuación de balance energético que se denominaba “integral primera”, al formularse en función únicamente de derivadas primeras (velocidades).

En cambio, en la dinámica impulsiva, esta utilidad se pierde, por dos razones:

1. Por lo general, la energía no se conserva.
2. Las configuraciones anterior y posterior al choque son las mismas, por lo que no es preciso realizar una integración de las ecuaciones dinámicas para una trayectoria desconocida, sino expresar un mero balance de magnitudes cinéticas entre las situaciones anterior y posterior al choque, para una misma configuración.

Por estos motivos, hacemos notar que las consideraciones que se realizan a continuación tienen un interés más bien conceptual. Son importantes sin embargo para comprender el balance energético de las percusiones. Asimismo, en numerosas aplicaciones prácticas se puede conocer o estimar el llamado “coeficiente de restitución”, que como veremos está íntimamente ligado al balance energético.

Relacionaremos a continuación la pérdida de energía con el valor de las impulsiones. Para una partícula de masa  $m$ , denotando la velocidad por  $\mathbf{v}$  y la energía cinética por  $T$ , con los subíndices 1 y 2 para indicar las



situaciones anterior y posterior al choque respectivamente, la variación de energía cinética es

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{I} \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) \end{aligned}$$

Sumando para todas las partículas del sistema,

$$\boxed{T_2 - T_1 = \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{I}_i \cdot [(\mathbf{v}_i)_2 + (\mathbf{v}_i)_1]} \quad (10.16)$$

Si todas las impulsiones interiores provienen de vínculos permanentes (es decir, partículas que estaban unidas antes de la impulsión y permanecen unidas), los términos del sumatorio (10.16) debidos a ellas se anulan dos a dos, ya que ocurren en parejas del tipo

$$(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{I} + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) \cdot (-\mathbf{I}) = 0$$

Resulta por tanto bajo esta hipótesis

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{I}_i^{ext} \cdot [(\mathbf{v}_i)_2 + (\mathbf{v}_i)_1] \quad (10.17)$$

### 10.3.2. Coeficiente de restitución

Estudiamos dos cuerpos que chocan a través de sus puntos  $P$  y  $Q$  respectivamente. Sean las velocidades de dichos puntos  $\mathbf{v}_P^1$  y  $\mathbf{v}_Q^1$  (antes del choque) y  $\mathbf{v}_P^2$ ,  $\mathbf{v}_Q^2$  (después del choque). Admitiremos la hipótesis de que las ligaduras internas en cada cuerpo cumplen que son todas debidas a vínculos permanentes, lo que es válido por ejemplo en un sólido rígido. En el choque se produce una impulsión  $\mathbf{I}$  sobre  $P$ , dirigida según el vector unitario  $\mathbf{d}$  ( $\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{d}$ ), y la correspondiente impulsión reactiva ( $-\mathbf{I}$ ) sobre  $Q$ .

Definimos:

*Coeficiente de restitución es el cociente, cambiado de signo, de las velocidades relativas de los puntos de impacto después y antes del choque, en la dirección de la impulsión:*

$$e \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{(\mathbf{v}_P^2 - \mathbf{v}_Q^2) \cdot \mathbf{d}}{(\mathbf{v}_P^1 - \mathbf{v}_Q^1) \cdot \mathbf{d}} = -\frac{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{d}} \quad (10.18)$$

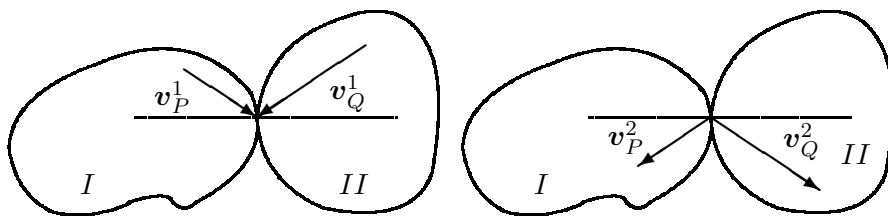


Figura 10.3: Choque entre dos cuerpos I y II a través de sus puntos P y Q respectivamente; situaciones inmediatamente anterior y posterior al choque.

Donde  $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1$  son las velocidades relativas después y antes del choque, respectivamente.

El coeficiente de restitución lo podemos relacionar con la pérdida de energía cinética del sistema conjunto. Para ello expresemos el balance energético global. Para el cuerpo I:

$$\Delta T_I = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_P^1 + \mathbf{v}_P^2) \cdot \mathbf{I}$$

y para el cuerpo II:

$$\Delta T_{II} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_Q^1 + \mathbf{v}_Q^2) \cdot (-\mathbf{I})$$

En estas expresiones se ha aplicado (10.17), que permite considerar tan sólo las impulsiones exteriores:  $\mathbf{I}$  sobre el cuerpo I y  $-\mathbf{I}$  sobre el II. Sin embargo, la evaluación de  $\Delta T_I$  y  $\Delta T_{II}$  corresponde a la energía cinética total de cada sólido, incluyendo la de rotación. Sumando ambas contribuciones,

$$\Delta T = \frac{1}{2}[(\mathbf{v}_P^1 - \mathbf{v}_Q^1) + (\mathbf{v}_P^2 - \mathbf{v}_Q^2)] \cdot \mathbf{I} \quad (10.19)$$

$$= \frac{1}{2}[\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{d} + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{d}] \mathbf{I} \quad (10.20)$$

y considerando, por la definición (10.18) del coeficiente de restitución, que  $\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{d} = -e(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{d})$ , resulta

$$\Delta T = \frac{1}{2} \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{I} (1 - e) \quad (10.21)$$

Para clarificar la aplicación de esta fórmula recordemos que  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_P^1 - \mathbf{v}_Q^1$  (velocidad relativa de P respecto de Q antes del choque) e  $\mathbf{I}$  es la impulsión que se produce sobre el punto P.

Según el valor de  $e$  diferenciamos varios tipos de choque:

- $e = 1$ , choque elástico ( $\Delta T = 0$ ).
- $e = 0$ , choque plástico ( $\Delta T = \frac{1}{2} \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{I}$ , máxima pérdida de energía cinética).  
Conviene precisar que, a pesar de que la pérdida de energía sea la máxima, en general no se pierde toda la energía cinética inicial ( $\Delta T \neq T_1$ ).
- $0 < e < 1$ , caso intermedio.

La expresión del coeficiente de restitución tiene por tanto un significado en términos de balance energético. Para resolver una impulsión es preciso por lo general plantear, además de las ecuaciones (10.13) y (10.15) que expresan balance de cantidad de movimiento y de momento cinético, alguna ecuación que exprese el balance energético, como la del coeficiente de restitución (10.18). Esta última condición se podría establecer igualmente expresando directamente la pérdida de energía cinética

$$\Delta T = T_2 - T_1. \quad (10.22)$$

Sin embargo es preferible emplear para esto las ecuaciones (10.18) ó (10.21) del coeficiente de restitución, ya que éstas proporcionan expresiones lineales en las velocidades, en lugar de expresiones cuadráticas como surge de (10.22).

### 10.3.3. Teorema de Carnot

Este teorema expresa la pérdida de energía para un caso particular: aquel en que el sistema sea holónomo con vínculos lisos, y las impulsiones se deban exclusivamente a la aparición de nuevos vínculos interiores permanentes.

Partimos para ello del principio de trabajos virtuales, que se puede aplicar con su enunciado restringido (10.10) debido a las hipótesis realizadas:

$$\sum_i (m_i \Delta \mathbf{v}_i - \mathbf{I}_i^{ext}) \cdot \mathbf{v}_i^* = 0, \quad \forall \{\mathbf{v}_i^*\} \text{ compatibles}$$

Al no haber impulsiones exteriores,  $\mathbf{I}_i^{ext}$  desaparece:

$$\sum_i m_i \Delta \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i^* = 0$$

Esta relación se cumple para velocidades virtuales  $\mathbf{v}_i^*$  cualesquiera, siempre que sean compatibles con los vínculos. En particular, se cumplirá para las

velocidades reales después del choque,  $\mathbf{v}_i^* = \mathbf{v}_{i1} + \Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i2}$ , es decir

$$\sum_i m_i (\mathbf{v}_{i2} - \mathbf{v}_{i1}) \cdot \mathbf{v}_{i2} = 0 \quad (10.23)$$

Considerando la igualdad

$$2 \sum_i m_i (\mathbf{v}_{i1} \cdot \mathbf{v}_{i2}) = - \sum_i m_i (\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i2})^2 + \sum_i m_i v_{i1}^2 + \sum_i m_i v_{i2}^2,$$

desarrollando (10.23) resulta

$$\sum_i m_i v_{i2}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i2})^2 - \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{i1}^2 - \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{i2}^2 = 0$$

Y por tanto

$$-\frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i2})^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{i2}^2 - \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{i1}^2 = T_2 - T_1$$

es decir

$$\boxed{T_2 - T_1 = -\frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i2})^2} \quad (10.24)$$

Esta expresión ofrece una interpretación intuitiva muy clara, ya que permite calcular la pérdida de energía cinética como la energía cinética de un sistema (ficticio) en que cada partícula posea precisamente la velocidad que ha perdido,  $(\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{i2})$ .

Repetimos la observación realizada arriba sobre las hipótesis restrictivas que es necesario verificar para que se pueda aplicar este teorema. Conviene analizar detalladamente las condiciones de cada problema, verificando que se cumplen las hipótesis enunciadas, antes de aplicarlo. En la práctica, por este motivo el teorema de Carnot tiene una utilidad bastante limitada.

## 10.4. Choque entre sólidos rígidos

### 10.4.1. La deformabilidad de los sólidos

Para explicar los choques y fenómenos impulsivos la teoría de impulsiones entre sistemas discretos (entre los que se hallan los sólidos rígidos), requiere introducir fuerzas impulsivas de contacto de valor infinito. Asimismo, el balance energético se expresa mediante un concepto nuevo, el de coeficiente de restitución.

En la realidad física, las fuerzas de contacto se generan por la deformabilidad de los cuerpos, comenzando en cero y aumentando a medida que las zonas de contacto se comprimen. Aunque pueden alcanzar valores elevados en relación con las fuerzas de naturaleza no impulsiva, obviamente no alcanzan nunca valores “infinitos”. En cualquier caso, tienen limitaciones de tipo físico debido a los límites de rotura de los materiales en contacto o a posibles transformaciones termodinámicas de los mismos (bajo presiones muy elevadas muchos materiales se licúan o incluso se subliman).

La pérdida de energía se explica por uno de los motivos siguientes:

- Energía residual de vibración elástica que permanece en los cuerpos después de separarse. Se trata en realidad de energía cinética y energía potencial elástica, pero para calcularla sería preciso estudiar la dinámica de la impulsión como cuerpos que fuesen deformables, aspecto que se halla fuera del ámbito de este curso.
- Pérdidas por energía plástica disipada, cambios de tipo termodinámico, ruido, calor, etc.

La deformación local en el área de contacto produce unas fuerzas internas en el sólido denominadas *tensiones*. La velocidad con que se transmite la onda de tensión generada en el choque (asociada a una discontinuidad de velocidades) es finita. Por ejemplo, en una barra, la velocidad con la que se propaga es  $c = \sqrt{E/\rho}$  siendo  $E$  el módulo elástico de Young y  $\rho$  la densidad másica.

El cambio de velocidades del sólido no se produce por tanto de forma instantánea, sino de manera gradual, asociado a la propagación de una onda que provoca un salto de velocidades y de tensiones en el material. Esta onda se refleja (“rebota”) en los extremos o bordes de los cuerpos, produciendo en general estados de vibración elástica más o menos complejos.

En ocasiones es imprescindible estudiar de manera detallada la transmisión de ondas de tensión para explicar los fenómenos impulsivos. Como ejemplo, consideramos el caso en que impactan axialmente dos barras homogéneas, una de las cuales se mueve con velocidad  $v$  y la segunda está en reposo. Si ambas barras son de igual longitud  $l$ , al cabo de un tiempo pequeño<sup>2</sup> la primera barra se queda en reposo, mientras que la segunda sale despedida con velocidad  $v$ . En este caso la energía cinética que tenía la primera barra se ha transmitido íntegramente a la segunda barra.

---

<sup>2</sup>este tiempo se puede calcular como el que tardan las ondas elásticas en avanzar hasta el extremo libre y volver al punto de impacto, es decir  $T = 2l/\sqrt{E/\rho}$

En cambio, si las barras son de distinta longitud (por ejemplo  $l$  y  $2l$ ), permanece una porción de la energía en la primera barra, en forma de vibraciones elásticas.

Esto ocurre así a pesar de que localmente el choque se produzca con coeficiente de restitución  $e = 1$ . En este último caso, se observaría, desde el punto de vista del sólido rígido (punto de vista que podríamos denominar “macroscópico”), una pérdida de energía, que en realidad (desde el punto de vista “microscópico”) permanece en el sistema como energía interna de vibración.

### 10.4.2. Caso general de choque entre dos sólidos

Análogamente al planteamiento en la dinámica de las ecuaciones de la cantidad de movimiento y del momento cinético, se debe considerar en una impulsión el balance de dichas magnitudes. Siendo  $\mathbf{v}_G$  la velocidad del centro de masa, el balance de la cantidad de movimiento se expresa como:

$$\sum_i \mathbf{I}_i = \sum_i m_i \Delta \mathbf{v}_i = \overbrace{\left( \sum_i m_i \right)}^M \Delta \mathbf{v}_G$$

Por tanto

$$\boxed{\sum_i \mathbf{I}_i^{ext} = M \Delta \mathbf{v}_G} \quad (10.25)$$

El balance del momento cinético arroja:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{I}_i^{ext} = \Delta \mathbf{H}_G = \mathbf{I}_G \cdot \Delta \boldsymbol{\Omega} + \underbrace{\Delta \boldsymbol{\theta} \wedge (\mathbf{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega})}_{\approx \mathbf{0}}$$

El término complementario del incremento se puede despreciar debido a que la rotación  $\Delta \boldsymbol{\theta}$  producida durante la impulsión es un infinitésimo. Por lo tanto se escribe

$$\boxed{\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{I}_i^{ext} = \mathbf{I}_G \cdot \Delta \boldsymbol{\Omega}} \quad (10.26)$$

La expresión de balance del momento cinético se puede aplicar igualmente si se toman momentos respecto de un punto cualquiera, que no sea ni un punto fijo ( $O$ ) ni el centro de masas ( $G$ ). Tal como se vió en el apartado 10.2.7, es posible aplicar la ecuación (10.15) para establecer el balance en un punto  $Q$  cualquiera

$$\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{I}_i^{ext} = \Delta \mathbf{H}_Q.$$

Ahora bien, conviene precisar que en este caso  $\Delta \mathbf{H}_Q$  no se expresa de la misma manera que como en la ecuación (10.26), en función del tensor de inercia, es decir  $\Delta \mathbf{H}_Q \neq \mathbf{I}_Q \cdot \Delta \boldsymbol{\Omega}$ . La expresión de  $\mathbf{H}_Q$  en un caso general es

$$\mathbf{H}_Q = \mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{G} \wedge M\mathbf{v}_Q \quad (10.27)$$

por lo que, en una impulsión, el incremento sería

$$\Delta \mathbf{H}_Q \approx \mathbf{I}_Q \cdot \Delta \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Q}\mathbf{G} \wedge M\Delta \mathbf{v}_Q$$

También podríamos haber empleado otras expresiones alternativas de  $\mathbf{H}_Q$  (véase la ecuación (6.14)), si resultan más convenientes, como

$$\mathbf{H}_Q = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} + M\mathbf{v}_G \wedge \mathbf{O}\mathbf{Q} \quad (10.28)$$

$$= \mathbf{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} + M\mathbf{v}_G \wedge \mathbf{G}\mathbf{Q} \quad (10.29)$$

La expresión (10.27) se reduce a la (10.26) si  $Q \equiv G$  (el punto tomado coincide con el centro de masas) o si  $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$  (el punto tomado tiene velocidad nula).

### 10.4.3. Choque directo

Se denomina choque directo aquel en que el vector deslizante que define la impulsión,  $\mathbf{I}$ , se halla sobre la normal común a los sólidos en contacto, en el que se encuentran asimismo los centros de masa respectivos. Para que se cumpla la condición enunciada de normalidad, las superficies han de ser lisas, o bien en caso de no serlo, no deben tener velocidad tangencial relativa los puntos de contacto.

En el choque directo, al no producirse momentos de las impulsiones respecto al centro de masas, basta con estudiar el movimiento de los centros de masas, como si se tratase de impulsiones de partículas.

Sean  $v_{1A}^n$ ,  $v_{1B}^n$ , las velocidades antes del choque de los centros de masa de los dos sólidos  $A$  y  $B$  en dirección de la impulsión (es decir, en dirección normal), y  $v_{2A}^n$ ,  $v_{2B}^n$  las velocidades posteriores al choque. Al estar alineados los centros de masa con la normal, sus velocidades son las mismas que las de los puntos de contacto, por lo que la ecuación del coeficiente de restitución es

$$v_{2A}^n - v_{2B}^n = -e(v_{1A}^n - v_{1B}^n) \quad (10.30)$$

Consideramos sólo las velocidades normales, que son las que cambian. Las velocidades tangenciales a la impulsión,  $v_A^t$  y  $v_B^t$ , se mantienen constantes.

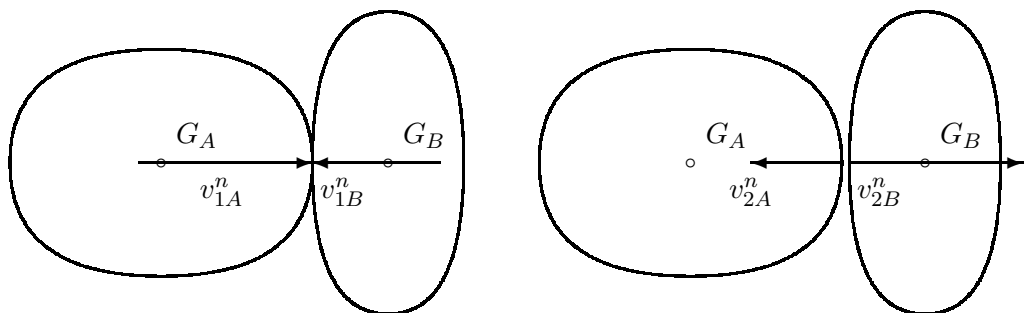


Figura 10.4: Choque directo entre dos sólidos; situación inmediatamente anterior e inmediatamente posterior al choque. Sólo se modifica la velocidad normal de A y B, que coinciden con las velocidades de los centros de masa respectivos, conservándose la velocidad tangencial.

Por conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_A v_{1A}^n + m_B v_{1B}^n = m_A v_{2A}^n + m_B v_{2B}^n \quad (10.31)$$

De (10.30) y (10.31) despejamos las incógnitas  $v_{2A}^n$  y  $v_{2B}^n$ :

$$v_{2A}^n = \frac{m_B(1+e)v_{1B}^n + (m_A - em_B)v_{1A}^n}{m_A + m_B}$$

$$v_{2B}^n = \frac{m_A(1+e)v_{1A}^n + (m_B - em_A)v_{1B}^n}{m_A + m_B}$$

Estas expresiones generales se pueden particularizar a los casos de choque *perfectamente elástico* ( $e = 1$ )

$$v_{2A}^n = \frac{2m_B v_{1B}^n + (m_A - m_B)v_{1A}^n}{m_A + m_B}$$

$$v_{2B}^n = \frac{2m_A v_{1A}^n + (m_B - m_A)v_{1B}^n}{m_A + m_B}$$

o *choque plástico* ( $e = 0$ )

$$v_{2A}^n = \frac{m_B v_{1B}^n + m_A v_{1A}^n}{m_A + m_B}$$

$$v_{2B}^n = v_{2A}^n$$

El choque de esferas o discos lisos es un ejemplo típico de choque directo, ya que los centros de masa están siempre en la normal a la superficie, dirección asimismo de la impulsión, al ser lisas.



### 10.4.4. Impulsiones tangenciales

Si en la percusión hay componente tangencial de la velocidad relativa en el punto de impacto, y las superficies no son lisas, se producirá además de la impulsión normal  $I_N$ , una impulsión tangencial  $I_T$ . El valor máximo de esta última se obtiene mediante un coeficiente adimensional  $k$ :

$$I_T \leq k \cdot I_N$$

Esta expresión establece un límite máximo para la impulsión  $I_T$  que se “moviliza”, en función de  $I_N$ , de forma similar al rozamiento de Coulomb.

Este valor máximo se alcanza si hay deslizamiento después de la impulsión. El valor de  $k$  es por lo general semejante al coeficiente de rozamiento de Coulomb,  $\mu$ .

## 10.5. Dinámica analítica de impulsiones

Es posible aplicar los métodos de la mecánica analítica, descritos en el capítulo 7, al caso de las impulsiones. Supongamos para ello un sistema holónomo, con vínculos lisos, y coordenadas libres  $\{q_j\}$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Recordamos la expresión de las ecuaciones de Lagrange (7.12):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

El primer sumando del lado izquierdo de esta ecuación representa las fuerzas de inercia, derivadas temporales de los momentos generalizados, mientras que el segundo corresponde a fuerzas ficticias debidas a la elección de coordenadas generalizadas  $\{q_j\}$ . En el caso en que éstas sean coordenadas cartesianas, este segundo término es nulo.

Para establecer el balance de momentos generalizados se integra sobre el intervalo  $[\tau - \epsilon, \tau + \epsilon]$ . La integral del sustraendo  $(\partial T / \partial q_j)$  resulta ser un infinitésimo del orden de  $\epsilon$ , al tener dicho término un valor acotado. Resulta pues:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right|_{\tau - \epsilon}^{\tau + \epsilon} = \int_{\tau - \epsilon}^{\tau + \epsilon} \underbrace{\mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}}_{Q_j} dt,$$

donde se sobreentiende el sumatorio sobre índices repetidos en el integrando.

Despreciando las fuerzas ordinarias (no impulsivas), la integral de las fuerzas vale

$$\int_{\tau - \epsilon}^{\tau + \epsilon} \mathbf{I}_i \delta(t - \tau) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} dt = \mathbf{I}_i \cdot \overline{\left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right)} \stackrel{\text{def}}{=} P_j$$

donde la barra superpuesta indica el valor medio a lo largo de la impulsión. Definimos esta expresión como “impulsión generalizada”  $P_j$ . Así, la ecuación de balance resulta

$$\underbrace{\Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)}_{\Delta p_j} = P_j \quad (10.32)$$

La aplicación de esta ecuación exige que se cumplan las condiciones expuestas al principio de este apartado, es decir que los vínculos sean holónomos lisos, y por tanto permanentes, condiciones que a menudo no se dan. Conviene por tanto tener cuidado con su empleo ya que, debido a estas restricciones, la aplicación directa de la ecuación (10.32) a las impulsiones, sin comprobar adecuadamente que se verifican las hipótesis expuestas, puede dar lugar a errores.

# Capítulo 11

## Oscilaciones lineales con varios grados de libertad

### 11.1. Ecuaciones del movimiento

#### 11.1.1. Linealización de las ecuaciones

Los sistemas que se encuentran en posición de equilibrio estable, al ser perturbados ligeramente, desarrollan un movimiento vibratorio (de vaivén) con pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio. Si estas oscilaciones son suficientemente pequeñas, a menudo el sistema se puede considerar lineal: las fuerzas desarrolladas dependen linealmente de las coordenadas y de las velocidades, y los parámetros del sistema se pueden considerar constantes, e iguales a los correspondientes a la posición de equilibrio. En este caso, el movimiento oscilatorio tiene naturaleza armónica.

En el capítulo 3 se estudiaron las vibraciones en sistemas lineales de un sólo grado de libertad. En este capítulo trataremos del caso más general de sistemas con varios grados de libertad acoplados, es decir, que no se puedan considerar como una mera colección de ecuaciones independientes, cada una sobre una sola variable.

La dinámica analítica proporciona un marco teórico adecuado para plantear las ecuaciones en este tipo de sistemas. Adoptamos para ello las siguientes

HIPÓTESIS.—

1. El sistema es holónomo con vínculos esclerónomos (es decir, vínculos que no dependen de  $t$ ). En estas condiciones la energía cinética es una

expresión homogénea de segundo grado en las velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$  (ver apartado 7.2.4, ecuaciones (7.30) y (7.33))<sup>1 2</sup>:

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad \text{siendo } a_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \quad (11.1)$$

2. Existe una *posición de equilibrio estable*, en la que tomaremos convencionalmente el origen de coordenadas ( $q_i = 0$ ), con objeto de simplificar las expresiones.

La condición de equilibrio se puede definir por la ausencia de movimiento,  $\dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0$ . Se puede comprobar fácilmente que esta condición es equivalente a la anulación de las fuerzas generalizadas  $Q_i$ . En efecto, partiremos de las ecuaciones de Lagrange (7.27),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^N. \quad (11.2)$$

Desarrollando de forma general estas ecuaciones (7.40), y teniendo en cuenta que se trata de un sistema esclerónomo ( $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = 0$ ), se obtiene:

$$a_{ij} \ddot{q}_j + [kl, i] \dot{q}_k \dot{q}_l = - \frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i^N = Q_i, \quad (11.3)$$

siendo  $[kl, i] = \frac{1}{2} (\partial a_{ik} / \partial q_l + \partial a_{il} / \partial q_k - \partial a_{kl} / \partial q_i)$ . Particularizando para unas condiciones iniciales de reposo ( $\dot{q}_i = 0$ ), se comprueba fácilmente<sup>3</sup> que la condición de equilibrio ( $\ddot{q}_i = 0$ ) es equivalente a la condición de nulidad de las fuerzas generalizadas,  $Q_i = 0$ .

3. Al ser estable la posición de equilibrio, una perturbación pequeña del mismo producirá igualmente *oscilaciones pequeñas* respecto de la posición de equilibrio. Supondremos pequeñas tanto las coordenadas relativas a la posición de equilibrio ( $q_i$ ), así como las velocidades y las aceleraciones ( $\dot{q}_i, \ddot{q}_i$ ), por lo que los términos cuadráticos de estas componentes se pueden despreciar en relación con los términos

<sup>1</sup>En esta expresión y en el resto del capítulo se sobreentenderán los sumatorios sobre los índices repetidos, extendidos a lo largo de su rango, salvo indicación en contra o en los casos en que estos índices afecten a vectores, como es el caso de la segunda de las ecuaciones que se citan.

<sup>2</sup>Por conveniencia, para este capítulo se han modificado los símbolos de los índices mudos en relación con las ecuaciones citadas del capítulo anterior (7.30) y (7.33)

<sup>3</sup>Téngase en cuenta que la matriz de coeficientes  $a_{ij}$  es definida positiva y por tanto regular.

lineales. Asimismo, los parámetros del sistema se podrán considerar constantes, al suponer que no varía apreciablemente la configuración del mismo.

Desarrollaremos ahora las fuerzas generalizadas  $Q_i$  de las ecuaciones (11.3). Admitiremos que estas fuerzas puedan depender de las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = (q_1, q_2 \dots q_n)$  y de sus velocidades  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2 \dots \dot{q}_n)$ , y supondremos también que no dependen explícitamente del tiempo ( $\partial Q_i / \partial t = 0$ ). Esto equivale a considerar un *sistema autónomo*, en el que las únicas fuerzas actuantes provienen de cambios en la propia configuración del sistema (fuerzas interiores), o de la velocidad (resistencias viscosas), no existiendo fuerzas debidas a agentes exteriores variables con el tiempo. Con estas premisas realizamos un desarrollo en serie de primer orden alrededor de la posición de equilibrio, que nos permitirá *linealizar* la expresión de las fuerzas generalizadas en función de coordenadas y velocidades:

$$Q_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \underbrace{Q_i|_0}_{=0} + \left. \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \right|_0 q_j + \left. \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} \right|_0 \dot{q}_j + \mathcal{O}(\mathbf{q}^2) + \mathcal{O}(\dot{\mathbf{q}}^2)$$

Emplearemos la notación siguiente para los coeficientes que aparecen:

$$k_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \quad \text{Coeficientes de rigidez}$$

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{Coeficientes de amortiguamiento viscoso}$$

Supondremos aquí que las fuerzas provienen de un potencial ( $Q_i = -\partial V / \partial q_i$ ), por lo que los coeficientes de rigidez serán:

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}. \quad (11.4)$$

Es fácil comprobar la simetría de estos coeficientes, heredada de las propiedades de las derivadas:  $k_{ij} = k_{ji}$ .

Análogamente, para las fuerzas dependientes de la velocidad, se puede adoptar la hipótesis de que provienen de una función  $\mathcal{R}$ , denominada *función de disipación de Rayleigh*, definida a partir de los coeficientes simétricos  $c_{ij}$  como:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (11.5)$$

de forma que

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}. \quad (11.6)$$

El significado de  $\mathcal{R}$  puede establecerse calculando la tasa de energía disipada por unidad de tiempo por las fuerzas viscosas no conservativas:

$$\mathcal{D} = -Q_i^N \dot{q}_i = (c_{ij} \dot{q}_j) \dot{q}_i = 2\mathcal{R}$$

Por el segundo principio de la termodinámica esta disipación debe ser positiva o nula, lo que conduce a la condición  $\mathcal{R} \geq 0$ , o de forma equivalente, a que los coeficientes  $c_{ij}$  definen una forma cuadrática semidefinida positiva.

Las ecuaciones del movimiento (11.2) quedan pues expresadas como:

$$a_{ij} \ddot{q}_j + [kl, i] \dot{q}_k \dot{q}_l = -k_{ij} q_j - c_{ij} \dot{q}_j + \mathcal{O}(\mathbf{q}^2) + \mathcal{O}(\dot{\mathbf{q}}^2)$$

Empleando ahora la hipótesis 3 arriba enunciada de pequeñas oscilaciones, se puede aproximar la ecuación anterior eliminando los términos de orden cuadrático. Se obtienen así las *ecuaciones linealizadas* del movimiento:

$$\boxed{m_{ij} \ddot{q}_j + c_{ij} \dot{q}_j + k_{ij} q_j = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n} \quad (11.7)$$

Estas ecuaciones son válidas siempre que el sistema sea autónomo, sin fuerzas exteriores que lo exciten. Este caso se denomina de *vibraciones libres*. En caso contrario se obtendría un sistema con *vibraciones forzadas*, en el que habría que añadir a la derecha de la igualdad los términos de fuerzas exteriores correspondientes:

$$\boxed{m_{ij} \ddot{q}_j + c_{ij} \dot{q}_j + k_{ij} q_j = f_i(t); \quad i = 1, 2, \dots, n} \quad (11.8)$$

Las ecuaciones (11.7) ó (11.8) gobiernan el estudio de las vibraciones en sistemas lineales, siendo válidas también de forma bastante aproximada para el estudio de pequeñas oscilaciones en la mayoría de los sistemas reales no lineales. Como se comprueba inmediatamente, son una generalización directa de la ecuación (3.19) para las oscilaciones con un grado de libertad estudiada en el capítulo 3:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t).$$

### 11.1.2. Formulación matricial

En las ecuaciones (11.7) los coeficientes  $m_{ij}$  juegan el papel de masas, los  $c_{ij}$  definen el amortiguamiento viscoso, y los  $k_{ij}$  la rigidez del sistema.

Podemos emplearlos para definir las matrices siguientes<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M}] &= [m_{ij}] && \text{Matriz de masas} \\
 [\mathbf{C}] &= [c_{ij}] && \text{Matriz de amortiguamiento} \\
 [\mathbf{K}] &= [k_{ij}] && \text{Matriz de rigidez} \\
 \{\mathbf{q}\} &= \{q_j\} && \text{Vector columna de coordenadas} \\
 \{\mathbf{f}\} &= \{Q_j\} && \text{Vector columna de fuerzas externas}
 \end{aligned}$$

De esta forma para el caso de oscilaciones libres (11.7) la ecuación matricial resulta ser

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (11.9)$$

y para oscilaciones forzadas (11.8),

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}\}. \quad (11.10)$$

La matriz  $[\mathbf{M}]$  define la energía cinética como una forma cuadrática de las velocidades (ecuación (11.1)),

$$T = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{q}}\}^T [\mathbf{M}] \{\dot{\mathbf{q}}\}$$

La matriz  $[\mathbf{M}] = [m_{ij}]$ , por la definición de sus componentes (ver (7.30)) es simétrica. Por otra parte, la energía cinética, por su definición, es esencialmente positiva, por lo que la matriz de masa ha de ser además definida positiva:

$$\forall \dot{q}_i, \quad \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j > 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{M}] > 0. \quad (11.11)$$

Restringiéndonos al caso en que las fuerzas provienen de un potencial, la definición de las componentes de  $[\mathbf{K}] = [k_{ij}]$ , ver ecuación (11.4), la caracteriza también como simétrica. Para estudiar su signo, desarrollamos en serie de potencias el potencial  $V$  alrededor de la posición de equilibrio,

$$V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{0}) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_i} \Big|_0}_{=0} q_i + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_0}_{=k_{ij}} q_i q_j + \dots \quad (11.12)$$

<sup>4</sup>Emplearemos la notación habitual en este curso para las expresiones matriciales:  $\{\mathbf{q}\} \equiv \{q_i\}$ ,  $\{\mathbf{a}\} \equiv \{a_i\}$  (negritas entre llaves) para matrices columna ( $n \times 1$ ),  $\|\mathbf{a}\| = \{\mathbf{a}\}^T \equiv \|a_i\|$ ,  $\|\mathbf{q}\| = \{\mathbf{q}\}^T \equiv \|q_i\|$  para matrices fila ( $1 \times n$ ), y  $[\mathbf{M}] \equiv [M_{ij}]$ ,  $[\mathbf{K}] \equiv [K_{ij}]$ ,  $[\mathbf{A}] \equiv [A_{ij}]$  (negritas *rectas* o corchetes) para matrices de 2 índices ( $n \times n$ ). Reservaremos las “negritas itálicas” ( $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{I}$ ) para vectores o tensores. Procuraremos distinguir de esta manera entre el tensor  $\mathbf{R}$  y la matriz de componentes del mismo en un triedro dado,  $[\mathbf{R}]$ .

La condición para que el equilibrio sea estable, en virtud de lo cual las oscilaciones alrededor del mismo se mantienen pequeñas, equivale a que el potencial  $V$  tenga un mínimo local, es decir que sea  $V(\mathbf{q}) - V(\mathbf{0}) > 0$ . Esta afirmación la demostraremos más adelante (apartado 11.2.2). Supondremos además que los coeficientes de las derivadas segundas  $k_{ij}$  en el desarrollo anterior son significativos, sin que se necesite recurrir a derivadas de orden superior para establecer la condición de mínimo. En virtud de ello, se deduce que la forma cuadrática definida por  $k_{ij}$  es definida positiva además de simétrica:

$$\forall q_i, \quad k_{ij}q_iq_j > 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{K}] > 0. \quad (11.13)$$

Por último, como ya se justificó en el apartado anterior, los coeficientes de amortiguamiento viscosos definen una matriz simétrica y semidefinida positiva:

$$\forall \dot{q}_i, \quad c_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{C}] \geq 0. \quad (11.14)$$

**EJEMPLO 11.1:** Supongamos un sistema formado por tres masas puntuales conectadas entre sí por resortes lineales y amortiguadores. La primera está conectada de igual manera a un punto fijo, y están obligadas todas ellas a moverse según una misma recta (figura 11.1).

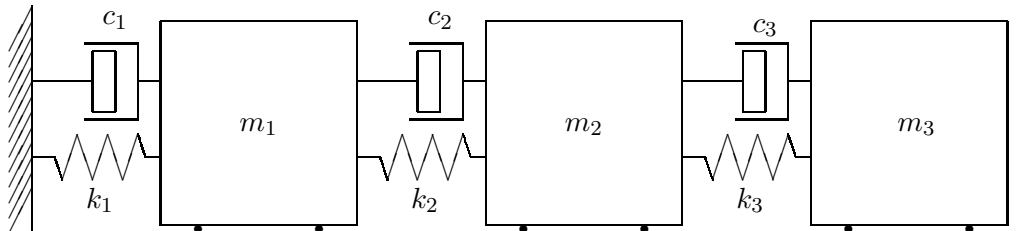


Figura 11.1: *Sistema lineal con 3 grados de libertad, formado por tres masas unidas mediante resortes y amortiguadores lineales.*

Obtendremos en primer lugar las ecuaciones de Lagrange del movimiento. Para ello tomamos coordenadas absolutas de cada masa en relación con la posición de equilibrio,  $\mathbf{q}_0 = (x_1, x_2, x_3)$ . La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2,$$

y la energía potencial

$$V = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(x_3 - x_2)^2.$$



Derivando se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_1 \ddot{x}_2; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) = m_1 \ddot{x}_3.$$

Las fuerzas generalizadas deben incluir los términos conservativos y los no conservativos provenientes de los amortiguadores:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} + Q_1^N \\ &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) - c_1 \dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ Q_2 &= -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \\ Q_3 &= -k_3(x_3 - x_2) - c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \end{aligned}$$

Resultan por tanto las ecuaciones del movimiento siguientes:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 = 0 \\ m_1 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_3 \dot{x}_3 = 0 \\ m_1 \ddot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 - c_3 \dot{x}_2 + c_3 \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

Estas ecuaciones se pueden expresar matricialmente en la forma definida por (11.9), siendo las matrices del sistema en este caso

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}] &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}; \\ [\mathbf{C}] &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}; \\ [\mathbf{K}] &= \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 11.2. Oscilaciones libres

### 11.2.1. Oscilaciones sin amortiguamiento; problema de autovalores

En este caso no existen fuerzas dependientes de la velocidad, ni fuerzas exteriores aplicadas, por lo que las ecuaciones del movimiento (11.10) quedan

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}, \quad (11.15)$$

o en componentes,

$$m_{ij}\ddot{q}_j + k_{ij}q_j = 0. \quad (11.16)$$

Buscaremos una solución de la forma

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}\} &= C\{\mathbf{a}\}e^{i\omega t} \\ q_j &= Ca_je^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (11.17)$$

En la expresión anterior  $C = D + iE \in \mathbb{C}$  es una constante compleja, en función de la unidad imaginaria  $i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-1}$ ;  $\{\mathbf{a}\}$  es un vector de constantes que más adelante (apartado 11.2.2) demostraremos es real ( $\in \mathbb{R}^n$ ), y  $e^{i\omega t}$  indica la notación de Euler para la exponencial compleja:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

La utilización de magnitudes complejas en (11.17) se realiza únicamente por conveniencia, para facilitar los desarrollos. Lógicamente el movimiento físico corresponde a coordenadas reales, por lo que habrá que tomar únicamente la parte real de esta expresión. La notación compleja facilita la representación de funciones armónicas, ya que la constante compleja  $C$  incluye dos constantes reales. En efecto, desarrollando la parte real de (11.17),

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}\} &= \Re[(D + iE)(\cos \omega t + i \sin \omega t)] \{\mathbf{a}\} \\ &= (D \cos \omega t - E \sin \omega t) \{\mathbf{a}\}; \end{aligned}$$

y si definimos unas nuevas constantes  $(B, \delta)$  como  $B = \sqrt{D^2 + E^2}$  y  $\text{tg } \delta = -E/D$ , esta expresión equivale a su vez a

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}\} &= \{\mathbf{a}\} \Re \left[ B e^{i(\omega t - \delta)} \right] \\ &= \{\mathbf{a}\} B \cos(\omega t - \delta). \end{aligned} \quad (11.18)$$

La solución considerada debe cumplir la ecuación del movimiento (11.15). Para ello se deriva dos veces (11.17),

$$\begin{aligned} \{\ddot{\mathbf{q}}\} &= -\omega^2 C \{\mathbf{a}\} e^{i\omega t} \\ &= -\omega^2 \{\mathbf{q}\}, \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación (11.15),

$$(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) \{\mathbf{a}\} C e^{i\omega t} = \{\mathbf{0}\}.$$

De esta ecuación se puede eliminar el escalar  $C e^{i\omega t} \neq 0$ , resultando

$$(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]) \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (11.19)$$

Esta expresión define un sistema de ecuaciones lineales homogéneas en función de la incógnita  $\{\mathbf{a}\}$ . Este sistema de ecuaciones define un problema de autovalores generalizado. En efecto, denominando  $\lambda = \omega^2$ , se trata de obtener los vectores  $\{\mathbf{a}\}$  que verifican

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\} = \lambda[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\} \quad (11.20)$$

para algún valor de  $\lambda$ . Para que existan soluciones (distintas de la trivial  $\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\}$ ), el sistema de ecuaciones homogéneo (11.19) debe ser singular, es decir, debe anularse el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = 0. \quad (11.21)$$

Esta ecuación de compatibilidad se denomina la *ecuación característica* del problema de autovalores (11.20). Resulta una ecuación polinómica de grado  $n$  en  $\lambda$ , que poseerá en general  $n$  raíces  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Estas raíces  $\lambda_k$  se denominan *autovalores* o *valores propios*, correspondiendo a los valores de  $\lambda$  que hacen posible una solución no trivial de (11.20); cada uno de ellos está asociado a un vector solución  $\{\mathbf{a}_k\}$ , que se denominan *autovectores* o *vectores propios*.

### 11.2.2. Frecuencias propias y modos normales de vibración

Los valores  $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$  se denominan *frecuencias propias* del sistema, debido a que representan las frecuencias angulares de las posibles soluciones armónicas del tipo (11.17). Los valores de  $\lambda_k$  son positivos al ser las matrices  $[\mathbf{K}]$  y  $[\mathbf{M}]$  simétricas y definidas positivas.

La linealidad de la ecuación (11.15) lleva aparejada la linealidad de las soluciones: si  $\{\mathbf{x}_1\}$  y  $\{\mathbf{x}_2\}$  son soluciones de la ecuación, cualquier combinación lineal de las mismas ( $\mu\{\mathbf{x}_1\} + \nu\{\mathbf{x}_2\}$ ) también es solución. La comprobación es inmediata, sin más que sustituir en (11.15):

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}](\mu\{\ddot{\mathbf{x}}_1\} + \nu\{\ddot{\mathbf{x}}_2\}) + [\mathbf{K}](\mu\{\mathbf{x}_1\} + \nu\{\mathbf{x}_2\}) = \\ & \mu \underbrace{([\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}_1\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}_1\})}_{=\{\mathbf{0}\}} + \nu \underbrace{([\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{x}}_2\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{x}_2\})}_{=\{\mathbf{0}\}} = \{\mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

Supondremos en principio que los autovalores  $\lambda_k$  son todos distintos, no existiendo soluciones múltiples de (11.21). El caso de autovalores múltiples se tratará más abajo. Por tanto, cada  $\lambda_k$  definirá una solución posible del tipo (11.17), en función de una constante arbitraria  $C_k$ . Por lo dicho antes

la solución más general será una combinación lineal de las mismas, del tipo

$$\begin{aligned}\{\mathbf{q}\} &= C_1\{\mathbf{a}_1\}e^{i\omega_1 t} + C_2\{\mathbf{a}_2\}e^{i\omega_2 t} + \dots + C_n\{\mathbf{a}_n\}e^{i\omega_n t} \\ &= \sum_{k=1}^n C_k\{\mathbf{a}_k\}e^{i\omega_k t}\end{aligned}\quad (11.22)$$

En esta expresión, los valores de  $\{\mathbf{a}_k\}$  y  $\omega_k$  vienen dados por la solución del problema de autovalores (11.20). Quedan  $2n$  constantes por determinar, correspondientes a las constantes complejas  $C_k = D_k + i E_k$ , que se definirán a partir de las  $2n$  condiciones iniciales.

Adelantando algunos resultados que demostraremos más adelante, los  $n$  autovalores  $\lambda_k$  son reales y positivos, por lo que  $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$  son números reales. Tomaremos sólo la raíz positiva, ya que la negativa carece de sentido físico. Por tanto, la solución será, tomando la parte real de (11.22)

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n (D_k \cos \omega_k t - E_k \operatorname{sen} \omega_k t) \{\mathbf{a}_k\} \quad (11.23)$$

o bien con la notación alternativa (11.18),

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos(\omega_k t - \delta_k) \quad (11.24)$$

siendo  $B_k = \sqrt{D_k^2 + E_k^2}$ .

Esta expresión ofrece una interpretación del movimiento como la suma de  $n$  “*modos de vibración*”  $\{\mathbf{a}_k\}$ , cada uno de ellos vibrando según una ley armónica con su frecuencia característica,  $\omega_k$ . La amplitud de cada modo en función del tiempo es  $B_k \cos(\omega_k t - \delta_k)$ .

La solución general, en cualquiera de las formas (11.22), (11.23) ó (11.24) depende de  $2n$  constantes que se determinan a partir de las  $2n$  condiciones iniciales del problema: coordenadas iniciales  $\{\mathbf{q}_0\}$  y velocidades iniciales  $\{\dot{\mathbf{q}}_0\}$ .

### Propiedades de los autovalores y modos normales (autovectores)

1. *Todos los autovalores son reales:*  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ .

Para demostrarlo emplearemos la propiedad de *hermiticidad*<sup>5</sup> de las

<sup>5</sup>Se dice que una matriz es *hermítica* cuando su adjunta, es decir la conjugada y traspuesta, es igual a ella misma:  $[\mathbf{A}]^\dagger = ([\mathbf{A}]^T)^* = [\mathbf{A}]$ . Esta propiedad es evidente para una matriz real simétrica.

matrices  $[\mathbf{K}]$  y  $[\mathbf{M}]$ . Sea un autovalor  $\lambda_k$ , que cumple:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\} = \lambda_k[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} \quad (11.25)$$

Tomando conjugados de los traspuestos de esta expresión,

$$\{\mathbf{a}_k\}^\dagger[\mathbf{K}] = \lambda_k^*\{\mathbf{a}_k\}^\dagger[\mathbf{M}]. \quad (11.26)$$

Pre-multiplicando la ecuación (11.25) por  $\{\mathbf{a}_k\}^\dagger$ , post-multiplicando (11.26) por  $\{\mathbf{a}_k\}$  y restando ambas expresiones se obtiene:

$$0 = (\lambda_k - \lambda_k^*)\{\mathbf{a}_k\}^\dagger[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}. \quad (11.27)$$

Veamos ahora que el segundo factor de esta expresión no puede ser nulo. Suponiendo en general una expresión compleja para el autovalor como

$$\{\mathbf{a}_k\} = \{\alpha_k\} + i\{\beta_k\}; \quad \{\mathbf{a}_k\}^\dagger = \{\alpha_k\}^T - i\{\beta_k\}^T,$$

resulta

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}_k\}^\dagger[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} &= \{\alpha_k\}^T[\mathbf{M}]\{\alpha_k\} + \{\beta_k\}^T[\mathbf{M}]\{\beta_k\} \\ &\quad + i \underbrace{(\{\alpha_k\}^T[\mathbf{M}]\{\beta_k\} - \{\beta_k\}^T[\mathbf{M}]\{\alpha_k\})}_{=0} \end{aligned}$$

La condición de definida positiva de la matriz  $[\mathbf{M}]$  obliga a que la expresión anterior sea estrictamente positiva. Por tanto, de la expresión (11.27) se deduce

$$\lambda_k = \lambda_k^* \quad \Rightarrow \quad \lambda_k \in \mathbb{R},$$

como queríamos demostrar.

2. *Todos los autovectores son reales:*  $\{\mathbf{a}_k\} \in \mathbb{R}^n$ .

Sea un autovector cualquiera  $\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{a}_k\}$ , del cual ya sabemos que su autovalor asociado es real,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La ecuación (11.25) es un sistema homogéneo con coeficientes reales, que en componentes puede expresarse como

$$(k_{ij} - \lambda m_{ij})a_j = \alpha_{ij}a_j = 0, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Las posibles soluciones a este sistema tienen la propiedad de que el cociente entre dos componentes cualesquiera es real:  $a_k/a_l \in \mathbb{R}$ . Por tanto, dada la indeterminación que existe para la solución, podremos escoger de forma arbitraria una componente real, p. ej.  $a_1 = 1$ , con lo que el resto de componentes habrá de ser igualmente real.

3. *Los autovalores son positivos:*  $\lambda_k > 0$ .

Se parte de la igualdad (11.25),

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\} = \lambda_k[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}. \quad (11.28)$$

Pre-multiplicando por  $\{\mathbf{a}_k\}^T$  y despejando  $\lambda_k$ , se obtiene

$$\lambda_k = \frac{\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\}}{\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}}. \quad (11.29)$$

Tanto el numerador como el denominador en esta expresión son estrictamente positivos, al ser definidas positivas las matrices  $[\mathbf{K}]$  y  $[\mathbf{M}]$  respectivamente. Por tanto,  $\lambda_k > 0$ , como queríamos demostrar.

Si algún autovalor fuera negativo,  $\lambda_k < 0$ , la frecuencia propia asociada sería imaginaria,  $\omega_k = \pm\sqrt{\lambda_k} = \pm(a + ib)$ , y sustituyendo en la solución (11.17) se obtendría una exponencial real creciente, no acotada, que indicaría un equilibrio inestable e invalidaría la hipótesis hecha de pequeñas oscilaciones. Esto podría ocurrir en el caso en que no se tuviese un mínimo del potencial, en cuyo caso los coeficientes  $[\mathbf{K}]$  podrían no ser definidos positivos. Este razonamiento prueba que para la estabilidad del movimiento se requiere la condición de mínimo del potencial.

4. *Ortogonalidad:*

Dos modos de vibración  $\{\mathbf{a}_k\}$  y  $\{\mathbf{a}_l\}$ , correspondientes a autovalores distintos  $\lambda_k \neq \lambda_l$ , son ortogonales respecto a la matriz de masa  $[\mathbf{M}]$ :

$$\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = 0 \quad (11.30)$$

La expresión anterior se puede interpretar como la anulación del producto interior de los vectores  $\{\mathbf{a}_k\}$  y  $\{\mathbf{a}_l\}$ , en la métrica definida por  $[\mathbf{M}]$ .

En efecto, debe cumplirse:

$$\begin{aligned} \lambda_k[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} &= [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\} \\ \lambda_l[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} &= [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_l\} \end{aligned}$$

Premultiplicando la primera igualdad por  $\{\mathbf{a}_l\}^T$ , la segunda por  $\{\mathbf{a}_k\}^T$  y restando ambas entre sí, gracias a la simetría de  $[\mathbf{M}]$  y de  $[\mathbf{K}]$  obtenemos

$$(\lambda_k - \lambda_l)\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = 0 \quad (11.31)$$

Al ser  $\lambda_k \neq \lambda_l$  queda demostrada la ortogonalidad.

5. *Los autovalores y autovectores son intrínsecos:*

Esto quiere decir que son independientes de la elección de coordenadas. En efecto, si suponemos un cambio de coordenadas cartesianas definido por la matriz  $[\mathbf{U}]$ ,

$$\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{U}]\{\mathbf{y}\}, \quad (11.32)$$

al sustituir en la ecuación matricial (11.15) resulta:

$$[\mathbf{M}][\mathbf{U}]\{\ddot{\mathbf{y}}\} + [\mathbf{K}][\mathbf{U}]\{\mathbf{y}\} = \{\mathbf{0}\};$$

la ecuación característica es ahora:

$$| -\lambda[\mathbf{M}][\mathbf{U}] + [\mathbf{K}][\mathbf{U}] | = |[ \mathbf{U} ] \cdot | - \lambda[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}] | = 0.$$

Si el cambio de coordenadas es regular, es decir  $|[\mathbf{U}]| \neq 0$ , se deduce por tanto la misma ecuación característica (11.21). De ella resultarán los mismos autovalores  $\lambda_k$ . Los vectores propios correspondientes estarán ligados a los obtenidos con las coordenadas originales  $\{\mathbf{q}\}$  mediante las relaciones de cambio de coordenadas (11.32).

6. *Los vectores propios son linealmente independientes.*

Los vectores propios asociados a autovalores distintos son *linealmente independientes*. En efecto, si suponemos una combinación lineal cualquiera

$$\alpha_1\{\mathbf{a}_1\} + \alpha_2\{\mathbf{a}_2\} + \dots + \alpha_k\{\mathbf{a}_k\} + \dots + \alpha_n\{\mathbf{a}_n\} = \{\mathbf{0}\}$$

premultiplicando por  $\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]$  obtenemos  $\alpha_k = 0$ . Puesto que esta operación se puede realizar para todos los valores  $k = 1, \dots, n$ , se deduce que la única posibilidad es que todos los coeficientes  $\alpha_k$  sean nulos. Los  $n$  vectores propios forman por tanto una base del espacio vectorial  $R^n$ .

### Normalización de los vectores propios

Al ser solución de un sistema homogéneo, los vectores propios están indefinidos respecto de, al menos, un parámetro. Así, si  $\{\mathbf{a}_k\}$  es vector propio,  $\mu\{\mathbf{a}_k\}$  también lo es:

$$(-\lambda_k[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])(\mu\{\mathbf{a}_k\}) = \mu\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$$

podemos por tanto escoger los vectores propios de forma que cumplan algún criterio de normalización.

Una posibilidad es que su norma respecto de la matriz de masas sea unidad:

$$\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = 1. \quad (11.33)$$

Para hacer esta normalización, el procedimiento que se sigue en la práctica, es tomar en primer lugar una solución cualquiera para (11.28), que podemos denominar  $\{\mathbf{v}_k\}$ . A continuación, este vector propio se normaliza dividiéndolo por su norma

$$\{\mathbf{a}_k\} = \frac{\{\mathbf{v}_k\}}{\sqrt{\{\mathbf{v}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{v}_k\}}} \quad (11.34)$$

En este caso, considerando (11.30) y (11.34), se verificará

$$\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = \delta_{kl} \quad (= 0, \text{ si } k \neq l; \quad = 1, \text{ si } k = l) \quad (11.35)$$

La normalización realizada en (11.34) no suele ser la más conveniente en la práctica, y no es la única opción posible. Otra posibilidad sería adoptar el convenio de que la primera componente de cada vector propio fuese de valor unidad, o bien que la máxima componente de cada vector propio fuese la unidad. Estas alternativas pueden ser preferibles para expresar los vectores propios en cálculos manuales, con objeto de evitar las operaciones aritméticas que implica (11.34). En estos casos, la norma respecto de la matriz de masa no será unidad,

$$\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = M_k. \quad (11.36)$$

El valor  $M_k$  se denomina *masa modal* del modo  $\{\mathbf{a}_k\}$ . Conviene advertir que no se trata de una magnitud intrínseca de los modos de vibración, sino que depende de cómo se hayan escogido y normalizado. La expresión general del producto interno de dos autovalores será

$$\{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = \delta_{kl}M_k \quad (k \text{ no sumado}). \quad (11.37)$$

La ortogonalidad respecto de  $[\mathbf{M}]$  implica también ortogonalidad respecto de  $[\mathbf{K}]$ : premultiplicando (11.28) por  $\{\mathbf{a}_l\}^T$ ,

$$\{\mathbf{a}_l\}^T[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_k\} = \{\mathbf{a}_l\}^T(\omega_k^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}) = \delta_{kl}M_k\omega_k^2 \quad (11.38)$$

(sin sumar en  $k$ ).



### 11.2.3. Caso de autovalores múltiples

La propiedad de ortogonalidad (11.30), conducente a obtener un conjunto de  $n$  vectores propios normalizados y ortogonales entre sí respecto de  $[\mathbf{M}]$ , se ha basado en la no existencia de soluciones múltiples de la ecuación característica (11.21), por lo que todos los autovalores en (11.31) eran distintos.

En el caso en que existan autovalores múltiples como solución de (11.21) es posible también obtener un conjunto de vectores propios normalizados y mutuamente ortogonales. A continuación se describe en líneas generales el procedimiento de obtención.

Supongamos que uno de los autovalores  $\lambda$  es una solución doble. En ese caso, el sistema de ecuaciones homogéneo (11.19) poseerá como soluciones para este valor de  $\lambda$  un subespacio de dimensión 2, por lo que se podrán escoger dos vectores solución independientes,  $\{\mathbf{a}'_k\}$  y  $\{\mathbf{a}'_l\}$ , que supondremos ya normalizados, es decir cumpliendo cada uno la condición (11.33).

Deseamos obtener dentro de este subespacio dos vectores  $\{\mathbf{a}_k\}$  y  $\{\mathbf{a}_l\}$ , ortogonales entre sí y a todos los demás vectores propios correspondientes a los otros autovalores. Escogemos para ello el primero directamente como  $\{\mathbf{a}_k\} = \{\mathbf{a}'_k\}$ . Este vector cumple la condición de ortogonalidad respecto a los vectores propios de autovalores distintos, ya que es válido el mismo razonamiento seguido en (11.31). Para el otro vector  $\{\mathbf{a}_l\}$ , suponemos una combinación lineal arbitraria de  $\{\mathbf{a}'_k\}$  y  $\{\mathbf{a}'_l\}$ , en función de dos escalares  $c_1$  y  $c_2$ :

$$\{\mathbf{a}_l\} = c_1\{\mathbf{a}'_k\} + c_2\{\mathbf{a}'_l\}$$

imponiendo la ortogonalidad con  $\{\mathbf{a}_k\}$ ,

$$\{\mathbf{a}_l\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} = c_1M_k + c_2\{\mathbf{a}'_l\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}'_k\} = 0, \quad (11.39)$$

de donde se obtiene una relación entre  $c_1$  y  $c_2$ ,

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{\{\mathbf{a}'_l\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}'_k\}}{M_k} = -\mu_l.$$

Obtenemos otra relación expresando la masa modal de  $\{\mathbf{a}_l\}$ ,

$$\{\mathbf{a}_l\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_l\} = M_l = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2\mu_l. \quad (11.40)$$

De las dos ecuaciones (11.39) y (11.40) determinamos los valores precisos de  $c_1$  y  $c_2$ . De esta forma se obtienen dos vectores propios asociados al autovalor  $\lambda$ , que son ortogonales a todos los demás y entre sí.

En el caso de haber autovalores de multiplicidad mayor ( $m > 2$ ), se sigue un procedimiento similar. En primer lugar se escoge un primer vector normalizado del subespacio asociado de dimensión  $m$ ; a continuación se aplica el procedimiento anterior para obtener un segundo vector dentro de este subespacio, ortogonal al primero; y así sucesivamente, imponiendo cada vez las condiciones de ortogonalidad con todos los vectores anteriores, hasta obtener los  $m$  vectores ortogonales entre sí.

El método descrito es análogo al procedimiento clásico de ortogonalización de Gram-Schmidt, que se puede consultar en los textos de álgebra lineal<sup>6</sup>.

#### 11.2.4. Análisis modal; coordenadas normales

La solución general de las ecuaciones (11.15), debido a la linealidad de las soluciones, se puede expresar como una combinación lineal de las mismas, de la forma (11.24):

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos(\omega_k t - \delta_k) \quad (11.41)$$

Denominando  $a_{ki}$  a la componente  $i$  del vector propio  $\{\mathbf{a}_k\}$ , la expresión anterior se puede escribir en componentes como

$$q_i = B_k a_{ki} \cos(\omega_k t - \delta_k) \quad (11.42)$$

donde se sobreentiende el sumatorio implícito en el índice repetido  $k$ . Definamos ahora unos coeficientes (función del tiempo)

$$u_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} B_k \cos(\omega_k t - \delta_k) \quad (11.43)$$

que denominamos *coordenadas normales*. En función de ellas (11.42) queda

$$q_i(t) = a_{ki} u_k(t) \quad (11.44)$$

Esta expresión puede interpretarse como un cambio de coordenadas para obtener  $u_k(t)$  a partir de las  $q_i(t)$ . La matriz del cambio es la definida por los coeficientes  $a_{ki}$ , que son constantes en relación al tiempo, y que como hemos visto son precisamente las componentes de los modos normales de vibración.

---

<sup>6</sup>Cristóbal Mateos: *Álgebra Lineal*, Servicio de Publicaciones de la E.T.S.I.C.C.P. de Madrid; Juan de Burgos: *Álgebra Lineal*, McGraw-Hill, 1993

Las componentes  $a_{ki}$  definidos para la expresión (11.42) constituyen la llamada *Matriz Modal*,  $[\mathbf{A}] \stackrel{\text{def}}{=} [a_{ki}]$ . Es inmediato comprobar que ésta está formada por los modos normales como filas,

$$[\mathbf{A}] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \{\mathbf{a}_1\}^T \\ \{\mathbf{a}_2\}^T \\ \vdots \\ \{\mathbf{a}_n\}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}) \\ (a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}) \end{pmatrix} \quad (11.45)$$

El cambio de coordenadas establecido por (11.44) está definido por la traspuesta de la matriz modal,  $[\mathbf{A}]^T$ . La expresión de la solución  $\{\mathbf{q}\}$  en función de las coordenadas normales  $\{\mathbf{u}\}$  es pues:

$$\boxed{\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\}} \quad (11.46)$$

es decir

$$\{\mathbf{q}(t)\} = u_1(t)\{\mathbf{a}_1\} + u_2(t)\{\mathbf{a}_2\} + \dots + u_n(t)\{\mathbf{a}_n\}$$

Las coordenadas normales así definidas poseen una propiedad notable, ya que en función de ellas las ecuaciones del movimiento quedan desacopladas. Al realizar el cambio a las coordenadas normales, en lugar de un sistema de  $n$  ecuaciones simultáneas acopladas (11.15), se obtienen  $n$  ecuaciones independientes, cada una con una sola variable, que se pueden solucionar una a una. En efecto, sustituyendo (11.46) en (11.15),

$$[\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}$$

y premultiplicando por la matriz modal  $[\mathbf{A}]$ ,

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T \{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Desarrollando en componentes los productos de matrices en esta ecuación, la componente  $(ij)$  de  $[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T$  corresponde a

$$([\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T)_{ij} = a_{ik}m_{kl}a_{jl} = \{\mathbf{a}_i\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{a}_j\} = \delta_{ij}M_i,$$

es decir, se trata del producto interior a través de  $[\mathbf{M}]$  del modo  $\{\mathbf{a}_i\}$  (fila  $i$  de  $[\mathbf{A}]$ ) y el modo  $\{\mathbf{a}_j\}$  (columna  $j$  de  $[\mathbf{A}]^T$ ), que como se vió en (11.37) son las deltas de Kronecker multiplicadas por las masas modales. Por tanto el resultado es una matriz diagonal:

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T = [\mathbf{M}_D] = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n \end{pmatrix} \quad (11.47)$$

En el caso en que la normalización se haya hecho con masas modales unitarias (11.35), esta sería la matriz identidad.

Análogamente, el otro producto de matrices, empleando (11.38), resulta otra matriz diagonal

$$[\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T = [\mathbf{K}_D] = \begin{pmatrix} M_1\omega_1^2 & & & \\ & M_2\omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n\omega_n^2 \end{pmatrix} \quad (11.48)$$

Por lo tanto, la ecuación (11.15) queda expresada en coordenadas normales como

$$[\mathbf{M}_D]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_D]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (11.49)$$

En componentes, equivale a  $n$  ecuaciones desacopladas (independientes)

$$\boxed{\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n} \quad (11.50)$$

(sin sumatorio sobre el índice repetido  $k$ ).

Este resultado no debería extrañar si se recuerda la definición de  $u_k(t)$  realizada antes (11.43). En efecto, esta ecuación define las  $u_k(t)$  como funciones armónicas de frecuencias  $\omega_k$ , que son precisamente las soluciones generales de ecuaciones del tipo (11.50). Existe una identidad formal entre definir  $u_k(t)$  explícitamente en función de constantes  $B_k$  y  $\delta_k$  por determinar como en (11.43), o definir las como soluciones de las ecuaciones (11.50). En definitiva, las ecuaciones (11.50) en  $u_k$  son  $n$  ecuaciones desacopladas, correspondientes cada una a un sistema de un grado de libertad: la amplitud del modo de vibración correspondiente.

Esta observación permite interpretar las vibraciones libres de un sistema de  $n$  grados de libertad como la suma de las oscilaciones por separado de  $n$  modos normales de vibración, independientes unos de otros. Así las coordenadas normales  $u_k(t)$  son las amplitudes de cada modo, coeficientes variables con el tiempo por los que multiplicamos a los modos de vibración para obtener la vibración total del sistema.

Hacemos notar que el desarrollo realizado arriba para demostrar la existencia y propiedades de ortogonalidad de los modos de vibración, resumido en las ecuaciones (11.47) y (11.48), puede resumirse mediante el llamado teorema de diagonalización simultánea<sup>7</sup>. Este afirma que, dada una matriz

<sup>7</sup>Consultar por ejemplo J.A. Fernández Palacios: *Mecánica Teórica de los Sistemas de Sólidos Rígidos*, 1989.

simétrica  $[\mathbf{M}]$  definida positiva, y otra matriz  $[\mathbf{K}]$  simétrica, existe siempre una matriz  $[\mathbf{A}]$  no singular tal que  $[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T = [\mathbf{1}]$  y  $[\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T = [\mathbf{D}]$ , siendo  $[\mathbf{1}]$  la matriz unidad y  $[\mathbf{D}]$  una matriz diagonal. Si además  $[\mathbf{K}]$  es definido positivo, los términos de la diagonal de  $[\mathbf{D}]$  serán todos positivos como es nuestro caso.

EJEMPLO 11.2: Sea un péndulo doble, formado por dos masas iguales  $m$  unidas por varillas rígidas sin masa de longitud  $l$ , la primera de las cuales está articulada en un punto fijo (figura 11.2). Estudiar las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio vertical calculando las frecuencias propias y modos normales de vibración.

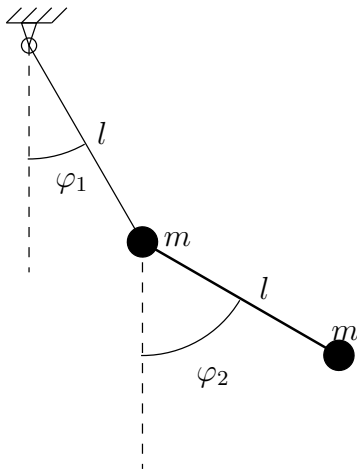


Figura 11.2: Péndulo doble formado por masas puntuales  $m$  unidas por varillas de longitud  $l$

Empleando las coordenadas  $(\varphi_1, \varphi_2)$  definidas en la figura 11.2, la Lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2}ml^2 [2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] + mgl(2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2).$$

Las ecuaciones de Lagrange del movimiento resultan:

$$\begin{aligned} 0 &= 2ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\ddot{\varphi}_2 - ml^2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + 2mgl \sin \varphi_1 \\ 0 &= ml^2\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + ml^2\ddot{\varphi}_2 + ml^2\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + mgl \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

Las ecuaciones se linealizan despreciando términos de segundo orden:

$$\begin{aligned} 0 &= 2ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2 + 2mgl\varphi_1 \\ 0 &= ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2 + mgl\varphi_2 \end{aligned}$$

La expresión matricial de las ecuaciones es:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica resulta

$$\det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(\frac{g}{l} - \lambda\right)^2 - \lambda^2 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$\lambda_1 = (2 - \sqrt{2})\frac{g}{l}; \quad \lambda_2 = (2 + \sqrt{2})\frac{g}{l}.$$

A partir de éstas podemos calcular el vector propio asociado a cada una, así como la frecuencia propia. El resultado es:

$$\omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}; \quad \{\mathbf{a}_1\}^T = (1, \sqrt{2});$$

$$\omega_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}; \quad \{\mathbf{a}_2\}^T = (1, -\sqrt{2}).$$

### 11.2.5. Condiciones iniciales

Los  $2n$  coeficientes  $(B_k, \delta_k)$  de (11.41) se obtendrán a partir de las  $2n$  condiciones iniciales  $(\{\mathbf{q}_0\}, \{\dot{\mathbf{q}}_0\})$ . Desarrollando esta expresión,

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_k B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos \delta_k \cos \omega_k t + \sum_k B_k \{\mathbf{a}_k\} \operatorname{sen} \delta_k \operatorname{sen} \omega_k t \quad (11.51)$$

por otra parte, la derivada de (11.41) es

$$\{\dot{\mathbf{q}}\} = - \sum_k B_k \{\mathbf{a}_k\} \omega_k \operatorname{sen}(\omega_k t - \delta_k)$$

particularizando ambas en  $t = 0$ ,

$$\{\mathbf{q}_0\} = \sum_k B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos \delta_k$$

$$\{\dot{\mathbf{q}}_0\} = \sum_k B_k \omega_k \{\mathbf{a}_k\} \operatorname{sen} \delta_k$$

premultiplicando por  $\{\mathbf{a}_l\}^T[\mathbf{M}]$  identificamos los coeficientes:

$$\begin{aligned} B_l M_l \cos \delta_l &= \{\mathbf{a}_l\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{q}_0\} \\ B_l \omega_l M_l \sin \delta_l &= \{\mathbf{a}_l\}^T[\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{q}}_0\} \end{aligned} \quad (l \text{ no sumado})$$

Sustituyendo en (11.51) podremos expresar la solución directamente en función de las condiciones iniciales como

$$\boxed{\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{M_k} \left[ \{\mathbf{a}_k\}^T[\mathbf{M}] \left( \{\mathbf{q}_0\} \cos \omega_k t + \frac{1}{\omega_k} \{\dot{\mathbf{q}}_0\} \sin \omega_k t \right) \right] \{\mathbf{a}_k\}} \quad (11.52)$$

EJEMPLO 11.3: Demostrar que un sistema sometido a un desplazamiento inicial proporcional a un modo de vibración, partiendo del reposo, desarrolla un movimiento de oscilación pura en que sólo se excita ese modo de vibración.

En efecto, sea  $\{\mathbf{q}_0\} = \{\mathbf{a}_p\}$ ,  $\{\dot{\mathbf{q}}_0\} = \{\mathbf{0}\}$ . Los coeficientes entre corchetes del sumatorio (11.52) serán

$$[\cdot]_k = \{\mathbf{a}_k\}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_p\} \cos \omega_k t = M_k \delta_{kp} \cos \omega_k t.$$

Por tanto, el movimiento resultante será

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{M_k} M_k \delta_{kp} \cos \omega_k t \{\mathbf{a}_k\} = \cos \omega_p t \{\mathbf{a}_p\}.$$

### 11.2.6. Oscilaciones libres con amortiguamiento

Se considera ahora el caso más general de vibraciones libres en las que puedan existir fuerzas de amortiguamiento, dependientes de la velocidad. La ecuación del movimiento es (11.9):

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Buscamos la solución mediante funciones del tipo

$$\{\mathbf{q}\} = C\{\mathbf{b}\}e^{i\omega t}$$

donde al igual que antes, sólo tiene significado físico la parte real de la expresión, aunque con objeto de simplificar el desarrollo, emplearemos las constantes y la notación complejas.

En este caso, a diferencia del caso sin amortiguamiento, tanto  $\{\mathbf{b}\}$  como  $\omega$  pueden pertenecer al campo complejo. Sustituyendo en la ecuación matricial (11.9) y dividiendo por  $Ce^{i\omega t} \neq 0$ ,

$$(-[\mathbf{M}]\omega^2 + i[\mathbf{C}]\omega + [\mathbf{K}])\{\mathbf{b}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Para simplificar las expresiones, realizamos el cambio  $\gamma = i\omega$ . Resulta entonces

$$([\mathbf{M}]\gamma^2 + [\mathbf{C}]\gamma + [\mathbf{K}])\{\mathbf{b}\} = \{\mathbf{0}\},$$

sistema homogéneo que define un problema de autovalores complejo. Para tener solución distinta de la trivial, ha de cumplir la condición de que el determinante de la matriz de coeficientes sea nulo:

$$\det([\mathbf{M}]\gamma^2 + [\mathbf{C}]\gamma + [\mathbf{K}]) = 0 \quad (\text{ecuación característica})$$

Esta ecuación tendrá en general *soluciones complejas* que vendrán dadas por parejas de autovalores y autovectores conjugadas del tipo

$$\begin{aligned} \gamma &= -s + \Omega i, & \gamma^* &= -s - \Omega i; \\ \{\mathbf{b}\} &= \{\boldsymbol{\alpha}\} + \{\boldsymbol{\beta}\}i, & \{\mathbf{b}\}^* &= \{\boldsymbol{\alpha}\} - \{\boldsymbol{\beta}\}i. \end{aligned}$$

La contribución de esta pareja de soluciones conjugadas en la solución general será, si las afectamos de constantes (escalares) arbitrarias  $C_1$  y  $C_2$ ,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}(t)\} &= C_1\{\mathbf{b}\}e^{\gamma t} + C_2\{\mathbf{b}\}^*e^{\gamma^* t} \\ &= e^{-st}[C_1(\{\boldsymbol{\alpha}\} + i\{\boldsymbol{\beta}\})e^{i\Omega t} + C_2(\{\boldsymbol{\alpha}\} - i\{\boldsymbol{\beta}\})e^{-i\Omega t}] \end{aligned}$$

Desarrollando la exponencial compleja y considerando tan sólo la parte real de la expresión resultante,

$$\{\mathbf{q}(t)\} = e^{-st}(C_1 + C_2)[\{\boldsymbol{\alpha}\} \cos \Omega t - \{\boldsymbol{\beta}\} \text{sen } \Omega t] \quad (11.53)$$

Para que la expresión anterior permanezca acotada, la parte real de  $\gamma$ ,  $(-s)$ , ha de ser negativa o nula. En caso contrario, el módulo de (11.53) crecería de forma exponencial, en contra de la hipótesis de movimiento acotado y pequeñas oscilaciones. Si  $s = 0$  no existirá amortiguamiento para esa frecuencia característica, mientras que si  $s > 0$ , se producirá un amortiguamiento que provocará que al cabo de un cierto tiempo el valor de (11.53) se haga tan pequeño como se quiera.

La solución general será, por combinación lineal de todas las soluciones del tipo (11.53),

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^n B_k e^{-s_k t} (\{\boldsymbol{\alpha}_k\} \cos \Omega_k t - \{\boldsymbol{\beta}_k\} \text{sen } \Omega_k t)$$



Esta solución consta pues de un sumatorio de armónicos, cada cual con su fase y frecuencia propias, afectados cada uno de ellos por términos exponenciales decrecientes ( $e^{-s_k t}$ ) que representan la pérdida de energía por el amortiguamiento viscoso. Al cabo de suficiente tiempo el movimiento se detiene en la práctica.

En este caso, la transformación a coordenadas normales exigiría un cambio a ejes principales que diagonalice simultáneamente las tres matrices  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{K}]$ ,  $[\mathbf{C}]$ . En general no es posible realizar esta triple diagonalización simultánea. Tan sólo será factible en algunos casos particulares, como por ejemplo, bajo la hipótesis común en dinámica estructural del *amortiguamiento de Rayleigh*, por la que se considera la matriz de amortiguamiento proporcional a las de masas y de rigidez:

$$[\mathbf{C}] = \alpha[\mathbf{M}] + \beta[\mathbf{K}] \quad (11.54)$$

En este caso se comprueba fácilmente que la diagonalización simultánea se alcanza con la misma matriz modal  $[\mathbf{A}]$  que se obtuvo en el caso sin amortiguamiento (ecuaciones (11.47) y (11.48)), ya que

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}][\mathbf{C}][\mathbf{A}]^T &= \alpha[\mathbf{M}_D] + \beta[\mathbf{K}_D] \\ &= \begin{pmatrix} M_1(\alpha + \beta\omega_1^2) & & & \\ & M_2(\alpha + \beta\omega_2^2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n(\alpha + \beta\omega_n^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11.55)$$

que es también una matriz diagonal.

Para obtener la matriz modal  $[\mathbf{A}]$  se emplearán por tanto los mismos modos normales del problema sin amortiguamiento. Hecha la diagonalización, resultan las ecuaciones desacopladas

$$\ddot{u}_k + c_k \dot{u}_k + \omega_k^2 u_k = 0 \quad (11.56)$$

(sin sumatorio sobre el índice  $k$  repetido), donde  $0 < c_k = \alpha + \beta\omega_k^2$  son los coeficientes de la forma diagonal de  $[\mathbf{C}]$  en (11.55). La solución general de cada una de estas ecuaciones de 1 g.d.l. tal como se expuso en el apartado 3.3 es

$$u_k = C_k e^{i\omega'_k t} \quad (11.57)$$

donde  $C_k$  es en general un número complejo, al igual que  $\omega'_k$ . De la misma forma que antes, de esta expresión se considerará tan sólo la parte real.

Sustituyendo en la ecuación (11.56), las  $\omega'_k$  deben satisfacer

$$-\omega_k'^2 + i\omega_k' c_k + \omega_k^2 = 0$$

ecuación de segundo grado que posee dos soluciones,

$$\omega_k' = i \underbrace{\frac{c_k}{2}}_{= s_k} \pm \underbrace{\sqrt{\omega_k^2 - c_k^2/4}}_{= \Omega_k}$$

Sustituyendo en (11.57) y tomando la parte real,

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \Re(C_k e^{i\Omega_k t} + C_k^* e^{-i\Omega_k t}) e^{-s_k t} \\ &= B_k \cos(\Omega_k t - \delta_k) e^{-s_k t}. \end{aligned}$$

Esta ecuación caracteriza a la amplitud modal como un movimiento afectado de una exponencial decreciente, cuya energía disminuye con el tiempo debido al amortiguamiento.

La ecuación (11.56) se puede escribir también en función de las tasas de amortiguamiento respecto al crítico, haciendo el cambio  $c_k = 2\xi_k \omega_k$ :

$$\ddot{u}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{u}_k + \omega_k^2 u_k = 0;$$

En este caso, la solución de cada amplitud modal será  $u_k(t) = B_k \cos(\Omega_k t - \delta_k) e^{-\xi_k \omega_k t}$ .

Un caso que reviste especial interés en la práctica es aquél en el que se conoce la tasa de amortiguamiento de los modos de vibración, obtenida mediante un análisis modal experimental o a partir de una especificación en una norma, aunque se desconoce la forma exacta que tenga la matriz de amortiguamiento. Supongamos que los amortiguamientos modales unitarios son  $\xi_k$ , medidos como razón del amortiguamiento crítico. En este caso puede obtenerse esta matriz mediante

$$[\mathbf{C}] = \sum_{k=1}^n 2\xi_k \omega_k \frac{1}{M_k} ([\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\})(\{\mathbf{a}_k\}^T [\mathbf{M}]). \quad (11.58)$$

En efecto, realizando el producto por los vectores propios en esta matriz resulta una expresión diagonal,

$$\{\mathbf{a}_l\}^T [\mathbf{C}]\{\mathbf{a}_p\} = 2\xi_l \omega_l M_l \delta_{lp}.$$

La ecuación desacoplada resultante para cada modo será

$$\ddot{u}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{u}_k + \omega_k^2 u_k = 0.$$

## 11.3. Oscilaciones forzadas

### 11.3.1. Oscilaciones sin amortiguamiento; Resonancia

La ecuación matricial incluye en este caso un término independiente, debido a las fuerzas de excitación externas:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}(t)\} \quad (11.59)$$

Esta ecuación tiene por solución general una solución particular de la completa (11.59) más la solución general de la homogénea (11.15):

$$\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{q}\}^h + \{\mathbf{q}\}^p$$

La solución general de la homogénea es la obtenida anteriormente para las vibraciones libres (11.24).

Para la solución particular de la completa estudiemos el caso concreto en que las fuerzas son armónicas,

$$\{\mathbf{f}(t)\} = \{\mathbf{F}\} \text{sen } \alpha t,$$

siendo  $\{\mathbf{F}\}$  un vector de constantes.

Busquemos una solución particular del mismo tipo,

$$\{\mathbf{q}\}^p = \{\mathbf{D}\} \text{sen } \alpha t.$$

El vector de constantes  $\{\mathbf{D}\}$  se calcula sustituyendo  $\{\mathbf{q}\}^p$  en la ecuación (11.59):

$$(-\alpha^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{D}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\}) \text{sen } \alpha t = \{\mathbf{F}\} \text{sen } \alpha t$$

por lo que

$$\{\mathbf{D}\} = (-\alpha^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])^{-1}\{\mathbf{F}\} \quad (11.60)$$

En el caso en que  $\alpha$  coincida con una de las frecuencias propias del sistema ( $\alpha = \omega_k$ ), la matriz a invertir en (11.60) se hace singular y no tiene solución por lo tanto. Esto físicamente equivale a una *resonancia* del sistema, debido a que el modo de vibración afectado absorbe constantemente la energía de excitación suministrada con su misma frecuencia propia, hasta que la amplitud del mismo se hace infinita.

Otra forma de estudiar las oscilaciones forzadas es mediante el análisis modal; haciendo el cambio (11.46) a las coordenadas normales en (11.59) y premultiplicando por la matriz modal  $[\mathbf{A}]$ ,

$$[\mathbf{A}][\mathbf{M}][\mathbf{A}]^T\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{A}][\mathbf{K}][\mathbf{A}]^T\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{f}(t)\}$$

Los productos de matrices de esta expresión se simplifican empleando (11.47) y (11.48),

$$\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\boldsymbol{\Omega}]^2\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{f}(t)\}$$

En componentes,

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = \eta_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n, \text{ sin sumatorio})$$

donde los coeficientes  $\eta_k(t)$  representan

$$\eta_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} a_{kj} f_j(t),$$

teniendo la interpretación de “fuerzas modales”.

Resulta por tanto un conjunto de  $n$  ecuaciones desacopladas de 1 grado de libertad cada una, que resolvemos independientemente. Si en una ecuación se produce resonancia ( $\omega_k = \alpha$  para fuerzas armónicas del tipo arriba descrito), la amplitud de ese modo tenderá a infinito.

El vector de fuerzas  $\{\mathbf{f}(t)\}$  participa de forma distinta en cada modo, excitándolos más o menos, según el valor de  $\eta_k$ . En el caso en que las fuerzas sean armónicas,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}(t)\} &= \{\mathbf{F}\} \text{ sen } \alpha t, \\ \eta_k(t) &= a_{kj} F_j \text{ sen } \alpha t \end{aligned}$$

denominándose  $a_{kj} F_j = \{\mathbf{a}_k\}^T \{\mathbf{F}\}$  el “coeficiente de participación modal” de  $\{\mathbf{F}\}$  en el modo  $k$ . En el caso en que coincida la frecuencia de la excitación con alguna frecuencia propia,  $\alpha = \omega_k$ , se producirá resonancia para ese modo de vibración.

En la práctica los coeficientes de participación modal de las fuerzas habituales suelen ser altos para los modos más bajos ( $\omega_k$  pequeñas), y progresivamente más pequeños para los modos altos ( $\omega_k$  grandes). Es por esto que los modos más bajos suelen ser los que más importancia tienen en la dinámica estructural, al ser los que concentran la mayor parte de la energía en las vibraciones. A menudo se hace la simplificación consistente en considerar únicamente un número limitado de modos de vibración, despreciando los de frecuencias más altas. Esto resulta de gran utilidad cuando los modelos de cálculo poseen un número elevado de grados de libertad, ya que a veces se llega a tener decenas de miles para algunos cálculos tridimensionales.

### 11.3.2. Oscilaciones con amortiguamiento; régimen transitorio y permanente

En este caso la ecuación matricial del problema es la (11.10) completa,

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}(t)\}$$

Al igual que antes, ésta tendrá por solución general una solución particular de la completa (11.10) más la solución general de la homogénea (11.9):

$$\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{q}\}^h + \{\mathbf{q}\}^p \quad (11.61)$$

La solución de la homogénea corresponde al caso de vibraciones libres con amortiguamiento, y tiene un valor apreciable sólo durante un tiempo limitado llamado *régimen transitorio*, desapareciendo al cabo del tiempo. Esta solución se ha estudiado antes, en el apartado 11.2.6. En el régimen transitorio se debe considerar por tanto la suma de los dos términos (11.61).

La solución particular de la completa es la que define el llamado *régimen permanente*. Supongamos el caso de una excitación armónica, del tipo

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}(t)\} &= \Re(\{\mathbf{F}\}e^{i\alpha t}) \\ &= \{\mathbf{F}\} \cos \alpha t \end{aligned}$$

Buscaremos una solución particular del tipo  $\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{D}\}e^{i\alpha t}$ , para lo que sustituimos esta expresión en (11.10) obteniendo

$$(-\alpha^2[\mathbf{M}] + i\alpha[\mathbf{C}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (11.62)$$

Esta ecuación lineal se resuelve mediante la regla de Cramer, obteniendo los elementos del vector solución  $\{\mathbf{D}\}$  como:

$$D_j = \frac{\det_j(\alpha)}{\det(\alpha)}$$

donde  $\det(\alpha) = |-\alpha^2[\mathbf{M}] + i\alpha[\mathbf{C}] + [\mathbf{K}]|$ , y  $\det_j(\alpha)$  es el determinante de la matriz de coeficientes anterior en la que se ha sustituido la columna  $j$ -ésima por el término independiente  $\{\mathbf{F}\}$ . No hace falta repetir que, de estas expresiones complejas, al final se considerará sólo la parte real.

Los valores de la frecuencia de excitación  $\alpha$  que hacen mínimo el denominador,  $\det(\alpha)$ , son los que producen resonancia en el sistema. Debido al amortiguamiento, aquí la amplitud de oscilación no tiende a infinito, sino que se mantiene acotada, aunque con valores elevados que pueden provocar la pérdida de linealidad o incluso la rotura del sistema.

Si el amortiguamiento es suficientemente pequeño, como suele ocurrir en numerosas aplicaciones prácticas, las frecuencias de resonancia tienen un valor aproximadamente igual a las frecuencias propias sin amortiguamiento  $\omega_k$ . A menudo será válido también el considerar de forma aproximada que el régimen permanente es el que sale de la solución particular a la ecuación sin amortiguamiento (11.60). Esto equivaldría a considerar que existe un pequeño amortiguamiento (inevitable), pero que para el cálculo de régimen permanente se puede despreciar el valor del mismo, lo que suele ser una aproximación válida en numerosos casos prácticos.

## 11.4. Métodos para la obtención de modos y frecuencias propias

En sistemas con pocos grados de libertad (2 ó 3) la obtención de frecuencias propias y modos normales de vibración se puede realizar manualmente, resolviendo la ecuación característica y el problema de autovalores asociado. Para casos con mayor número de grados de libertad existen otros procedimientos, susceptibles de tratamiento numérico y resolución en el ordenador. Expondremos aquí un método basado en la “deflacción” de matrices (*Método de Stodola*), aplicable a casos con un número moderado de grados de libertad. Para los casos con un elevado número de grados de libertad, existen procedimientos más eficaces, como los métodos de iteración por subespacios o el método de Lanczos, que pueden consultarse en la bibliografía de métodos numéricos en mecánica computacional y elementos finitos<sup>8</sup>.

Supongamos, para no complicar la exposición, que todos los autovalores son distintos y no nulos. El problema de autovalores definido por

$$(-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{0}\}$$

se puede expresar también, multiplicando por  $[\mathbf{K}]^{-1}$ , como

$$[\mathbf{D}]\{\mathbf{u}\} = \mu\{\mathbf{u}\}$$

siendo

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}] &\stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{K}]^{-1} \cdot [\mathbf{M}] \\ \mu &\stackrel{\text{def}}{=} 1/\omega^2 \end{aligned}$$

Empezamos por tomar un vector  $\{\mathbf{u}_1\}$  cualquiera, que será combinación lineal de los vectores propios o modos normales de vibración, ya que como vimos éstos forman una base de  $\mathbb{R}^n$ . Si multiplicamos  $\{\mathbf{u}_1\}$  por la matriz  $[\mathbf{D}]$ , cada componente en esta base se verá multiplicada por el autovalor  $\mu_i$  correspondiente. La componente en la dirección del mayor autovalor,  $\mu = \mu_1$  (supuesto  $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots > \mu_n$ ), se verá multiplicada por un valor mayor que las demás. Al vector resultante lo denominamos  $\{\mathbf{u}_2\}$

$$\{\mathbf{u}_2\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}_1\}$$

---

<sup>8</sup>ver p.ej.: T.J.R. Hughes, *The Finite Element Method*, capítulo 10, Prentice-Hall Inc., 1987; K.J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982.

Repitiendo el proceso sucesivamente, se obtienen una sucesión de vectores  $\{\mathbf{u}_n\}$ :

$$\{\mathbf{u}_3\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}_2\}; \quad \{\mathbf{u}_4\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}_3\}; \quad \dots \quad \{\mathbf{u}_n\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{u}_{n-1}\}$$

En el límite ( $n \rightarrow \infty$ ), en el vector  $\{\mathbf{u}_n\}$  predominará el autovector correspondiente al máximo autovalor,  $\mu_1$  (es decir, para el mínimo valor de la frecuencia que será  $\omega_1$ ). Hemos de tomar la precaución de normalizar el vector  $\{\mathbf{u}_n\}$  tras cada iteración, para evitar valores numéricos excesivamente grandes. Cuando se hayan realizado suficientes iteraciones será por tanto

$$[\mathbf{D}]\{\mathbf{u}_n\} \approx \mu\{\mathbf{u}_n\}$$

con un error menor que una tolerancia prefijada. Entonces se adopta  $\mu_1 = \mu$  como autovalor, y  $\{\mathbf{u}_n\}$  como vector propio correspondiente. La frecuencia propia es  $\omega_1 = 1/\sqrt{\mu_1}$ , y llamamos  $\{\mathbf{a}_1\}$  al vector propio una vez normalizado,

$$\{\mathbf{a}_1\} = \frac{\{\mathbf{u}_n\}}{\sqrt{\{\mathbf{u}_n\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{u}_n\}}}$$

Consideramos ahora la nueva matriz

$$[\mathbf{D}]_2 = [\mathbf{D}] - \underbrace{\mu_1 \{\mathbf{a}_1\} \{\mathbf{a}_1\}^T}_{n \times n} \cdot [\mathbf{M}] \quad (11.63)$$

Vemos que, al multiplicar esta matriz por  $\{\mathbf{a}_1\}$  el resultado se anula:

$$[\mathbf{D}]_2\{\mathbf{a}_1\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{a}_1\} - \mu_1\{\mathbf{a}_1\} \cdot 1 = \{\mathbf{0}\}$$

mientras que para los otros vectores propios ( $k \neq 1$ ) se obtiene el mismo resultado que antes,

$$[\mathbf{D}]_2\{\mathbf{a}_k\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{a}_k\} - \mu_1\{\mathbf{a}_1\} \overbrace{\{\mathbf{a}_1\}^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\}}^{\delta_{1k}=0} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{a}_k\}$$

Repitiendo el proceso de deflación con esta matriz  $[\mathbf{D}]_2$ , obtendremos el autovalor/autovector siguiente ( $\mu_2 = 1/\omega_2^2$ ).

Una vez obtenido, normalizaríamos el vector propio y obtendríamos la matriz  $[\mathbf{D}]_3$  de la misma forma que (11.63). Proseguiríamos así sucesivamente, hasta obtener todos los autovalores y vectores propios.

Este procedimiento tiene la ventaja que los modos se obtienen de forma sucesiva, comenzando por los de frecuencias propias más bajas. Estos suelen ser los más importantes en cuanto a su participación en la solución real, por lo que a menudo basta con obtener los  $m$  modos más bajos. Este método permite calcular sólo los modos más importantes, deteniendo el proceso cuando se ha calculado el modo  $m$ .





# Capítulo 12

## Ecuaciones de Hamilton

### 12.1. Introducción

Para un sistema material con  $n$  grados de libertad hemos estudiado hasta ahora en el capítulo 6 las ecuaciones de Newton-Euler (6.7) y (6.12), bien en forma vectorial o bien sus componentes en coordenadas cartesianas, y en el capítulo 7 las ecuaciones de Lagrange (7.14), en coordenadas generalizadas. Todas ellas definen el movimiento mediante  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden. Para su resolución necesitan  $2n$  condiciones iniciales, por ejemplo las posiciones y velocidades iniciales.

Las ecuaciones canónicas (o de Hamilton) que se estudian en este capítulo difieren de las formulaciones anteriores en que los sistemas se describen con  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden (es decir, en derivadas primeras), en lugar de  $n$  ecuaciones de segundo orden. Para ello, se introduce un conjunto nuevo de variables: los momentos generalizados  $p^i$ . Análogamente, la solución general de estas ecuaciones dependerá de  $2n$  parámetros constantes que se deben determinar mediante las correspondientes condiciones iniciales (posiciones y momentos iniciales).

Las ecuaciones Canónicas y en general los métodos de la dinámica Hamiltoniana tienen un interés principalmente conceptual y teórico. Su aplicación práctica trasciende a la mecánica racional, estando en la base de la formulación dinámica de otros campos, como la mecánica cuántica. Por el contrario tienen una aplicabilidad práctica a la resolución de problemas de mecánica racional menor que las formulaciones Lagrangiana o de Newton-Euler.

En ocasiones la descripción mediante  $2n$  ecuaciones de primer orden es ventajosa, ya que puede facilitar la resolución mediante métodos numéricos, que se formulan y estudian en general para sistemas de Ecuaciones

diferenciales de primer orden.

El método que seguiremos para deducir las ecuaciones Canónicas se basa en la transformada de Legendre, que pasamos a describir a continuación.

## 12.2. La transformada de Legendre y sus propiedades

Sea una función  $f(q_i, s_j)$  que depende de dos conjuntos de variables: las  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), y las  $s_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). Se define como transformada de Legendre de  $f$  respecto de las variables  $s_j$  a la función

$$G(q_i, p^j) \stackrel{\text{def}}{=} p^j s_j - f \quad (12.1)$$

donde se sobreentiende el sumatorio<sup>1</sup> en el índice repetido  $j$ , y se emplean las nuevas variables  $p^j$  que se definen como

$$p^j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial s_j} \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (12.2)$$

Diremos que las variables  $p^j$  son “conjugadas” de las  $s_j$ .

Es importante recalcar que la dependencia funcional de la transformada  $G$  es respecto de las variables  $q_i$  y de las nuevas variables  $p^j$ , para lo cual habremos de realizar el oportuno cambio de variables en la expresión de  $f$  en (12.1), eliminando las  $s_j$  en favor de  $p^j$ . Para que sea posible realizar esto, el cambio de variables ha de ser regular, condición que se expresa mediante el determinante del jacobiano de la transformación:

$$\det \left[ \frac{\partial p^j}{\partial s_i} \right] = \det \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial s_j \partial s_i} \right] \neq 0 \quad (12.3)$$

Si tomamos el diferencial de  $G$  en su definición (12.1),

$$\begin{aligned} dG &= s_j dp^j + p^j ds_j - \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial f}{\partial s_j} ds_j \\ &= s_j dp^j - \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>en este capítulo se entenderá el sumatorio implícito sobre los índices repetidos en todas las expresiones

donde se han empleado las relaciones (12.2). Esta igualdad nos permite identificar las derivadas parciales de  $G$ :

$$\frac{\partial G}{\partial p^j} = s_j; \quad (12.4)$$

$$\frac{\partial G}{\partial q_i} = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \quad (12.5)$$

Observamos pues que las derivadas parciales de la transformada  $G$  respecto de las variables conjugadas ( $p^j$ ) son precisamente las  $s^j$  que han venido a sustituir, y las derivadas respecto a las variables que permanecen ( $q_i$ ) son las de la función original ( $f$ ) con signo cambiado.

Si realizamos dos veces la transformada de Legendre volvemos a obtener la función original. En efecto, la segunda transformada sustituirá las variables  $p^j$  por

$$z_j = \frac{\partial G}{\partial p^j},$$

que considerando (12.4) son precisamente las  $s_j$ . Por otra parte denominando a la nueva transformada  $I$ , resulta

$$\begin{aligned} I(q_i, s_j) &= s_j p^j - G \\ &= s_j p^j - (p^j s_j - f) = f \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

## 12.3. Ecuaciones de Hamilton

Sea un sistema cuya configuración está descrita por  $n$  coordenadas generalizadas  $\{q_i\}$ , para  $i = 1, \dots, n$ , y con función Lagrangiana  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ . Definiremos la *función Hamiltoniana* como la transformada de Legendre de la Lagrangiana respecto de las velocidades generalizadas:

$$\boxed{H(q_i, p^i, t) \stackrel{\text{def}}{=} p^i \dot{q}_i - L} \quad (12.6)$$

siendo  $p^i \stackrel{\text{def}}{=} \partial L / \partial \dot{q}_i$  (magnitudes que definimos en (7.34) como momentos generalizados).

Como se precisó en el apartado anterior, la transformada  $H$  debe expresarse únicamente en función de las nuevas coordenadas  $(q_i, p^i, t)$ . Por tanto, la dependencia funcional de  $L$  se debe alterar al expresar (12.6), siendo necesario eliminar las variables  $\dot{q}_i$  en favor de las  $p^i$ .

La magnitud (es decir, el valor numérico) de la Hamiltoniana así definida coincide con la de la integral de la energía o integral de Jacobi que se vió en la dinámica de Lagrange (ecuación (7.43) en el apartado 7.2.5). Ésta se puede escribir como

$$h = p^i \dot{q}_i - L \quad (12.7)$$

Sin embargo, la diferencia entre (12.6) y (12.7) estriba en la dependencia funcional distinta de la Hamiltoniana. En (12.6)  $H$  está expresado en función de las variables  $(q_i, p^i, t)$  mientras que  $h$  en (7.43) ó (12.7) está en función de  $(q_i, \dot{q}_i, t)$ . Esto habrá de ser tenido en cuenta para las expresiones que involucren derivadas parciales de  $H$ .

Recordando la observación realizada en el apartado 7.2.5, en el caso en que no tengamos sistemas de coordenadas ni enlaces móviles, la integral de Jacobi y por lo tanto la Hamiltoniana que tiene igual valor representa la energía total del sistema:

$$H = T + V$$

Las derivadas parciales de  $H$  son, aplicando las propiedades de la transformación de Legendre (12.4) y (12.5),

$$\frac{\partial H}{\partial p^j} = \dot{q}_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (12.8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\dot{p}^i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (12.10)$$

En las expresiones (12.9) se han empleado las ecuaciones de Lagrange (7.13) para expresarlas en función de  $p^i$ . Los dos conjuntos (12.8) y (12.9), de  $n$  ecuaciones cada uno, son las denominadas *ecuaciones canónicas de Hamilton*, o simplemente *ecuaciones de Hamilton*.

El primer grupo de ecuaciones (12.8) se puede interpretar como la expresión del cambio de variables entre  $\dot{q}_j$  y  $p^j$ , despejando las  $\dot{q}_j$ . Esto siempre lo podremos hacer ya que el cambio de variables es regular, por ser la energía cinética  $T$  definida positiva. Empleando para ésta la expresión (7.29) en función de los coeficientes allí definidos:

$$p^j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[ \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + a_k \dot{q}_k + T_0 \right] = a_{kj} \dot{q}_k + a_j$$

siendo  $\det [a_{kl}] \neq 0$ .

El segundo conjunto de ecuaciones (12.9) se puede interpretar como las expresiones de la segunda ley de Newton, teniendo el término  $-\partial H/\partial q_i$  el

carácter de fuerzas totales (las reales más las ficticias debidas a la elección de coordenadas no cartesianas), igualadas a las derivadas de los momentos generalizados.

Por último, la ecuación (12.10) no constituye propiamente una de las ecuaciones de Hamilton, expresando simplemente que si  $L$  no depende explícitamente de  $t$ ,  $H$  tampoco lo hará.

Es necesario recalcar que en la formulación de la dinámica basada en las ecuaciones canónicas cambia el concepto de “configuración” del sistema dinámico, al modificarse (convencionalmente) el conjunto de coordenadas empleadas para su descripción. Así, en la dinámica basada en las ecuaciones de Lagrange la configuración venía dada por las coordenadas generalizadas  $\{q_i\}$ , siendo la trayectoria del sistema la curva paramétrica dada por su evolución en el tiempo,  $\{q_i(t)\}$ . En concreto para el caso de coordenadas vectoriales o cartesianas, la configuración coincidía con la posición del sistema, y las trayectorias con las curvas descritas por cada partícula en el espacio geométrico ordinario. En cambio, la dinámica Hamiltoniana basada en las ecuaciones canónicas, define la configuración de un sistema mediante las  $2n$  variables “fásicas”  $\{q_i, p^i\}$ . Las trayectorias, solución de las ecuaciones canónicas en función del tiempo, serán asimismo  $\{q_i(t), p^i(t)\}$ , y se pueden denominar *trayectorias fásicas* para diferenciarlas de la dinámica Lagrangiana. Esto constituye una generalización de lo ya mencionado en el apartado 3.6, en donde se estudió la trayectoria en el espacio de las fases (en aquel caso un plano al tratarse de sistemas con 1 grado de libertad) del oscilador armónico simple.

EJEMPLO 12.1: Veamos como ejercicio básico de aplicación inmediata de lo anterior la obtención de la Hamiltoniana y las ecuaciones canónicas correspondientes a una partícula libre, sometida a un potencial  $V(x, y, z)$ .

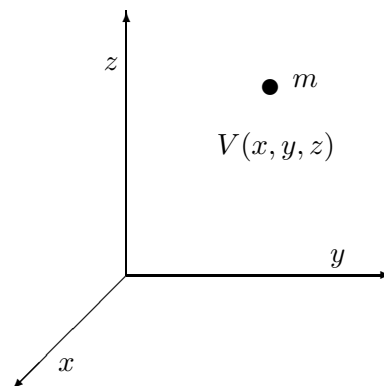


Figura 12.1: Obtención de las ecuaciones de Hamilton para una partícula libre sometida a un campo conservativo de fuerzas.

Emplearemos como coordenadas las cartesianas  $(x, y, z)$ . La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

y los momentos generalizados:

$$p^x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad p^y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}; \quad p^z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Expresando el cambio de variables, resulta el primer grupo de ecuaciones Canónicas:

$$\dot{x} = \frac{p^x}{m}; \quad \dot{y} = \frac{p^y}{m}; \quad \dot{z} = \frac{p^z}{m} \quad (12.11)$$

La Hamiltoniana es

$$\begin{aligned} H &= p^x\dot{x} + p^y\dot{y} + p^z\dot{z} - (T - V) \\ &= p^x\dot{x} + p^y\dot{y} + p^z\dot{z} - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) \end{aligned}$$

No basta con esta expresión, sino que es necesario eliminar de ella las velocidades  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , en función de los momentos generalizados. Resulta finalmente

$$H = \frac{1}{2m}[(p^x)^2 + (p^y)^2 + (p^z)^2] + V(x, y, z)$$

Una vez expresada  $H$  con su dependencia funcional correcta, derivamos para obtener el segundo grupo de ecuaciones canónicas (12.9):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\dot{p}^x; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\dot{p}^y; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\dot{p}^z \quad (12.12)$$

Como comprobación, derivando  $H$  respecto de los momentos generalizados se comprueba que las expresiones (12.11), que habíamos deducido como expresión del cambio de variables, coinciden precisamente con el primer grupo de ecuaciones canónicas (12.8).

## 12.4. Obtención práctica de las ecuaciones

El ejemplo anterior es extremadamente sencillo. Sin embargo en un caso general la eliminación de las velocidades generalizadas de la expresión de  $H$  puede resultar algo más engorrosa, al incluir expresiones de segundo grado en las velocidades (ver (7.33)):

$$\begin{aligned} H &= p^i\dot{q}_i - (T - V) \\ &= p^i\dot{q}_i - \left[ \frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + a_i\dot{q}_i + \frac{1}{2}a_0 \right] + V \end{aligned} \quad (12.13)$$

De aquí habría que eliminar  $\dot{q}_i$  mediante sus expresiones en función de  $p^i$ .

Vamos a obtener otra expresión equivalente más sencilla, que será lineal en las velocidades  $\dot{q}_i$ :

$$\begin{aligned} p^i \dot{q}_i &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = (a_{ik} \dot{q}_k + a_i) \dot{q}_i \\ &= a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + a_i \dot{q}_i = 2T - a_i \dot{q}_i - a_0 \end{aligned}$$

Despejando,

$$T = \frac{1}{2} p^i \dot{q}_i + \frac{1}{2} a_i \dot{q}_i + \frac{1}{2} a_0,$$

y sustituyendo en la expresión de  $H$  (12.13) obtenemos

$$\boxed{H = \frac{1}{2} p^i \dot{q}_i - \frac{1}{2} a_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} a_0 + V} \quad (12.14)$$

En el caso en que  $T$  sea homogénea cuadrática en  $\dot{q}_i$  (lo que en la práctica es bastante común) la expresión anterior se simplifica para dar

$$\boxed{H = \frac{1}{2} p^i \dot{q}_i + V} \quad (12.15)$$

Observamos que la eliminación de las velocidades  $\{\dot{q}_i\}$  resulta más fácil en las expresiones (12.14) ó (12.15) que en (12.13), ya que en esta última ecuación intervienen en expresiones cuadráticas, pudiendo ser el desarrollo bastante engorroso.

## 12.5. Integrales primeras

Si se expresa la derivada temporal (total) de  $H$  a partir de (12.6),

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p^i} \dot{p}^i + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \underbrace{-\dot{p}^i \dot{q}_i + \dot{q}_i \dot{p}^i}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

donde se han empleado las ecuaciones (12.8) y (12.9).

Por tanto la derivada total de  $H$  respecto al tiempo coincide con la parcial; dicho de otra manera, si  $t$  no entra explícitamente en la expresión de  $H$ , entonces  $H$  (y la energía total en los casos en que ambas coincidan) será constante. Este resultado constituye una integral primera, de obtención

inmediata en la dinámica Hamiltoniana. Independientemente de que se verifique o no la constancia de  $H$ , la Hamiltoniana  $H$  será igual a la energía total cuando la energía cinética  $T$  sea una expresión homogénea de grado 2 en las velocidades generalizadas.

En el caso en que la Hamiltoniana no dependa explícitamente de una coordenada generalizada, de las ecuaciones (12.9) se deduce inmediatamente que el momento generalizado correspondiente es constante:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}^i = 0; \quad p^i = \text{constante}$$

En este caso decimos que  $q_i$  es una *coordenada cíclica*. Puesto que no varían, los momentos generalizados correspondientes a las coordenadas cíclicas se pueden sustituir en la Hamiltoniana por constantes  $c^i$ , quedando  $H$  en función de  $2(n-r)$  grados de libertad, si  $r$  es el número de coordenadas cíclicas. Una vez resuelto el sistema así reducido, los valores de las coordenadas cíclicas se obtendrán de integrar las ecuaciones

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial c^i}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Este resultado nos indica que el tratamiento de las coordenadas cíclicas en la formulación Hamiltoniana es trivial: basta con ignorarlas (de aquí que se denomine también a las coordenadas cíclicas como coordenadas “ignorables”).

## 12.6. Generalización para fuerzas no conservativas

Si las fuerzas no provienen de un potencial, no cabe definir una función Lagrangiana y por tanto no se puede aplicar (12.6) para obtener  $H$ . Sin embargo en este caso podemos generalizar la definición de la función Hamiltoniana y de las ecuaciones canónicas, estableciendo

$$H \stackrel{\text{def}}{=} p^i \dot{q}_i - T$$

siendo  $p^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ .

Por las propiedades (12.4) y (12.5) de la transformada de Legendre, las derivadas de  $H$  son:

$$\frac{\partial H}{\partial p^i} = \dot{q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12.16)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial T}{\partial q_i} = -\dot{p}^i + Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12.17)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial T}{\partial t} \quad (12.18)$$



donde se han empleado las ecuaciones de Lagrange (7.12) para el segundo grupo de ecuaciones, poniéndolas en función de las fuerzas generalizadas  $Q_i$ .

También se podría generalizar para el caso en que algunas fuerzas provengan de un potencial y otras no. Estableceríamos para ello una Lagrangiana parcial, incluyendo únicamente las fuerzas que provengan de un potencial, realizando la transformada de Legendre sobre ella. El desarrollo sería similar al anterior, variando únicamente el significado de las fuerzas generalizadas  $Q_i$  en (12.17), que ahora corresponderían tan sólo a las fuerzas no conservativas.

Por último cabe también generalizar para el caso de enlaces anholónomos. Para ello a las fuerzas generalizadas en (12.17) sería preciso añadirles las provenientes de los enlaces:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}^i + Q_i + \lambda_j A_j^i$$

donde  $\lambda_j$  son los multiplicadores de Lagrange, y  $A_j^i$  los coeficientes de los enlaces para cada coordenada  $i$  (ver apartado 7.4.1).

## 12.7. El método de Routh

La formulación de la dinámica basada en las ecuaciones canónicas resulta especialmente sencilla para las coordenadas que son cíclicas. En efecto, las coordenadas en sí no aparecen en  $H$  ni en las ecuaciones, y los momentos correspondientes son constantes. Por tanto, las coordenadas cíclicas quedan totalmente “*eliminadas*” de la formulación, que en la práctica viene a tener 2 grados de libertad menos por cada coordenada cíclica. En cambio, en la formulación de Lagrange es preciso considerar las velocidades generalizadas correspondientes en la Lagrangiana  $L$  y en las ecuaciones, ya que las velocidades  $\dot{q}_i$  no tienen porqué ser constantes aunque las coordenadas sean cíclicas.

El método de Routh es un tratamiento mixto entre las formulaciones de Lagrange y Hamilton: Emplea las ecuaciones de Hamilton para las coordenadas cíclicas, y las ecuaciones de Lagrange para el resto. Supongamos un sistema con  $n$  g.d.l., de los cuales las  $r$  primeras coordenadas son cíclicas:

$$\{q_j\} \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, r & \text{(cíclicas)} \\ \frac{\partial L}{\partial q_j} \neq 0, & j = r + 1, r + 2, \dots, n & \text{(no cíclicas)} \end{cases}$$

Los momentos correspondientes a las coordenadas cíclicas serán constantes:

$$p^j = c^j, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

Realizamos la transformada de Legendre sólo respecto de las coordenadas cíclicas, definiendo así la denominada *función Routhiana*:

$$R = \sum_{j=1}^r c^j \dot{q}_j - L \quad (12.19)$$

(nótese que el sumatorio se realiza sólo para los  $r$  primeros índices).

La dependencia funcional de  $R$  es:

$$R(q_{r+1}, \dots, q_n; \dot{q}_{r+1}, \dots, \dot{q}_n; c^1, \dots, c^r; t)$$

Por las propiedades de la transformada (12.19), se cumple

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{para } i = r+1, \dots, n \quad (12.20)$$

Es decir que, para las coordenadas no cíclicas, las derivadas parciales de  $R$  son iguales que las de  $L$  con signo cambiado.

Sustituiremos ahora las derivadas parciales dadas por (12.20) en las ecuaciones de Lagrange (7.13),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0;$$

al cambiar todos los signos en los dos términos, se obtiene un conjunto de ecuaciones igual pero ahora en función de  $R$ :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0; \quad (i = r+1, \dots, n).} \quad (12.21)$$

Una vez integradas estas  $(n-r)$  ecuaciones para obtener  $R$  como función de las constantes  $c^j$  y de  $t$ , calcularemos el valor de las  $r$  coordenadas cíclicas a partir de:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial R}{\partial c^j}, \quad (j = 1, \dots, r)$$

## 12.8. El principio de Hamilton aplicado a la función hamiltoniana

Recordemos que las ecuaciones de la dinámica de Lagrange son consecuencia de un principio variacional, en concreto del principio de Hamilton, tal y como se vió en el apartado 7.6. Este principio es de una naturaleza más fundamental que las ecuaciones de Lagrange, de forma que se puede generalizar a otro tipo de sistemas dinámicos. Su expresión es también de índole más sencilla, al requerir simplemente la condición de extremo de un funcional,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0,$$

para variaciones arbitrarias del camino en el espacio de las configuraciones, es decir para  $\{\delta q_i\}$  arbitrarias.

Después de establecer las ecuaciones canónicas se nos plantea la cuestión de si será posible definir un principio variacional del cual se puedan deducir dichas ecuaciones, de la misma forma que sucedía con las ecuaciones de Lagrange. Un aspecto a considerar es que, puesto que ahora las variables independientes son las  $\{q_i, p^i\}$  que definen trayectorias en el espacio de las fases, lógicamente el principio debería contemplar variaciones de  $\{q_i\}$  y de  $\{p^i\}$  independientes.

Sea la función  $F$  definida por:

$$F(q_i, p^i, \dot{q}_i, \dot{p}^i, t) \stackrel{\text{def}}{=} p^k \dot{q}_k - H(q_i, p^i, t) \quad (12.22)$$

Es inmediato comprobar, a partir de la definición de  $H$  (12.6), que el valor de esta función  $F$  es precisamente la Lagrangiana,  $F = L$  (se trata de la transformación dual de Legendre, que como se vió en el apartado 12.2 coincide con la función original). Postulamos como principio variacional la condición de extremo de la integral de  $F$  entre dos instantes dados,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p^k \dot{q}_k - H) dt = 0 \quad (12.23)$$

para variaciones arbitrarias de las variables  $p^i$  y  $q_i$  respecto de la trayectoria física real, cumpliendo  $\delta q_i = 0$  en los extremos.

En efecto, las ecuaciones de Euler-Lagrange de este principio se obtienen de forma análoga a como se hizo en la ecuación (7.98) para el caso genérico del funcional de una sola función  $y(x)$ . En este caso, las funciones  $\{q_i(t), p^i(t)\}$  cumplen el papel de  $y(x)$  en aquella expresión;  $\{\dot{q}_i, \dot{p}^i\}$  son sus derivadas, y  $t$  representa la variable independiente ( $x$ ).

Al establecer variaciones  $\delta q_i$ ,  $\delta p^i$  independientes, las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad \Rightarrow \quad \dot{p}^k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (12.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{p}^i} \right) = \frac{\partial F}{\partial p^i} \quad \Rightarrow \quad 0 = \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p^k} \quad (12.25)$$

Estas coinciden precisamente con las ecuaciones canónicas (12.8) y (12.9).

Si se añade a la función  $F$  en (12.22) un término que sea derivada respecto del tiempo de una función cualquiera de coordenadas y tiempo,  $\frac{d}{dt}M(q_i, t)$ , el principio variacional no se ve alterado, ya que los funcionales diferirían tan sólo en una constante,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dM(\mathbf{q}, t)}{dt} dt = M(\mathbf{q}, t)|_{t_1}^{t_2} = M(\mathbf{q}_2, t_2) - M(\mathbf{q}_1, t_1),$$

por lo que la condición de extremo en (12.23) no se ve modificada.

## 12.9. Estructura de las ecuaciones canónicas

Introduciremos el concepto a partir de un sistema con 1 grado de libertad. Supongamos éste definido por una función hamiltoniana  $H(q, p, t)$ . Podemos definir

$$\{\mathbf{x}\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix}, \quad \text{o bien} \quad \{\mathbf{x}\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad \text{con } x_1 \equiv q, \quad x_2 \equiv p$$

así como

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right\} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{Bmatrix} \\ [\mathbf{J}] &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esta matriz  $[\mathbf{J}]$  es ortogonal y hemisimétrica, y verifica las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}]^{-1} &= [\mathbf{J}]^T = -[\mathbf{J}] \\ [\mathbf{J}]^2 &= -[\mathbf{1}] \end{aligned} \quad (12.26)$$

Empleando la matriz  $[\mathbf{J}]$  para expresar las ecuaciones canónicas:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q},$$

vemos que se pueden escribir matricialmente como

$$\left\{ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right\} = -[\mathbf{J}] \cdot \{\dot{\mathbf{x}}\}$$

o bien, aplicando las propiedades (12.26),

$$\boxed{\{\dot{\mathbf{x}}\} = [\mathbf{J}] \cdot \left\{ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right\}} \quad (12.27)$$

Generalizando para el caso de  $n$  grados de libertad, de igual manera podemos definir

$$\{\mathbf{x}\} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{c} cq_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{array} \right\}; \quad \left\{ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{c} \partial H / \partial q_i \\ \vdots \\ \partial H / \partial q_n \\ \partial H / \partial p^1 \\ \vdots \\ \partial H / \partial p^n \end{array} \right\}$$

$[\mathbf{J}]$  es ahora una matriz cuadrada  $2n \times 2n$ , formada por submatrices nulas e identidad de orden  $n \times n$ :

$$[\mathbf{J}] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} [\mathbf{0}]_{n \times n} & [\mathbf{1}]_{n \times n} \\ -[\mathbf{1}]_{n \times n} & [\mathbf{0}]_{n \times n} \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones canónicas son por tanto equivalentes a la expresión matricial compacta (12.27).

En ella, el vector  $\{\mathbf{x}\}$  contiene las  $2n$  variables independientes de la formulación Hamiltoniana, por lo que (12.27) define la dinámica. Esta ecuación define una estructura denominada *simpléctica* característica de los sistemas Hamiltonianos.

### 12.9.1. Transformaciones canónicas

La dinámica Hamiltoniana describe la evolución de los sistemas en el espacio de las fases (de  $2n$  dimensiones), con coordenadas  $\{q_i, p^j\}$ . Es posible

realizar cambios de coordenadas a otros sistemas en este espacio, aunque en un caso general no se puede garantizar que estos cambios mantengan la forma de las ecuaciones de Hamilton. A las transformaciones de coordenadas que conservan la estructura de las ecuaciones canónicas se les llama *Transformaciones Canónicas*.

Sea un nuevo conjunto de parámetros  $\{Q_i, P^i\}$ , relacionado con las variables  $\{q_j, p^j\}$  mediante las relaciones

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_j, p^j, t) \\ P^i &= P^i(q_j, p^j, t) \end{aligned}$$

Para que la transformación sea canónica ha de existir una nueva función  $K(Q_i, P^i, t)$  tal que

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial P^i} \\ \dot{P}^i &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{aligned}$$

A esta función  $K$ , que cumple el papel de Hamiltoniana transformada para las nuevas variables, se le denomina de forma algo coloquial “Kamiltoniana”.

Una forma de establecer estas transformaciones es a partir del principio variacional de Hamilton (12.23). Las “funciones  $F$ ” (12.22) en las coordenadas originales y en las nuevas deben ser equivalentes, por lo que a tenor de lo dicho en el apartado 12.8, diferirán en una derivada total respecto del tiempo:

$$p^j \dot{q}_j - H(q_j, p^j, t) = P^j \dot{Q}_j - K(Q_j, P^j, t) + \frac{dM}{dt} \quad (12.28)$$

La función  $M$  se denomina función generadora de las transformaciones canónicas. Existen 4 formas que puede tomar la función  $M$ , que determinan cuatro tipos de transformaciones canónicas correspondientes. Aunque no entraremos a detallar esta clasificación, propia de textos más especializados, a modo de ejemplo consideremos una forma de generación de transformaciones canónicas mediante una función  $M$  del tipo

$$M = \phi(q_j, Q_j, t) \quad (12.29)$$

así

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \phi}{\partial Q_j} \dot{Q}_j$$

Introduciendo esta derivada en (12.28), y puesto que  $q_j$  y  $Q_j$  son variables independientes, se obtienen las relaciones

$$p^j = \frac{\partial \phi}{\partial q_j}; \quad -P^j = \frac{\partial \phi}{\partial Q_j}; \quad K = H + \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (12.30)$$

Una función cualquiera  $\phi$  que cumpla estas condiciones nos permitirá generar transformaciones canónicas, en las que la “Kamiltoniana”  $K$  cumplirá las ecuaciones canónicas para las nuevas coordenadas.

Una aplicación de especial interés de las transformaciones canónicas sería para intentar convertir todas las coordenadas de un sistema en cíclicas, con lo que la resolución de las ecuaciones canónicas sería trivial como se ha visto. Esto pudiera parecer el hallazgo de la “piedra filosofal” de la dinámica, si no fuera porque obtener las transformaciones canónicas precisas no es en absoluto sencillo. En la práctica, el problema dinámico se convertiría en obtener las transformaciones canónicas precisas para convertir todas las coordenadas en cíclicas. En el apartado siguiente se detalla un ejemplo sencillo de este tipo de transformaciones.

## 12.10. Ejemplos

EJEMPLO 12.2: Obtención de las ecuaciones canónicas para el caso general del movimiento de una partícula de masa  $m$  en un campo central, definido por un potencial  $V(r)$ .

Sabemos que, al conservarse el momento cinético, el movimiento es plano, por lo que tomaremos las coordenadas polares  $(r, \varphi)$ :

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

La Lagrangiana es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r),$$

y los momentos generalizados:

$$p^r = m\dot{r}; \quad p^\varphi = mr^2\dot{\varphi}.$$

Comprobamos la condición (12.3) de regularidad del cambio de variables de  $\dot{q}_i$  a  $p^i$ :

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| = \left| \begin{array}{cc} m & 0 \\ 0 & mr^2 \end{array} \right| = m^2 r^2 \neq 0 \quad \text{para } r \neq 0$$

La Hamiltoniana la podemos obtener aplicando (12.15),

$$H(q_i, p^i) = \frac{(p^r)^2}{2m} + \frac{(p^\varphi)^2}{2mr^2} + V(r)$$

Siendo las ecuaciones canónicas:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p^r} = \frac{p^r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p^\varphi} = \frac{p^\varphi}{mr^2}$$

$$\dot{p}^r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{(p^\varphi)^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \dot{p}^\varphi = 0$$

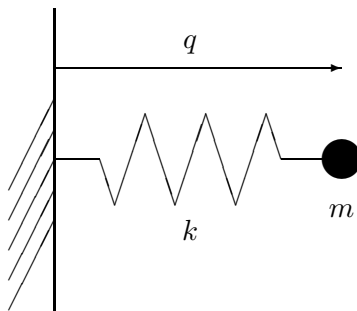
Comprobamos que  $\varphi$  es cíclica, por lo que  $p^\varphi = l$  (cte), siendo  $l$  el módulo del momento cinético.

También, al ser  $H$  independiente del tiempo

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = T + V = (\text{cte})$$

EJEMPLO 12.3: Sea un oscilador armónico simple, de masa  $m$  y constante lineal del resorte  $k$ . Denominamos  $q$  la elongación medida desde la posición de equilibrio, y  $p$  el momento generalizado correspondiente. Realizar una transformación canónica a coordenadas cíclicas  $(P, Q)$ .

Figura 12.2: *Oscilador armónico simple.*



La Hamiltoniana es

$$H = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (12.31)$$

donde  $p = m\dot{q}$  es el momento generalizado, y  $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k/m}$ .

Veamos una transformación canónica que convierta a la coordenada  $q$  en otra coordenada  $Q$  que es cíclica. Para ello consideramos la función generadora

$$\phi(q, Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q$$



que es del tipo (12.29) mencionado en el apartado 12.9. Aplicando las relaciones (12.30)

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial \phi}{\partial q} = m\omega q \cot Q \\ P &= -\frac{\partial \phi}{\partial Q} = \frac{1}{2} m\omega \frac{q^2}{\operatorname{sen}^2 Q} \\ K &= H \end{aligned}$$

eliminando  $p$  y  $q$  entre estas igualdades resulta

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \operatorname{sen} Q; \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \quad (12.32)$$

lo que sustituido en (12.31) arroja

$$K = H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = \omega P$$

Inmediatamente comprobamos que se verifica

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q \text{ cíclica}$$

Al tratarse de una coordenada cíclica, las ecuaciones canónicas resultan triviales de plantear y de integrar, en función de dos parámetros  $(\alpha, \beta)$  que se obtendrán con las condiciones iniciales.

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \alpha \quad (\text{cte}) \\ \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \quad \Rightarrow \quad Q = \omega t + \beta \end{aligned}$$

Una vez realizada esta integración, deshaciendo el cambio (12.32), se obtiene para  $q$

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \operatorname{sen}(\omega t + \beta)$$

que es la solución general, conocida ya, de oscilaciones armónicas en vibraciones libres, en función de dos constantes de integración  $\alpha$  y  $\beta$ , que se determinarán a partir de las ecuaciones iniciales.



# Capítulo 13

## Estática

### 13.1. Consideraciones generales

En los capítulos precedentes se ha estudiado la descripción del movimiento (cinemática), las magnitudes que caracterizan al mismo en sistemas materiales (cinética), y la evolución de estas magnitudes con el tiempo (dinámica).

En este capítulo se estudiará la estática o equilibrio de los sistemas, entendida como la ausencia de movimiento. Se trata por tanto de un caso particular de la dinámica, pero que por su importancia merece un tratamiento especial.

DEFINICIÓN:

*Se dice que un sistema material está en equilibrio cuando todas sus partículas se encuentran en reposo, y permanecen en el mismo estado de reposo.*

Para que se verifique el equilibrio y éste sea estable han de darse una serie de condiciones, cuyo análisis constituye el objeto de la estática. Ésta permitirá analizar diversos tipos de problemas:

1. Para un sistema sometido a un conjunto de fuerzas dadas, establecer la *existencia* de una o más posibles configuraciones de equilibrio y determinar éstas.
2. Analizar la *estabilidad* de las posiciones de equilibrio. El concepto de estabilidad consiste en garantizar si ante pequeñas perturbaciones respecto de la posición de equilibrio se mantiene el movimiento próximo

a dicha configuración, o si por el contrario se aleja indefinidamente de la misma.

3. Para un sistema en una configuración geométrica determinada, determinar las *acciones necesarias* (tanto en lo que respecta a fuerzas activas como a reacciones) para el equilibrio y su estabilidad.

Las aplicaciones prácticas de la estática en la ingeniería son muy numerosas, siendo quizá la parte de la mecánica más empleada. Esto es así especialmente en la ingeniería civil y en el análisis estructural: por lo general las estructuras se diseñan para estar y permanecer en reposo bajo las cargas de servicio estáticas, o para que su movimiento bajo cargas dinámicas sea pequeño y estable (vibraciones).

Los principios generales de la dinámica de sistemas, desarrollados en los capítulos anteriores permiten, mediante su particularización a las condiciones de la estática, establecer las condiciones generales del equilibrio. En concreto, para un sistema general de varias partículas (digamos  $N$ ), la aplicación del principio de la cantidad de movimiento a cada partícula (ecuación (6.3)), para las condiciones particulares del equilibrio ( $d\mathbf{v}_i/dt = \mathbf{0}$ ), da lugar a una condición necesaria:  $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Por otra parte, si el sistema parte de un estado inicial de reposo ( $\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}$ ) la condición anterior es también suficiente. Podemos adoptar por lo tanto con carácter general como condición de equilibrio (necesaria y suficiente) la anulación de la resultante de las fuerzas ejercidas sobre cada partícula:

$$\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}, \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \iff \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (13.1)$$

En los sistemas reales con infinitas partículas (p. ej., sólidos rígidos considerados como medios continuos) es preciso reducir las condiciones generales para el equilibrio expresadas arriba a un número menor de condiciones, de forma que sea abordable el problema mediante los métodos de la mecánica de sistemas discretos estudiados en este curso<sup>1</sup>. En cualquier caso, el estudio de las fuerzas será esencial para las condiciones de equilibrio.

Ya se estableció una clasificación somera de las fuerzas en un sistema en el apartado 6.1. Sin embargo, recordaremos aquí algunos conceptos que nos serán útiles para la estática. En primer lugar, es posible clasificar las fuerzas

<sup>1</sup>Se puede estudiar la estática (y también la dinámica) en medios continuos, mediante ecuaciones en derivadas parciales o formulaciones débiles equivalentes como el principio de los trabajos virtuales. Entre los procedimientos de resolución, el más potente en la actualidad es el Método de los Elementos Finitos (M.E.F.), especialmente adecuado para su tratamiento numérico en ordenadores.

en fuerzas *activas* o *directamente aplicadas*, y fuerzas *pasivas*, también llamadas *reacciones* o *fuerzas de ligadura*. Las primeras son las que tienen un valor conocido, variables con el tiempo o no (por ejemplo, cargas exteriores ejercidas sobre el sistema), o posiblemente en función de la configuración o estado del sistema (por ejemplo, fuerzas internas en muelles o amortiguadores). Por el contrario, se consideran reacciones las que sirven para imponer una determinada ligadura o apoyo, y cuyo valor debe calcularse imponiendo las ecuaciones de equilibrio compatibles con dicha ligadura (o de la dinámica si el problema no es estático).

Otra clasificación de las fuerzas a tener en cuenta es como *interiores* y *exteriores*. El primer caso engloba a todas las que provienen de partículas dentro del propio sistema, tanto por acciones de contacto, acciones a distancia (por ejemplo, atracción gravitatoria), o mediante elementos discretos como resortes o amortiguadores. En este caso tanto la acción como la reacción que postula la tercera ley de Newton se ejercen entre partículas del sistema. Por el contrario, se denomina fuerza exterior a la que proviene de puntos externos al sistema, y la reacción a la misma no se ejerce por tanto sobre el sistema. Tanto las fuerzas activas como las reacciones pueden ser a su vez interiores o exteriores, siendo ambas clasificaciones independientes. Así, las ligaduras pueden provenir de partículas del mismo sistema (por ejemplo, distancias constantes entre puntos de un sólido rígido) o de fuera del mismo (por ejemplo, apoyos o sustentaciones externas).

Otro elemento importante para el análisis del equilibrio son las *ligaduras* o *enlaces*. Ya se habló sobre ellas en el apartado 6.1, por lo que sólomente recordaremos aquí los aspectos fundamentales. Establecíamos allí la clasificación entre enlaces *holónomos*, funciones que imponían condiciones entre coordenadas y tiempo:

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0, \quad (13.2)$$

y enlaces *anholónomos*, funciones que adicionalmente dependían de las velocidades:

$$\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n, t) = 0 \quad (13.3)$$

Asimismo, en función de su variación temporal, los enlaces se denominan *reónomos* si dependen explícitamente del tiempo ( $\partial\phi/\partial t \neq 0$ ) o *esclerónomos* si no varían con el tiempo ( $\partial\phi/\partial t = 0$ ). Por último, denominamos *lisos* a los enlaces cuyas fuerzas de reacción no realizan trabajo para los movimientos permitidos por los mismos, mientras que serán *rugosos* en caso contrario. Para que tenga sentido esta última clasificación, es obvio que el enlace debe permitir algún movimiento, ya que en caso contrario no cabe hablar de trabajo. Para ilustrar esta última clasificación, considérese un apoyo

deslizante, que puede ser liso o con rozamiento entre las superficies; por el contrario, si el apoyo restringe todos los movimientos del punto en cuestión se convierte en un *empotramiento*, al cual no tiene sentido calificarlo como liso ni rugoso.

## 13.2. Condiciones analíticas del equilibrio

En el capítulo 7 se estudió la formulación analítica de la mecánica, en relación con la dinámica. Recordemos que la base de dicho planteamiento, debido originalmente al matemático francés Lagrange, es la descripción de la configuración del sistema mediante un conjunto reducido de *coordenadas generalizadas*, para las que empleamos la notación  $\{q_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), que sirven para definir de manera unívoca la configuración. Estas coordenadas pueden, en principio, representar magnitudes físicas diversas (longitudes, ángulos, distancias al cuadrado, ...), no estando restringidas a sistemas de coordenadas algebraicas ni a bases de espacios vectoriales.

La ventaja fundamental del uso de coordenadas generalizadas es que en su propia elección está incluida toda o a menos gran parte de la información de los enlaces. Cuando los enlaces son holónomos, de las ecuaciones (13.2) que los expresan podemos “eliminar” las coordenadas dependientes; de esta forma, restan al final únicamente las coordenadas independientes o *grados de libertad* del sistema. Si existen además enlaces anholónomos propiamente dichos (es decir, no integrables) no será posible eliminar las coordenadas redundantes y será preciso mantener sus ecuaciones de ligadura de manera explícita, para solucionarlas finalmente junto con las ecuaciones de la dinámica mediante multiplicadores de Lagrange (ver apartado 7.4).

En cualquier caso, el estudio de un sistema mediante coordenadas generalizadas permite un marco ventajoso para establecer las condiciones de equilibrio, ya que por lo general nos restringiremos al mínimo número de condiciones. Sean las coordenadas generalizadas libres o no, por lo general son un número mucho más reducido que el de las coordenadas cartesianas de todas las partículas del sistema; normalmente, serán además un conjunto discreto y finito de coordenadas, en lugar de un número infinito como por ejemplo el que corresponde a las partículas de un sólido considerado como un medio continuo.

Puesto que la relación entre las configuraciones o posiciones del sistema y las coordenadas generalizadas  $\mathbf{r}_i(q_j)$  ( $i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n$ ) es unívoca, es obvio que la definición de equilibrio (13.1) dada en el apartado anterior es equivalente a exigir que las coordenadas generalizadas sean constantes y

permanezcan constantes:

$$\boxed{\dot{q}_j = 0; \quad \ddot{q}_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n)} \quad (\text{condición de equilibrio}) \quad (13.4)$$

Para establecer la restricción que esta condición impone a las fuerzas, partimos de las ecuaciones de Lagrange (7.12):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (13.5)$$

donde  $Q_j$  son las fuerzas generalizadas (ecuación (7.7)) y  $T$  es la energía cinética. Esta última viene dada, en el caso en que los enlaces no dependan del tiempo, mediante (7.33)<sup>2</sup>:

$$T = \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

donde los coeficientes  $a_{kl}$  son simétricos, y pueden ser función a su vez de las coordenadas,  $a_{kl}(q_j)$ . Sustituyendo en las ecuaciones de Lagrange (13.5),

$$\frac{da_{kj}}{dt} \dot{q}_k + a_{kj} \ddot{q}_k - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_l = Q_j$$

y empleando la condición de equilibrio (13.4) se llega a la condición equivalente

$$\boxed{Q_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n)} \quad (13.6)$$

Es fácil ver también que, si  $Q_j = 0$  y se parte de condiciones iniciales de reposo ( $\dot{q}_j(0) = 0$ ), puesto que la matriz de coeficientes  $a_{kl}$  es regular, ha de ser  $\ddot{q}_j = 0$ . Por lo tanto, la anulación de las fuerzas generalizadas (13.6) es necesaria y suficiente para el equilibrio de un sistema, pudiendo considerarse como una condición equivalente a (13.4).

### 13.2.1. Unicidad del equilibrio; condición de Lipschitz

Acabamos de ver que si se anulan las fuerzas generalizadas ( $Q_j = 0$ ) existe solución estática o de equilibrio. Sin embargo, no queda demostrado desde el punto de vista matemático la unicidad de esta solución. Podría, en teoría, existir otra solución que fuese dinámica.

Desde un punto de vista físico determinista la falta de unicidad no tiene sentido, pues supondría que a partir de condiciones iniciales dadas es imposible predecir el estado o la evolución de un sistema. Esto de hecho ocurre

<sup>2</sup>al igual que en capítulos anteriores, adoptaremos aquí el convenio de sumatorio implícito para los índices repetidos

en la dinámica para el caso de los sistemas caóticos, en los que el desorden (“caos”) se debe en realidad a una gran sensibilidad frente a perturbaciones pequeñas, haciéndose en la práctica impredecible su evolución.

Veamos un sencillo ejemplo de sistema que posee solución no única, estática y dinámica:

$$m\ddot{x} = k \left| \sqrt{|x|} \right|, \quad \text{siendo } m, k > 0 \quad (13.7)$$

La solución estática es obviamente:

$$x = 0$$

Sin embargo, existe asimismo una solución dinámica dada por:

$$x = \frac{k^2}{144m^2} t^4$$

basta sustituir en (13.7) para comprobar que esta solución cumple efectivamente la ecuación.

Matemáticamente, la condición de unicidad se expresa por la *Condición de Lipschitz*:

*Se dice que una función  $Q(q_i, t)$ , definida en un Dominio  $\mathcal{D}$  cumple la condición de Lipschitz respecto de las variables  $\{q_i\}$  si se puede encontrar una constante  $k$  tal que  $\forall q_i \in \mathcal{D}$  y  $\forall \Delta q_i$ ,*

$$|Q(q_i + \Delta q_i, t) - Q(q_i, t)| \leq k \sum_i |\Delta q_i| \quad (13.8)$$

La constante  $k$  se denomina constante de Lipschitz.

Si el Dominio  $\mathcal{D}$  es convexo, un requisito suficiente para la condición de Lipschitz es que existan derivadas parciales  $\frac{\partial Q}{\partial q_i}$ , y que estén acotadas en  $\mathcal{D}$ .

La función (13.7) propuesta en el ejemplo anterior no podemos garantizar que cumple la condición de Lipschitz en  $x = 0$ , pues no existe allí su derivada. por tanto, no está garantizada la unicidad de la solución, que de hecho hemos visto no es única.

## 13.3. Estabilidad del equilibrio

### 13.3.1. Concepto de estabilidad

Una perturbación del equilibrio en que se alteren las coordenadas  $\{q_i\}$ , o bien se ponga en movimiento el sistema con velocidades iniciales  $\{\dot{q}_i \neq 0\}$ ,



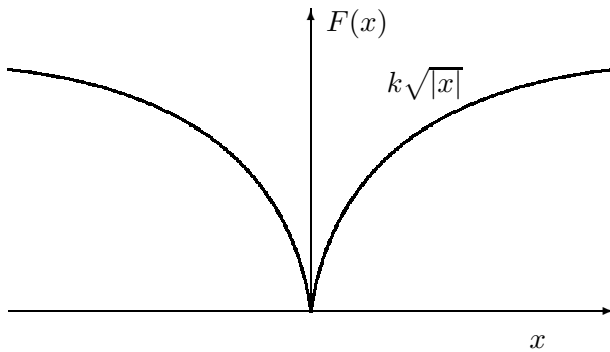


Figura 13.1: Sistema gobernado por la ecuación  $m\ddot{x} = k\sqrt{|x|}$ ; la solución estática en  $x = 0$  no es única, debido a la no derivabilidad de la función de fuerza en este punto.

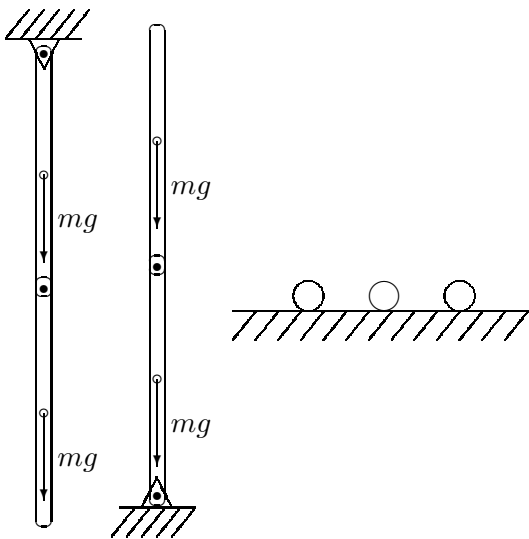


Figura 13.2: Ejemplos de equilibrio estable, inestable e indiferente.

dará lugar a una evolución dinámica del sistema, en la que obviamente la configuración varía respecto de la posición de equilibrio.

Se dice que el equilibrio es *estable* cuando la variación respecto de la posición de equilibrio está acotada, llegando a ser tan pequeña como queramos al hacer la perturbación suficientemente pequeña. En términos más precisos, y suponiendo que la posición de equilibrio corresponde a  $\{q_i = 0\}$ , diremos que el equilibrio es estable si para un valor  $\epsilon$  tan pequeño como se desee es posible encontrar un valor  $\delta$  de forma que:

$$\forall \epsilon, \exists \delta \text{ tal que } |q_{0i}| < \delta, \quad |\dot{q}_{0i}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |q_i| < \epsilon$$

En este caso lo que ocurre es que las fuerzas que se originan en esta perturbación tienden a devolver al sistema a su posición de equilibrio.

Por el contrario, se dice que el equilibrio es *inestable* cuando la confi-

guración del sistema no está acotada, aún para una perturbación pequeña, perdiéndose por tanto la posición de equilibrio. Las fuerzas tienden a separar el sistema de su posición de equilibrio.

Por último, cabe hablar también de equilibrio *indiferente*, referido a perturbaciones en que se alteran tan sólo las coordenadas, pero no las velocidades. En este caso las nuevas posiciones, cercanas a la posición original de equilibrio siguen siendo de equilibrio.

Restringiéndonos al caso en que las fuerzas provengan de un potencial  $V$  ( $Q_i = -\partial V/\partial q_i$ ), es inmediato observar que la condición de equilibrio (13.6) exige que éste adopte un valor estacionario en la posición de equilibrio:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_i=0} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (13.9)$$

El problema de la estabilidad del equilibrio es en realidad un problema de dinámica, como se ha observado arriba, puesto que una vez que se perturba la posición de equilibrio, aunque sea ligeramente, se pierden las condiciones estáticas (13.4).

### 13.3.2. Condiciones de estabilidad: teorema de Lejeune-Dirichlet

Supongamos un sistema en que las fuerzas provienen de un potencial  $V$ :  $Q_i = -\partial V/\partial q_i$ , y que además es autónomo:  $\partial V/\partial t = 0$ . Sabemos que en el equilibrio debe cumplirse  $\partial V/\partial q_i = 0$ , por lo cual  $V$  adopta un valor estacionario en dicho punto. La condición analítica para la estabilidad del equilibrio viene dada por el teorema de Lejeune-Dirichlet, que afirma:

*“Si el potencial  $V$  es mínimo en la posición de equilibrio, ésta es estable”*

Cuando el potencial toma un valor estacionario correspondiente a un máximo, por el contrario, el equilibrio es inestable. En el caso en que  $V$  sea estacionario pero no corresponda ni a un mínimo ni a un máximo, el carácter del equilibrio es en principio dudoso, pudiendo corresponder a situaciones de equilibrio indiferente o inestable.

Veamos en primer lugar una justificación del teorema mediante un razonamiento sencillo e intuitivo, basado en la conservación de la energía total,  $E = T + V$ . Dicha energía debe conservarse, al provenir las fuerzas de un potencial autónomo. Supongamos una perturbación del equilibrio, que esté asociada bien a un cambio de las coordenadas  $\{q_i\}$  o de las velocidades  $\{\dot{q}_i\}$ , o de ambas al tiempo. En cualquier caso, y asignando (sin pérdida de

generalidad) valor nulo al potencial en la posición de equilibrio, en ella la energía total es nula; la perturbación inicial del mismo está asociada a una energía pequeña  $\epsilon = \Delta E$  de forma que en la evolución posterior (dinámica) se cumple:

$$\epsilon = T + V$$

Si en la posición de equilibrio  $V|_0 = 0$  es un mínimo local, al separarse ligeramente del mismo será  $V > 0$ . Por otra parte la energía cinética también se anula en la posición de equilibrio y su carácter esencialmente positivo obliga igualmente a que sea  $T > 0$ . Al ser  $T + V = \epsilon$ , esto indica que ambos deben estar acotados:

$$T + V = \epsilon, \quad T > 0, V > 0 \quad \Rightarrow \quad T < \epsilon, V < \epsilon$$

La regularidad de  $V$  y  $T$  como funciones de las coordenadas y de las velocidades respectivamente hacen que esta condición sea equivalente a que las coordenadas y las velocidades se mantengan igualmente pequeñas, asegurando por tanto la estabilidad.

Por el contrario, si  $V$  está en un punto de máximo, al apartarse del equilibrio es  $V < 0$ , por lo cual la energía cinética  $T$  debe crecer para mantener la suma igual a  $\epsilon$ , apartándose el sistema cada vez más de la posición de equilibrio, con lo que éste será inestable.

Es posible realizar una discusión algo más precisa de la estabilidad basándose en el desarrollo en serie de  $V$  (11.12):

$$V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{0}) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_i} \Big|_0}_{=0} q_i + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_0}_{\stackrel{\text{def}}{=} k_{ij}} q_i q_j + \dots \quad (13.10)$$

Al linealizar el sistema despreciando en el desarrollo anterior los términos de orden superior al segundo, tal como se vió en el capítulo 11 al estudiar las pequeñas oscilaciones, el movimiento en general se puede describir como combinación lineal de exponenciales del tipo (11.22):

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_k C_k \{\mathbf{a}_k\} e^{i\sqrt{\lambda_k} t} \quad (13.11)$$

estando los autovalores  $\lambda_k$  definidos por la expresión (11.29):

$$\lambda_k = \frac{\{\mathbf{a}_k\}^T [\mathbf{K}] \{\mathbf{a}_k\}}{\{\mathbf{a}_k\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{a}_k\}} \quad (13.12)$$

donde el denominador debe ser positivo al corresponder la matriz  $[\mathbf{M}]$  a la forma cuadrática de la energía cinética  $T$  (definida positiva). Si el numerador es positivo, por la definición de  $[\mathbf{K}] = [k_{ij}]$  en (13.10), quiere decir que se trata de un mínimo del potencial. Esta situación corresponde a  $\lambda_k > 0$  y por tanto  $\omega_k = \sqrt{\lambda_k} \in R$ , por lo cual las soluciones dinámicas del movimiento son pequeñas oscilaciones armónicas, acotadas, del tipo (11.24):

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_k B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos(\omega_k t - \delta_k)$$

Por el contrario, si el numerador en (13.12) fuese negativo, correspondiendo a un máximo de  $V$ , sería  $\lambda_k < 0$ , y sus raíces serían imaginarias,  $\pm\sqrt{\lambda_k} = \pm i s_k$ . Los sumandos correspondientes en la solución (13.11) serán

$$C_1 \{\mathbf{a}_k\} e^{s_k t} + C_2 \{\mathbf{a}_k\} e^{-s_k t}.$$

Este término no está acotado al incluir una exponencial creciente, lo que equivale a equilibrio inestable.

Puede teóricamente darse el caso de que  $V$  sea mínimo pero que el numerador en (13.12) sea nulo, siendo entonces los términos pares de orden superior al segundo en (13.10) los encargados de hacer cumplir la condición de mínimo,  $\Delta V > 0$ . La matriz  $[k_{ij}]$  sería entonces semidefinida positiva, siendo preciso para evaluar la estabilidad un estudio más detallado de los términos de orden superior.

El hecho de que el potencial sea mínimo corresponde a que las fuerzas que se generan en el sistema al perturbar la posición de equilibrio,

$$Q_i \simeq \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} q_j,$$

que son fuerzas pequeñas (del orden de  $q_j$ ), tiendan a recuperar la posición de equilibrio. Si existen además fuerzas de tipo viscoso (proporcionales a las velocidades  $\dot{q}_j$ ) éstas no alteran la naturaleza del equilibrio puesto que son infinitésimas para alteraciones de las posiciones próximas al equilibrio. En efecto, producida una perturbación en coordenadas, estas fuerzas de tipo viscoso no tenderían ni a devolver ni a apartar al sistema de la posición de equilibrio si las velocidades son cero, o prácticamente cero.

Por el contrario, hay resistencias pasivas como el rozamiento que toman un valor finito ante cualquier intento de desplazamiento, en el sentido de impedir el mismo. En este caso sí pueden resultar estabilizadoras del equilibrio, creando lo que se puede llamar “zonas” de equilibrio estable (el equilibrio

estable se produce no sólo en el punto de mínimo potencial  $V$ , sino en un dominio finito en que las fuerzas de rozamiento garantizan la estabilidad).

Una consecuencia práctica inmediata del teorema de Lejeune-Dirichlet es el teorema de Torricelli, para sistemas sujetos al campo gravitatorio simplificado. Este afirma que

*Para un un sistema sometido a un campo gravitatorio uniforme, las posiciones de equilibrio estable son las que corresponden a los mínimos de la altura (coordenada vertical) del centro de masas.*

En efecto, el potencial del sistema es

$$V = \sum_i m_i g z_i = M g z_G$$

por lo cual, el mínimo de  $z_G$  coincide con el mínimo de  $V$ , lo que garantiza la estabilidad.

## 13.4. Equilibrio de una partícula

### 13.4.1. Partícula libre

Para fijar ideas desarrollaremos en la práctica los conceptos de equilibrio expuestos arriba, comenzando por el sistema más simple, una partícula o punto material libre. Las coordenadas generalizadas pueden ser las tres coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , o bien las coordenadas en otro sistema como cilíndricas, esféricas, etc. (ver apartado 2.2).

La condición de equilibrio es

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{13.13}$$

donde  $\mathbf{F}$  es la resultante de todas las fuerzas ejercidas sobre la partícula. En general,  $\mathbf{F}$  será función de la posición de la partícula, lo cual nos permite plantear el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que define las posiciones de equilibrio.

Si  $\mathbf{F}$  (bien todas o algunas de sus componentes) depende a su vez del tiempo, es decir si se trata de un sistema no autónomo, para que haya equilibrio será necesario conseguir la anulación de  $\mathbf{F}(t)$  en todo momento.

Si las fuerzas provienen de un potencial  $V$ , la condición de equilibrio (13.13) equivale a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \tag{13.14}$$

es decir,  $V$  ha de tomar un valor estacionario. Para que este equilibrio sea estable, tal y como hemos visto con anterioridad, este punto debe constituir un mínimo de  $V$ , lo que queda garantizado si la matriz de derivadas segundas es definida positiva:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{pmatrix} > 0$$

Un resultado elemental de algebra matricial es que para que una matriz sea definida positiva todos sus menores principales han de ser positivos, lo cual en nuestro caso se traduce en tres inecuaciones, al ser la matriz de orden tres.

Conviene observar que, en el caso de emplear coordenadas curvilíneas y que estas no sean regulares en todo el dominio, en los puntos de singularidad no será posible aplicar el criterio anterior. Esto ocurre, por ejemplo, en coordenadas esféricas para los puntos de latitud  $\lambda = \pm\pi/2$ . En estos puntos es necesario realizar un cambio a otras coordenadas regulares para estudiar el equilibrio.

Por último, este caso sencillo permite hacerse una idea intuitiva de la naturaleza de las fuerzas estabilizadoras para una posición de equilibrio estable. En efecto, éstas quedan definidas por el gradiente de  $V$  con signo cambiado,

$$\mathbf{F} = -\frac{dV}{d\mathbf{r}} = -\mathbf{grad} V$$

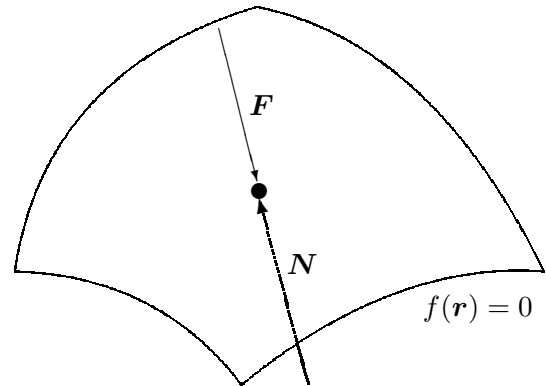
vector que va dirigido hacia los puntos de mínimo valor de  $V$ , es decir en dirección contraria a los puntos de máximo  $V$ . Por tanto, en el primer caso las fuerzas tienden a recuperar la posición de equilibrio, mientras que en el segundo alejan a la partícula de esta posición.

### 13.4.2. Partícula ligada a una superficie

Consideramos la superficie definida por la expresión analítica

$$f(\mathbf{r}) = 0 \tag{13.15}$$

Figura 13.3: *Partícula ligada a una superficie*



Supondremos una partícula ligada de forma bilateral a la superficie mediante un enlace liso, por lo que la reacción sobre la partícula será normal a la superficie:

$$\mathbf{N} = \lambda \mathbf{grad} f \quad (13.16)$$

La condición de equilibrio requiere la anulación de la resultante de sumar fuerzas aplicadas ( $\mathbf{F}$ ) y reacción ( $\mathbf{N}$ ):

$$\mathbf{F} + \lambda \mathbf{grad} f = \mathbf{0} \quad (13.17)$$

Las cuatro incógnitas (coordenadas  $(x, y, z)$  de la partícula y multiplicador  $\lambda$ ) se resuelven mediante las cuatro ecuaciones escalares que se deducen de (13.15) y (13.17).

En el caso en que la ligadura no sea bilateral, pudiendo la partícula abandonar la superficie por una de sus caras, la reacción (13.16) no puede tomar un valor cualquiera, sino que se verá limitado a  $\lambda \geq 0$  ó  $\lambda \leq 0$  según la cara libre. El método a seguir en este caso es solucionar el problema igual que si la ligadura fuera bilateral, para comprobar después el signo de  $\lambda$ . Si éste es el adecuado, se da por válida la solución; si no, la partícula habría abandonado la superficie y se rehace el cálculo considerándola libre a partir de ese instante.

Por lo general, en lugar de resolver directamente para las cuatro variables  $(x, y, z, \lambda)$ , es preferible un planteamiento más sencillo empleando la definición paramétrica de la superficie, en función de dos parámetros  $u$  y  $v$ . Notemos que la ecuación (13.16) expresa simplemente que la fuerza aplicada  $\mathbf{F}$  ha de ser normal a la superficie, lo que equivale a que sea normal a dos vectores tangentes a la misma,  $\partial \mathbf{r} / \partial u$  y  $\partial \mathbf{r} / \partial v$ :

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 0, \quad \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0 \quad (13.18)$$

estas dos ecuaciones, en función de las variables  $u$  y  $v$ , definen las posiciones de equilibrio sobre la superficie. En el caso particular en que  $\mathbf{F}$  provenga de un potencial, (13.18) equivale a:

$$-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V(u, v)}{\partial u} = 0,$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V(u, v)}{\partial v} = 0;$$

es decir, equivale a que el potencial  $V(u, v)$  expresado como función de las coordenadas  $(u, v)$  de la superficie, sea estacionario. De hecho, podríamos haber considerado desde un principio  $(u, v)$  como las dos coordenadas generalizadas del sistema, lo que nos habría conducido directamente al resultado anterior.

La estabilidad del equilibrio se estudiará mediante la matriz de derivadas segundas de  $(u, v)$ ,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \end{pmatrix},$$

analizando si es definida positiva. Volvemos a hacer la observación, aquí más pertinente si cabe, de la comprobación de la regularidad de las coordenadas. En una superficie por lo general las coordenadas serán curvilíneas y es bastante común que existan puntos en los que el mapa paramétrico no sea regular.

Por último queda por estudiar el caso de que la superficie no sea lisa, existiendo una componente tangencial de la reacción debida al rozamiento. Dejaremos esto para más adelante, en el apartado 13.7 en que se tratarán las resistencias pasivas debidas al rozamiento.

### 13.4.3. Partícula ligada a una curva

Consideramos la curva  $\Gamma$  definida por las ecuaciones

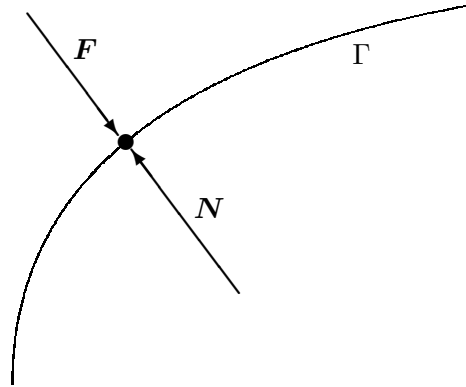
$$f(\mathbf{r}) = 0; \quad g(\mathbf{r}) = 0. \quad (13.19)$$

Supongamos una partícula ligada a  $\Gamma$  mediante una ligadura bilateral y lisa, por lo que la reacción normal de  $\Gamma$  sobre la partícula será normal a la curva. Esta normal, como sabemos, no es única, expresándose en general como combinación lineal:

$$\mathbf{N} = \lambda \mathbf{grad} f + \mu \mathbf{grad} g$$



Figura 13.4: *Partícula ligada a una curva  $\Gamma$  lisa: para el equilibrio la fuerza aplicada  $\mathbf{F}$  debe anular la reacción normal  $\mathbf{N}$ .*



para  $\lambda$  y  $\mu$  arbitrarias. Si además actúa sobre la partícula una fuerza aplicada  $\mathbf{F}$ , el equilibrio requiere  $\mathbf{F} + \mathbf{N} = \mathbf{0}$ , es decir

$$\mathbf{F} + \lambda \mathbf{grad} f + \mu \mathbf{grad} g = \mathbf{0} \quad (13.20)$$

El problema queda planteado pues con 5 ecuaciones escalares (13.19) y (13.20) para las 5 incógnitas  $(x, y, z, \lambda, \mu)$ .

En la práctica, el planteamiento expuesto arriba puede resultar demasiado engorroso, pudiendo ser preferible el empleo de la descripción paramétrica de la curva, en función de un parámetro  $u$ :

$$\Gamma : u \mapsto \mathbf{r}(u)$$

La expresión de equilibrio (13.20) establece simplemente que  $\mathbf{F}$  sea normal a la curva, cuya dirección en un punto viene definida por su tangente  $d\mathbf{r}/du$ . Por tanto, equivale a

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du} = 0 \quad (13.21)$$

resultando una única ecuación en función del parámetro  $u$ , que define el o los puntos de equilibrio.

En este caso, aunque  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  no se haya obtenido a partir de un potencial, admitiendo que sea una función continua, siempre será posible obtener una determinada función potencial definida sobre la curva,

$$V_1(u) = - \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

de forma que el equilibrio corresponde a los puntos en los que  $V_1(u)$  es estacionario. En efecto, para un elemento  $d\mathbf{r}$  sobre  $\Gamma$ ,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du} du$$

por lo que la derivada de  $V_1$  coincide con (13.21):

$$\frac{dV_1(u)}{du} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du} = 0$$

Si  $\mathbf{F}$  se obtuvo a partir de un potencial general en el espacio  $V(\mathbf{r})$ , lógicamente el potencial sobre la curva coincidirá con aquél:

$$V_1(u) = - \int -\mathbf{grad} V \cdot d\mathbf{r} = \int dV = V(\mathbf{r}(u))$$

La estabilidad del equilibrio corresponderá lógicamente a los mínimos de la función potencial,

$$\frac{d^2V_1}{du^2} > 0.$$

Por último, en los casos en que la ligadura no sea lisa y puedan existir fuerzas de reacción tangentes a la curva, habrá que proyectar las fuerzas aplicadas según la tangente para establecer la inecuación de rozamiento. Volveremos a este aspecto en el apartado 13.7 en que se trata del rozamiento.

## 13.5. Equilibrio de un sistema de partículas

### 13.5.1. Ecuaciones cardinales de la estática

En el caso de un sistema de  $N$  partículas, el equilibrio del mismo equivale al de cada una de sus partículas:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (13.22)$$

donde  $\mathbf{F}_i$  es la fuerza total sobre cada partícula  $i$ , resultante de fuerzas exteriores e interiores:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{F}_i^{int}$$

La aplicación de las condiciones de equilibrio (13.22) puede resultar muy trabajosa, al tenerse que realizar para cada una de las  $N$  partículas. En el caso de medios continuos, rígidos o no, constituidos por infinitas partículas, es prácticamente imposible. Por lo tanto es necesario obtener ecuaciones y condiciones de tipo global que caractericen el equilibrio de un sistema en su conjunto. Además, las ecuaciones (13.22) tienen el inconveniente de que intervienen tanto las fuerzas activas como las reacciones, a menudo desconocidas a priori.

El estudio del equilibrio se puede hacer particularizando algunos de los principios generales de la dinámica de sistemas estudiados en el capítulo 6.

En primer lugar, al sumar (13.22) para todas las partículas del sistema, las fuerzas interiores se anulan dos a dos (apartado 6.2.1), por lo que se obtiene

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \quad (13.23)$$

tomando momentos de las fuerzas respecto de un punto cualquiera, sumando los mismos obtendremos otra ecuación análoga:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \quad (13.24)$$

Al igual que en el apartado 6.2.2 hemos considerado que las fuerzas internas son centrales, por lo que sus momentos se anulan dos a dos.

Las ecuaciones (13.23) y (13.24), denominadas *ecuaciones cardinales de la estática*, constituyen un conjunto *necesario* de condiciones que han de cumplirse para que todo sistema esté en equilibrio. En el caso general de un sistema tridimensional serán 6 ecuaciones, mientras que para un sistema plano se tratará de 3 ecuaciones. Estas ecuaciones equivalen a establecer que el sistema de fuerzas, como sistema de vectores deslizantes, sea un sistema nulo (resultante y momento en un punto nulos). Por otra parte, estas ecuaciones pueden considerarse como un caso particular de las ecuaciones cardinales de la dinámica (8.7) ya estudiadas anteriormente.

Como se ha dicho, las ecuaciones cardinales constituyen condiciones necesarias pero *no siempre suficientes* para el equilibrio de un sistema. Dicho de otra manera, el que en un sistema actúe un conjunto de fuerzas de resultante y momento nulos no es garantía de que el sistema esté en equilibrio.

Como ejemplos ilustrativos de esta afirmación basta considerar sistemas en los que pueda haber movimiento relativo entre sus partes, como se muestra en la figura 13.5.

Un método general para establecer el equilibrio es subdividir el sistema global en subsistemas, de forma que al aplicar las ecuaciones (13.23) y (13.24) a cada subsistema resulten condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio del mismo. Adelantaremos que para el caso de los sólidos rígidos estas ecuaciones sí son suficientes para garantizar el equilibrio, lo que se demostrará en el apartado 13.6; por tanto buscaremos una subdivisión en subsistemas rígidos, sin movimiento relativo interno. Lógicamente, al partir un sistema en varios subsistemas las fuerzas ejercidas entre unos y otros, que antes eran internas y no aparecían en las ecuaciones, pasan a ser externas y aumentan por tanto el número de incógnitas. Sin embargo también

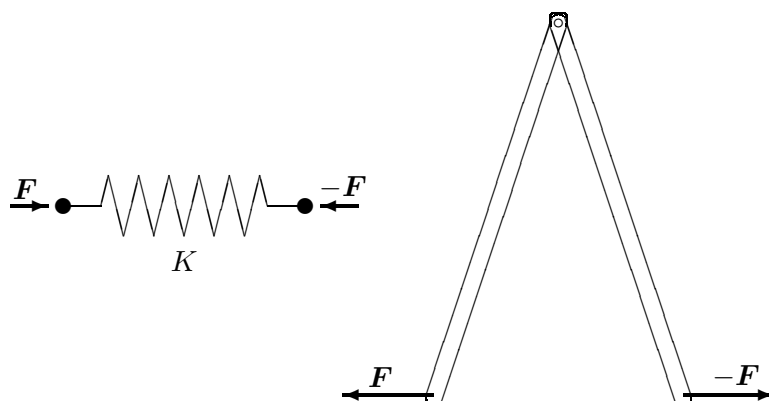


Figura 13.5: *Dos sistemas en los que las fuerzas actuantes tienen resultante y momento nulos, y sin embargo no están en equilibrio.*

aumenta el número de ecuaciones (6 por cada subsistema nuevo), de forma que se obtiene finalmente igual número de ecuaciones que de incógnitas.

### 13.5.2. Principio de los trabajos virtuales

Este principio fue enunciado en el apartado 6.4.1 como un principio básico de la mecánica, equivalente a las leyes o principios de Newton-Euler. Sus características esenciales que nos serán de utilidad son dos: por una parte, establece una *condición global* para el equilibrio de un sistema; por otra, *permite eliminar todas las fuerzas de reacción correspondientes a enlaces lisos*, reacciones que por lo general son desconocidas a priori.

Recordemos aquí simplemente el enunciado expuesto en 6.4.1. Se llaman desplazamientos virtuales  $\{\delta \mathbf{r}_i\}$  a cualquier conjunto de desplazamientos infinitésimos (tan pequeños como se desee) tomados en un instante dado. En general, no es necesario que los desplazamientos virtuales respeten los vínculos; sin embargo nos interesa restringir éstos a los denominados desplazamientos virtuales compatibles, que sí respetan los vínculos lisos.

Se considera un sistema sometido a fuerzas activas  $\{\mathbf{f}_i\}$  y reacciones de enlaces lisos  $\{\mathbf{R}_i\}$ . El trabajo virtual desarrollado por estas reacciones es nulo para  $\{\delta \mathbf{r}_i\}$  compatibles. Por tanto, la condición necesaria y suficiente para el equilibrio es que el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas sea nulo, para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los

enlaces:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ compatibles}$$

En el caso en que existan enlaces no lisos, el principio se aplica igualmente pero considerando las fuerzas de rozamiento (que sí realizan trabajo virtual) como fuerzas activas. lo mismo habremos de hacer si existe alguna reacción de un enlace, liso o no, cuyo valor deseemos calcular. Esto último será necesario realizarlo en cualquier caso si los enlaces son unilaterales, con objeto de comprobar a posteriori el signo de la reacción obtenida, para ver si es compatible con la inecuación del enlace.

Como ejemplo de aplicación, consideremos el sistema del muelle de la figura 13.5. Llamaremos  $x$  a la elongación del resorte medida desde la posición natural del mismo, y sea su constante  $K$ . Tomaremos el desplazamiento virtual  $\delta x$ , obteniendo el trabajo virtual como

$$\delta W = F\delta x - Kx \delta x = 0$$

donde  $Kx$  es la fuerza interna debida al resorte, que actúa en sentido contrario a  $x$ . Al ser  $\delta x$  arbitrario, se llega inmediatamente a la condición de equilibrio

$$F = Kx$$

Como segundo ejemplo consideremos la aplicación del principio para calcular el valor de una reacción de apoyo. Sea la viga biapoyada de la figura 13.6, de longitud total  $l$ , en la que se desea calcular el valor de la reacción vertical en  $A$ ,  $R_A$ .

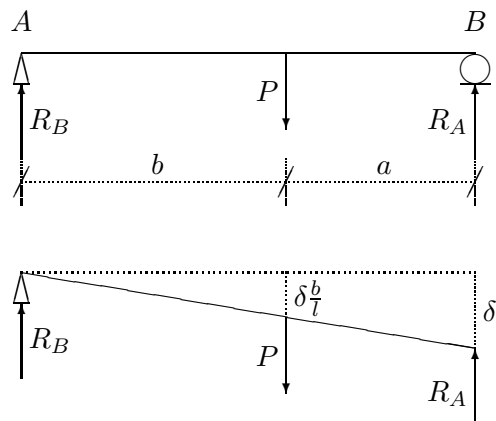


Figura 13.6: Para calcular la reacción en  $A$  “liberamos” la coacción correspondiente para calcular el trabajo virtual considerando  $R_A$  como fuerza activa

Para ello “liberamos” el apoyo en cuestión y lo sustituimos por una fuerza incógnita  $R_A$ . Los desplazamientos virtuales compatibles son los debidos al

giro respecto del apoyo  $B$ , que viene caracterizado por el descenso  $\delta$  en  $A$ . Expresando la nulidad del trabajo virtual:

$$\delta W = P \left( \frac{b}{l} \delta \right) - R_A(\delta) = 0$$

al ser  $\delta$  un valor arbitrario, se elimina para obtener

$$R_A = P \frac{b}{l}$$

Análogamente obtendríamos la reacción en el otro apoyo,  $R_B = P \frac{a}{l}$ .

## 13.6. Equilibrio del sólido rígido

### 13.6.1. Aplicación del principio de los trabajos virtuales

Es posible obtener las condiciones generales de equilibrio del sólido rígido en un caso general aplicando el Principio de los trabajos virtuales. Tomaremos para ello desplazamientos virtuales compatibles con la condición de indeformabilidad del sólido. Éstos han de cumplir una relación similar a la (4.10) que define el campo de velocidades del sólido:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_i$$

Las magnitudes  $\mathbf{v}_i$  pueden ser consideradas como “velocidades virtuales” compatibles. Análogamente, los desplazamientos virtuales compatibles son:

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}_O + \delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{r}_i$$

para valores arbitrarios pequeños de  $\delta \mathbf{r}_O$  y  $\delta \boldsymbol{\varphi}$ .

Expresamos ahora el trabajo virtual:

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_O + \sum_i (\delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{F}_i$$

denominando

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$$

$$\mathbf{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{\text{ext}},$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\delta W &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_O + \delta \varphi \cdot \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i \\ &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_O + \mathbf{M}_O \cdot \delta \varphi\end{aligned}$$

Puesto que  $\delta \mathbf{r}_O$  y  $\delta \varphi$  pueden tomar valores arbitrarios, se deduce inmediatamente que las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio son  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ , que coinciden precisamente con las ecuaciones cardinales de la estática, (13.23) y (13.24). Al contrario de la observación realizada entonces para un sistema general, en este caso particular (sólido rígido) hemos concluido, gracias al principio de los trabajos virtuales, que las ecuaciones no son sólo necesarias sino también suficientes. Resumiendo, podemos afirmar:

*En un sólido rígido la condición necesaria y suficiente para el equilibrio es que el Sistema de Vectores Deslizantes formado por las fuerzas externas sobre el sólido sea un sistema nulo:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

Podríamos haber alcanzado esta misma conclusión mediante la particularización de las ecuaciones de la dinámica del sólido, (9.1) y (9.2) ó (9.3), para las condiciones de la estática. En efecto, en el equilibrio es  $\mathbf{a}_G = \mathbf{0}$ , y  $\mathbf{H}_G = \mathbf{H}_O = \mathbf{0}$  (constantes), por lo que se deducen de las citadas ecuaciones  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$  como condiciones necesarias y suficientes.

Del resultado anterior se pueden deducir diversos corolarios de interés práctico:

**COROLARIO 1.-** Si sobre un sólido actúa un sistema de fuerzas, éste puede ser sustituido por otro sistema de vectores deslizantes equivalente (es decir, con igual resultante y momento en cualquier punto, lo que se denomina también *equipolente*), sin alterar las condiciones de equilibrio.

En efecto, la diferencia entre los dos sistemas sería un sistema nulo, que como hemos visto no altera el equilibrio.

**COROLARIO 2.-** Si sobre un sólido actúan dos fuerzas, estará en equilibrio si y sólo si ambas siguen la misma recta de acción, con el mismo módulo y sentidos opuestos.

En efecto, es la única forma de que las dos fuerzas constituyan un sistema nulo.

**COROLARIO 3.-** Si sobre un sólido actúan tres fuerzas, para que haya equilibrio éstas deben ser coplanarias y cortarse en un mismo punto.

La justificación es evidente, ya que de otra forma es imposible que el sistema resultante sea nulo.

En el caso en que el sólido tenga el movimiento restringido por enlaces o ligaduras, vale la pena distinguir varios casos:

**Sólido libre:** Los valores de los desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{r}_O$  y  $\delta \varphi$  son independientes; por tanto para el equilibrio han de ser nulas tanto la resultante como el momento de las fuerzas aplicadas

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

**Sólido con un punto fijo:** En este caso hay un punto  $O$  fijo por lo cual podemos tomar  $\delta \mathbf{r}_O = \mathbf{0}$ ; la nulidad del trabajo virtual no impone por tanto restricción alguna sobre  $\mathbf{F}$ , siendo la condición de equilibrio

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

**Sólido con eje fijo:** sea el eje fijo  $(O, \mathbf{e})$ ; los desplazamientos compatibles son por tanto  $\delta \mathbf{r}_O \parallel \mathbf{e}$ ,  $\delta \varphi \parallel \mathbf{e}$ , por lo que se obtienen las condiciones de equilibrio

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{e} = 0$$

es decir, las proyecciones de  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{M}$  sobre  $\mathbf{e}$  deben anularse para el equilibrio.

### 13.6.2. Sistemas isostáticos e hiperestáticos

En la estática el objetivo suele ser determinar en primer lugar las configuraciones o cargas exteriores para el equilibrio, para a continuación calcular las reacciones en los enlaces o apoyos.

Los casos particulares comentados en el apartado anterior corresponden a sustentaciones que dejan al sistema con algún grado de libertad. Al permitir el movimiento, se necesita para el equilibrio que una o más componentes de las fuerzas o momentos sea nulo.

Si se aumenta el número de coacciones del sólido, se llega a un punto en que no se permite ningún grado de libertad de movimiento: el sistema



estará entonces en equilibrio para cualquier conjunto de cargas exteriores (siempre que no se supere la resistencia de rotura de los enlaces). Es el caso, por ejemplo, de un sólido con un eje fijo por un cojinete cilíndrico, restringiendo además el movimiento de traslación en la dirección del eje y el de rotación alrededor del mismo. Las reacciones tendrían 6 componentes, que se determinarían mediante las 6 ecuaciones cardinales de la estática (13.23) y (13.24).

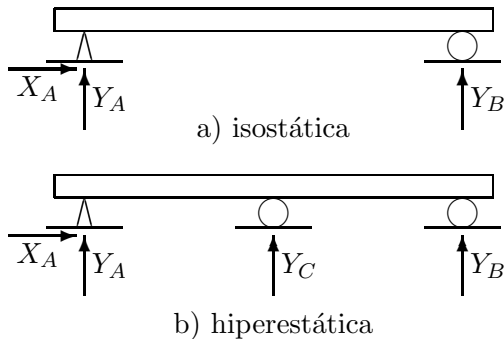


Figura 13.7: *Sustentaciones isostática e hiperestática de una viga: en el segundo caso las ecuaciones de la estática no son suficientes para calcular las reacciones en los apoyos; se dice que existen reacciones “redundantes”.*

Para fijar ideas consideremos un sistema plano, formado por una viga recta biapoyada, en el que uno de los apoyos es una articulación y el otro un apoyo simple que permite el desplazamiento horizontal (figura 13.7<sub>a</sub>)

En este caso las tres ecuaciones de la estática ( $M = 0$ ;  $F_x = 0$ ;  $F_y = 0$ ) permiten calcular las tres reacciones incógnitas,  $X_A$ ,  $Y_A$  e  $Y_B$ , para cualquier conjunto de cargas exteriores. Decimos que la sustentación es *isostática*, ya que el número de incógnitas a determinar, provenientes de las reacciones de enlace, es igual al número de ecuaciones de la estática.

Imaginemos ahora que a la misma viga se le coloca otro apoyo  $C$  intermedio, que restrinja tan sólo el movimiento vertical en ese punto. Para un conjunto dado de cargas exteriores tenemos ahora 4 reacciones incógnitas ( $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Y_B$ ,  $Y_C$ ) y tan sólo 3 ecuaciones de la estática. Se dice que el sistema es *estáticamente indeterminado o hiperestático*, debido a que posee apoyos redundantes, que “sobran” para garantizar el equilibrio.

Desde el punto de vista de la estática de sistemas rígidos no existe ningún truco ni procedimiento que permita resolver este problema. Está correctamente planteado, ocurriendo que *no tiene solución mediante el sólo empleo de las ecuaciones globales de equilibrio*. Es pues necesario obtener ecuaciones adicionales que proporcionen alguna relación más entre las incógnitas. Estas ecuaciones se obtienen a través de considerar la deformabilidad de la estructura (aplicando las técnicas que se estudian en la resistencia de materiales o en el cálculo de estructuras). A partir del estudio de la defor-

mabilidad de los sólidos y las estructuras, así como de las ecuaciones de comportamiento de las mismas que ligan las deformaciones internas con las tensiones, se obtienen las ecuaciones adicionales necesarias. El estudio de estos aspectos se halla fuera del alcance de este curso.

## 13.7. Reacciones en los enlaces

Los enlaces, ligaduras o apoyos son dispositivos que restringen de alguna manera los movimientos del sistema.

Ya se han discutido las características generales y la clasificación de los mismos en el apartado 6.1 y en este mismo capítulo, en el apartado 13.1. Vimos entonces que los enlaces de tipo bilateral se pueden definir mediante ecuaciones bien del tipo (13.2) si son holónomos, o bien del tipo (13.3) si son anholónomos.

Las restricciones al movimiento están asociadas a *fuerzas de reacción* o *reacciones* de los enlaces, que son las acciones necesarias para impedir o coaccionar los movimientos que los enlaces restringen. Estas fuerzas se denominan de reacción porque sólo se producen como reacción o respuesta a un intento de realizar el movimiento que el enlace prohíbe. Su valor por tanto no es conocido a priori, sino sólo como consecuencia de la solución de las ecuaciones del equilibrio (o de la dinámica en su caso). De ahí que nos interese en general un procedimiento de solución que, en primera instancia al menos, elimine de las ecuaciones las reacciones desconocidas en los enlaces. Ésta es una de las ventajas principales del principio de los trabajos virtuales, expuesto en el apartado 13.5.2.

El cálculo de las reacciones en los enlaces se realiza entonces en una segunda instancia, una vez que se conocen las posibles configuraciones de equilibrio. La obtención de las reacciones puede ser necesaria por diversos motivos: bien para realizar una comprobación de la resistencia de los propios dispositivos de apoyo o ligadura, bien para conocer los esfuerzos que se transmiten a otros sistemas colindantes, o bien para realizar un cálculo más detallado de los mecanismos de transmisión de los esfuerzos, como por ejemplo las roscas de los tornillos, o los cojinetes de los ejes.

En otros casos puede no ser conveniente o práctico plantear el problema mediante trabajos virtuales. Este es el caso, por ejemplo, de los enlaces rugosos que sí realizan trabajo virtual. Es preciso conocer la naturaleza de los esfuerzos que realizan para plantear las ecuaciones de la estática.

En lo que sigue hablaremos brevemente de ambos tipos de enlaces: en primer lugar las ligaduras lisas, y a continuación las que transmiten fuerzas

de contacto de rozamiento.

### 13.7.1. Enlaces lisos

**Apoyo simple.-** La reacción corresponde a la que se produce entre dos superficies tangentes que se tocan en un punto, permitiendo el deslizamiento relativo entre ambas.

Sabemos por lo estudiado en cinemática (apartado 4.5.3) que las velocidades de los puntos en contacto correspondientes a cada uno de los dos sólidos han de estar contenidas en el plano tangente común. Estas velocidades, correspondientes a partículas de cada sólido, no tienen porqué ser iguales; en el caso en que lo sean estaremos en condiciones de *rodadura*, y en caso contrario existirá *deslizamiento*.

En cualquier caso, si el enlace es liso, para que la reacción no realice trabajo ésta deberá ser normal a las superficies en contacto.

En general, este tipo de apoyo es compatible con una rotación relativa entre ambos sólidos, rotación que puede descomponerse tal como se discutió en el apartado 4.5.3 en *rodadura* y *pivotamiento*.

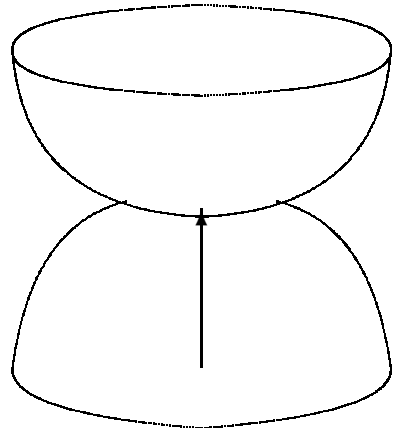
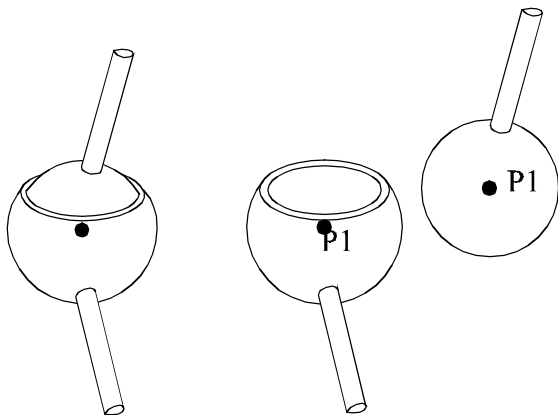


Figura 13.8: *Apoyo simple entre superficies lisas.*

**Rótula esférica.-** Esta unión entre dos sólidos puede considerarse, de manera idealizada, como una protuberancia esférica de uno de los sólidos que se inserta en una oquedad de la misma forma en el otro. Si ambas superficies son lisas, las fuerzas de contacto entre ambas serán radiales, siendo la resultante por tanto un vector que pasará por el centro de la esfera, en dirección arbitraria.

En definitiva, este enlace impone tres coacciones (las coordenadas

Figura 13.9: *Rótula esférica materializada como una esfera sólida incluida en una oquedad igualmente esférica.*



$(x, y, z)$  del centro de la esfera) y la reacción tiene consiguientemente tres incógnitas, las tres componentes del vector  $(R_x, R_y, R_z)$ .

**Articulación plana.-** Constituye el caso correspondiente a la rótula esférica para el movimiento plano. En él las coacciones son dos (coordenadas  $(x, y)$  del centro de la articulación), de igual manera que las componentes de la reacción  $(R_x, R_y)$ , que pasará por el centro de la articulación y tendrá una orientación arbitraria en el plano.

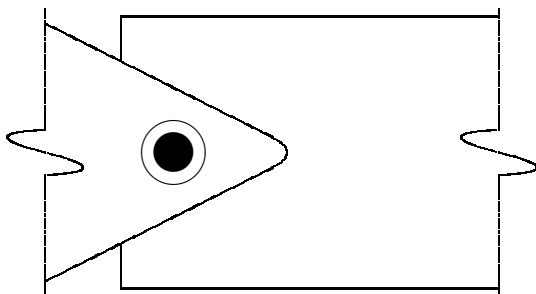


Figura 13.10: *Articulación plana*

**Arbol circular en cojinete cilíndrico.-** Se trata en este caso de una superficie cilíndrica circular que penetra en una oquedad igualmente cilíndrica. Al ser las fuerzas normales al cilindro, reduciendo éstas a un punto  $O$  de su eje, se obtiene una reacción de componentes  $(R_x, R_y)$  (siendo  $z$  la dirección del eje) y un momento de componentes  $(M_x, M_y)$ . Se considera que el cojinete cilíndrico permite el desplazamiento axial del eje (en dirección  $z$ ), así como la rotación del mismo, por lo que las únicas componentes nulas de la reacción son  $R_z$  y  $M_z$ .

Figura 13.11: *Enlace materializado mediante un árbol circular en un cojinete cilíndrico, pudiendo deslizar según la dirección del eje.*

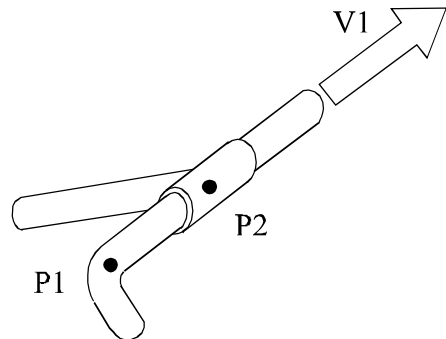
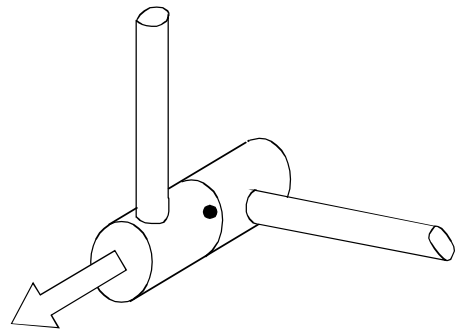


Figura 13.12: *Enlace formado por una junta de revolución que no permite deslizamiento en dirección axial.*



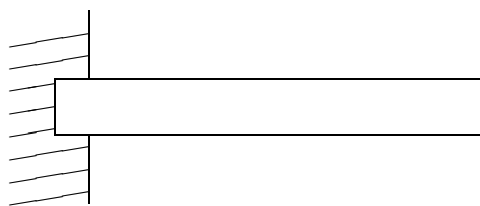
En algunos casos los cojinetes incorporan una coacción al movimiento axial, producida por un saliente o tornillo que se aloja en una garganta del eje. En este caso la reacción tendría también la componente  $R_z$ , siendo entonces equivalente a la articulación plana mencionada arriba. El movimiento permitido se reduce a la rotación alrededor del eje  $Oz$  fijo.

Otra variante es el caso en que el alojamiento circular sea muy estrecho en dirección axial, por lo que permitiría en la práctica los giros según las direcciones no axiales  $x$  e  $y$ . Por lo tanto, las componentes de la reacción serían únicamente  $R_x$  y  $R_y$ , normales al eje, sin momentos de ningún tipo. Este enlace equivaldría a una rótula esférica, en la que se permite además el deslizamiento según la dirección axial del eje cilíndrico.

**Empotramiento.-** Es el enlace más rígido, consistiendo en una soldadura o unión perfecta entre los sólidos. No admite movimientos relativos de traslación ni de rotación. entre los dos sólidos, por lo que las reacciones incógnitas son seis: las fuerzas ( $R_x, R_y, R_z$ ) y los momentos ( $M_x, M_y, M_z$ )

en el punto de empotramiento.

Figura 13.13: *Empotramiento: no admite desplazamiento ni giros relativos.*

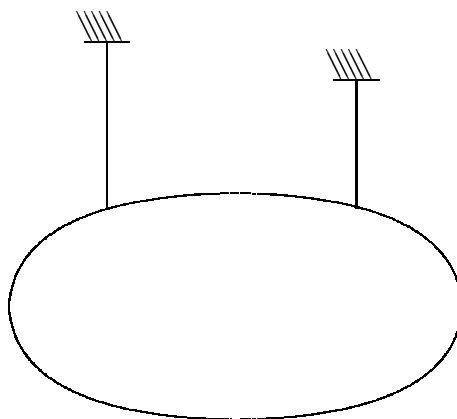


En el caso del movimiento plano lógicamente las reacciones quedan reducidas a tres,  $(R_x, R_y)$  para las fuerzas y  $M_z$  para el momento.

**Las cuerdas o hilos.-** Los hilos son capaces de transmitir esfuerzos tan sólo en su propia dirección y en el sentido de tracción, es decir, en el que tiende a estirar al hilo<sup>3</sup>.

Por tanto, la reacción tendrá una única componente ( $T$ ), denominada *tensión del hilo*. Al tratarse de un enlace de tipo unilateral, será preciso comprobar a posteriori el signo de la misma, comprobando que es de tracción ( $T > 0$ ). En caso que resultase de compresión ( $T < 0$ ) volveríamos a resolver el problema “eliminando” el hilo, ya que obviamente no podría actuar en el sentido de compresión.

Figura 13.14: *Enlace proveniente de un hilo.*



El método habitual para calcular a posteriori la tensión del hilo es “cortar” el hilo, sustituyéndolo por la acción de la tensión  $T$  en cada uno de los dos sólidos que une, en la dirección del mismo.

<sup>3</sup>Consideramos aquí tan sólo hilos sin peso ni cargas distribuidas que siempre adoptan bajo tensión una configuración recta, quedando los hilos curvos sometidos a cargas distribuidas para el capítulo 14.

En el contexto de la mecánica de sólidos rígidos y de sistemas discretos los hilos que se manejan son por lo general *inextensibles*. Los hilos reales tienen siempre una cierta elasticidad, pudiendo estirarse según la tensión aplicada, aunque en la práctica generalmente sea muy poco. En esta asignatura consideraremos que este estiramiento es despreciable, salvo que se diga expresamente lo contrario.

### 13.7.2. Enlaces con resistencias pasivas; rozamiento

#### Rozamiento entre superficies en contacto

En los enlaces reales, materializados mediante superficies sólidas en contacto, no se da nunca de manera exacta el comportamiento ideal descrito para los enlaces lisos. Los contactos reales no se producen entre superficies geométricas lisas, sino que existen rugosidades e imperfecciones en las mismas; por otra parte, al ser comprimidos, los sólidos se deforman, con lo que el contacto no es puntual. La lubricación de los contactos facilita el deslizamiento entre las superficies, al hacer que el contacto se realice no de manera directa sino a través de una película de lubricante interpuesta.

Estos fenómenos contribuyen a hacer que las acciones de contacto reales sean considerablemente más complejas que lo descrito en el apartado anterior, y que además en muchos casos sea necesario considerar reacciones de enlace en forma de resistencias pasivas que desarrollan un trabajo. La naturaleza de estas resistencias es tal que se oponen al deslizamiento relativo de los puntos en contacto, de forma que el trabajo realizado por ellas es siempre negativo, detrayéndose de la energía mecánica del sistema. De aquí el *carácter disipativo* de las mismas, que hace que la energía mecánica disminuya siempre, siguiendo la segunda ley de la termodinámica.

Para la resistencia al deslizamiento de dos superficies en contacto, el modelo más usual es el denominado *rozamiento de Coulomb*. Este modelo postula que si la fuerza normal que comprime a ambas superficies en contacto es  $N$ , el contacto es capaz de desarrollar una fuerza de rozamiento en dirección tangencial cuyo valor está limitado por la desigualdad

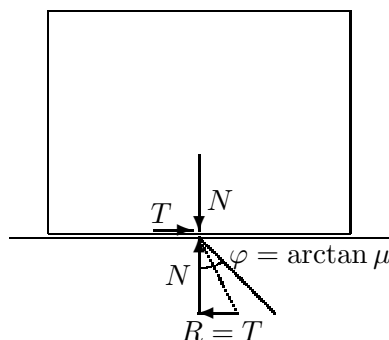
$$R \leq \mu N$$

donde  $\mu$  es el denominado *coeficiente de rozamiento* de Coulomb.

Debe precisarse que esta inecuación establece el valor máximo del rozamiento que puede movilizarse en el contacto. No debe cometerse el error de suponer que la fuerza de rozamiento toma siempre el valor  $\mu N$ ; éste corresponde únicamente al valor máximo que puede tomar.

En la práctica, el rozamiento se moviliza de forma gradual. Supongamos un contacto entre dos superficies en equilibrio bajo una fuerza normal a las mismas de valor  $N$ . Si la acción se va inclinando ligeramente, se moviliza simultáneamente el rozamiento necesario para equilibrar la componente tangencial de la acción ( $R < \mu N$ ). Llega un momento en que se alcanza el valor máximo del rozamiento ( $R = \mu N$ ) y el punto de contacto comienza a deslizar. Por tanto, el valor máximo  $\mu N$  sólo se alcanza cuando se está produciendo el deslizamiento o cuando el contacto está en el límite, a punto de deslizar.

Figura 13.15: *En el modelo de rozamiento de Coulomb la reacción tangencial ( $T$ ) que se moviliza es menor o igual como máximo a  $\mu$  por la reacción normal ( $N$ ), lo que permite definir el ángulo de rozamiento  $\varphi = \arctan \mu$ .*



El rozamiento de Coulomb tiene una interpretación geométrica sencilla, ya que el ángulo entre las componentes normal y tangencial de la reacción viene dado por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{N} \leq \mu$$

El deslizamiento se producirá por tanto si este ángulo supera el valor máximo definido por

$$\alpha \leq \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu,$$

es decir, la fuerza de reacción está contenida en un *cono de rozamiento* de semiángulo  $\varphi$  y vértice en el punto de contacto.

Por lo tanto la condición de equilibrio, en relación con las fuerzas aplicadas en uno de los sólidos, es que éstas se reduzcan a una resultante aplicada en el punto de contacto, cuyo ángulo con la normal sea menor o igual que el ángulo de rozamiento  $\varphi$ , es decir, que esté incluida dentro del cono de rozamiento.

La realidad es algo más compleja que lo expuesto arriba, ya que se comprueba generalmente que al comenzar el deslizamiento el rozamiento tangencial se reduce. Esto da lugar a dos coeficientes de rozamiento distintos: el coeficiente estático antes del deslizamiento ( $\mu$ ), válido hasta la situación



límite, y el coeficiente dinámico ( $\mu' < \mu$ ), una vez comenzado el deslizamiento. Asimismo, el coeficiente de rozamiento depende en la realidad de diversos factores más, como la lubricación, el estado de las superficies en contacto, e incluso de la presión entre ambas.

El rozamiento, como mecanismo elemental, es responsable de diversas manifestaciones de resistencias pasivas en mecanismos de enlace, como se describe a continuación.

**Resistencia al giro en el cojinete de una articulación.-** Sea una articulación formada por un cojinete que aloja a un eje cilíndrico de radio  $R$  (figura 13.16). Sobre el eje actúa una carga  $P$ , con una pequeña excentricidad de forma que tiende a hacer girar el eje en el sentido contrario a las agujas del reloj.

El rozamiento en el contacto eje-cojinete produce una fuerza de valor  $T \leq \mu P$ , y en el límite de deslizamiento  $T = \mu P$ . Para que el eje comience a girar alrededor de sí mismo, será necesario un momento que contrarreste el momento generado por esta fuerza de rozamiento, es decir  $M = \mu RP$ . Denominando

$$r \stackrel{\text{def}}{=} \mu R,$$

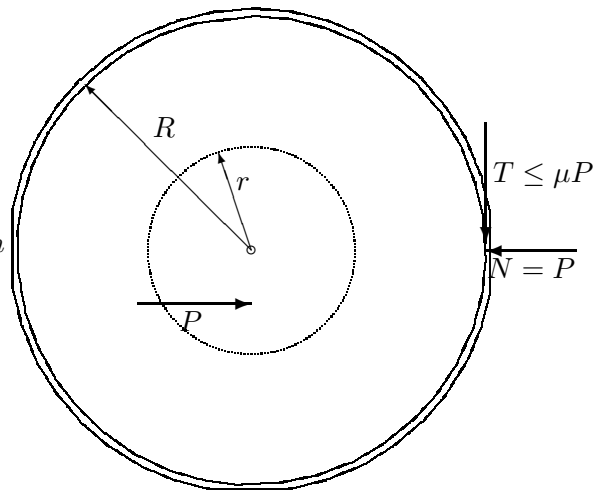


Figura 13.16: Resistencia al giro en cojinetes

se puede interpretar esta resistencia como el efecto de un momento resistente al giro, de valor

$$\boxed{M_r \leq rP} \Leftrightarrow \begin{cases} M_r < rP & \text{si no existe giro en el cojinete,} \\ M_r = rP & \text{si existe giro.} \end{cases}$$

Se puede interpretar que el valor del parámetro  $r$ , con dimensiones de longitud, define un *círculo de rozamiento*. Para que haya equilibrio la carga exterior  $\mathbf{P}$ , como vector deslizante resultante de las acciones, debe pasar por dentro del círculo de rozamiento; si su eje de acción no intersecta el círculo, se producirá giro en el cojinete.

El mecanismo de resistencia al giro en una rótula esférica es similar a éste, definiéndose un parámetro  $r$  que define una esfera de rozamiento de igual manera.

**Resistencia al pivotamiento.-** Esta resistencia se origina por el hecho de que el contacto entre dos superficies no es exactamente puntual, sino que por la deformación de las superficies, se produce contacto en una zona de extensión finita. El giro de pivotamiento desencadena un rozamiento, que produce un momento resistente alrededor del eje de pivotamiento. Este momento resistente se caracteriza por un parámetro  $\epsilon$  con dimensiones de longitud, de forma que

$$\boxed{M_p \leq N\epsilon} \Leftrightarrow \begin{cases} M_p < N\epsilon & \text{si no existe pivotamiento,} \\ M_p = N\epsilon & \text{si existe pivotamiento.} \end{cases}$$

**Resistencia a la rodadura.-** Se trata de otro mecanismo de resistencia pasiva muy común, aunque en este caso no está producido por el rozamiento entre superficies. Distinguiremos dos casos, según se trate de una rueda motriz o remolcada.

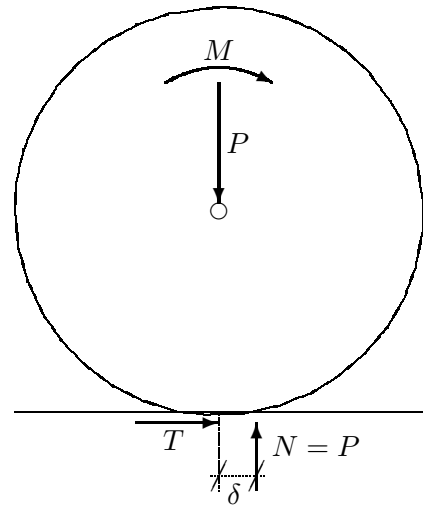
**Rueda motriz.-** Consideremos una rueda rodando sobre una superficie plana, sobre la que actúa una carga vertical  $P$  (figura 14.14). Se observa que la reacción  $N$ , considerada como vector deslizante, no está situada bajo el eje de la rueda, sino ligeramente adelantada. Esto se debe a que esta reacción es en realidad la resultante de las acciones de contacto en un área finita no puntual, que tiende a deformarse hacia delante por efecto de la rodadura.

Se puede definir por tanto un *coeficiente de resistencia a la rodadura*  $\delta$ , con dimensiones de longitud, de forma que el momento resistente vale

$$\boxed{M_r \leq N\delta} \Leftrightarrow \begin{cases} M_r < N\delta & \text{si no existe rodadura,} \\ M_r = N\delta & \text{si existe rodadura.} \end{cases}$$

Conviene recalcar que físicamente este efecto no está relacionado con el rozamiento sino con la deformación local del área de contacto. De hecho

Figura 13.17: Resistencia a la rodadura de una rueda Motriz, sobre la que actúa un momento  $M$  y una carga  $P$ .



en la rodadura se produce una fuerza de rozamiento ( $T$  en la figura 13.17) que, aunque pudiera resultar chocante a primera vista, lleva el sentido del movimiento de avance de la rueda. Esto es debido a que el movimiento relativo que tiende a producir el par  $M$  sobre el punto de la rueda en contacto tiene sentido opuesto al avance (es decir, hacia atrás). Por tanto el rozamiento “empuja” a la rueda en sentido opuesto, hacia delante. El valor de esta fuerza de rozamiento es

$$\boxed{T \leq \mu P} \Leftrightarrow \begin{cases} T < \mu P & \text{si no existe deslizamiento,} \\ T = \mu P & \text{si existe deslizamiento.} \end{cases}$$

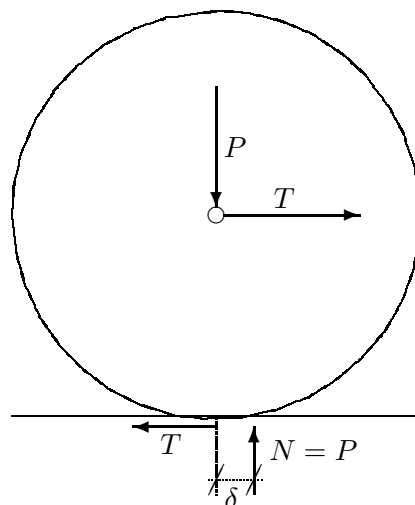
**Rueda remolcada.-** La situación cambia si se trata de una *rueda remolcada*, sobre la que actúa una carga  $P$  vertical y una tracción  $T$  en sentido del avance (figura 13.18).

En este caso la resistencia a la rodadura se produce de manera similar, manifestándose como un avance del eje de la resultante de las reacciones normales  $N$ , cuyo máximo valor es  $\delta$ . El momento resistente a la rodadura valdrá

$$M_r \leq N\delta$$

Sin embargo, la reacción tangencial llevará en este caso el sentido opuesto al avance. Esto se puede interpretar debido a que la tracción sobre el eje de la rueda tiende a producir un deslizamiento del punto de contacto en sentido del avance.

Figura 13.18: *Resistencia a la rodadura de una rueda remolcada, sobre la que actúa una tracción  $T$  y una carga  $P$ .*



Por último, observemos que en caso de duda respecto al sentido de la reacción tangencial en los casos de rodadura, conviene establecer las ecuaciones cardinales (13.23) y (13.24) de equilibrio (o de la dinámica en su caso), cuya solución proporcionará el valor adecuado para la reacción en cada caso (en sentido algebraico, es decir con signo  $+$  ó  $-$ ). A menudo es preferible esto ya que las apreciaciones intuitivas respecto a la “tendencia al deslizamiento” pueden prestarse a confusiones.

## 13.8. Sistemas de barras articuladas

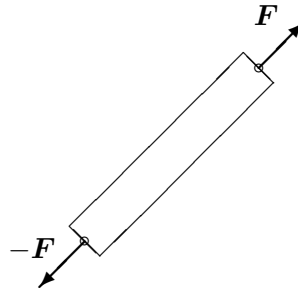
### 13.8.1. Clasificación

Un tipo de sistemas de particular interés en diversas ramas de la ingeniería, y en concreto en la ingeniería estructural, son los formados por barras articuladas, con cargas concentradas aplicadas en las articulaciones.

Un conjunto de barras unidas mediante articulaciones puede dar lugar a distintos tipos de sistemas, según el número de movimientos permitidos o de coacciones a los mismos.

En primer lugar, cada una de las barras debe estar en equilibrio. Al aplicar las ecuaciones cardinales (13.23) y (13.24) se concluye inmediatamente que los esfuerzos en los extremos de cada barra deben ser iguales y de signo contrario, dirigidos según la propia barra. Este esfuerzo se denomina *tensión* en la barra. En un sistema de barras existirá por tanto una incógnita por barra (su tensión) más 6 reacciones incógnitas provenientes de los apoyos (supuesta una sustentación isostática).

Figura 13.19: *Esfuerzos en una barra en equilibrio*



El número de ecuaciones de que se dispone para resolver estas incógnitas son las del equilibrio en cada articulación: es decir, 3 ecuaciones provenientes de anular la resultante de las fuerzas sobre la misma. No cabe hablar de momentos sobre la articulación ya que éstas se idealizan como puntos y no pueden transmitir momentos a las barras. Por lo tanto, en un caso general, suponiendo que el número de barras es  $b$  y el número de nudos  $n$ , se tienen  $3n$  ecuaciones para  $(6 + b)$  incógnitas. En el caso particular de sistemas planos, estas se reducirán a  $2n$  ecuaciones del equilibrio en cada nudo, para  $(3 + b)$  incógnitas.

Las posibles combinaciones, algunas de las cuales se ilustran en la figura 13.20 para un caso plano, son las siguientes:

Tipo de sistema	Sistema Plano (2D)	Sistema Espacial (3D)
<b>Mecanismo</b> (existen g.d.l. internos)	$2n > 3 + b$	$3n > 6 + b$
<b>Estructura isostática</b> (sin g.d.l. internos)	$2n = 3 + b$	$3n = 6 + b$
<b>Estructura hiperestática</b> (barras redundantes)	$2n < 3 + b$	$3n < 6 + b$

En el caso de los *mecanismos*, las coacciones de las barras rígidas y de las ecuaciones globales de equilibrio ( $3 + b$  ó  $6 + b$  según sea 2D ó 3D) no son suficientes para restringir el giro en todos los nudos, permitiendo entonces movimientos o grados de libertad internos. Los mecanismos se emplean en los casos en que se quiera transmitir movimientos de forma controlada y eficaz, como en las máquinas de diverso tipo. un ejemplo muy común es el mecanismo biela-cigüeñal de los motores de los automóviles. Sin embargo, en las estructuras con fines portantes de ingeniería civil, por lo general se busca que no se muevan internamente, por lo que procuraremos una coacción interna mayor.

Las *estructuras isostáticas* poseen el número adecuado de barras para que, junto con las ecuaciones del equilibrio global, coaccionen el movimiento de giro en todas las articulaciones ( $2n = 3 + b$  ó  $3n = 6 + b$  según que sea  $2D$  ó  $3D$ ). Se dice que estamos ante una *estructura*, porque ésta no posee grados de libertad internos. Además esta estructura es *isostática*, puesto que las ecuaciones de la estática bastan para obtener todas las tensiones en las barras incógnitas. Este tipo de sistemas sí son susceptibles de empleo en ingeniería civil con fines estructurales y resistentes.

Por último, las *estructuras hiperestáticas*, restringen también los giros y movimientos internos en los nudos, pero mediante un número de coacciones mayor que el estrictamente necesario. El número de barras es mayor que en el caso isostático, de forma que se verifica  $2n < 3 + b$  ó  $3n < 6 + b$  según estemos en  $2D$  ó  $3D$ . Las ecuaciones de la estática no son suficientes para obtener las tensiones en cada barra, habiendo de recurrirse a técnicas propias del cálculo de estructuras hiperestáticas<sup>4</sup>, en las que es preciso tener en cuenta la deformabilidad de cada barra y su relación con la tensión en la misma. Estos sistemas también son adecuados para fines estructurales.

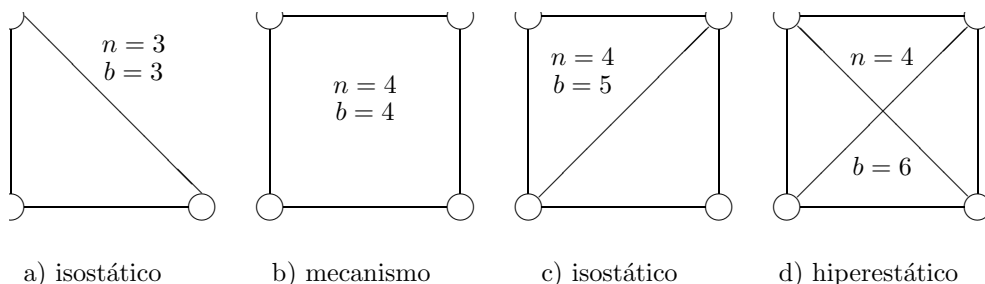


Figura 13.20: *Ejemplos de sistemas isostáticos, hiperestáticos y mecanismos*

Conviene resaltar que la clasificación realizada arriba entre mecanismos, estructuras isostáticas e hiperestáticas, se refiere exclusivamente a los grados de libertad internos o a las coacciones a los mismos. Hemos supuesto en toda la discusión que el número de reacciones provenientes de los apoyos externos del sistema eran 3 para el caso plano y 6 para el espacial, correspondientes a lo que se denominó, en el apartado 13.6.2, *sustentación isostática*. Cabe pensar sin embargo en una estructura internamente isostática, pero con una sustentación hiperestática, o incluso con una sustentación insuficiente que permita desplazamientos globales de la misma como sólido rígido. lo mismo

<sup>4</sup>Estas técnicas se estudian en las disciplinas de *resistencia de materiales* y *cálculo de estructuras*.

cabe decir de las estructuras hiperestáticas, que pueden tener sustentaciones isostáticas, hiperestáticas, o incluso insuficientes.

También es necesario precisar que pueden existir casos en los que no sea válido aplicar las fórmulas dadas arriba para clasificar como isostático o hiperestático el sistema en su conjunto, ya que este puede ser heterogéneo. En efecto, pudiera ocurrir que una parte del mismo tuviese el carácter de estructura (isostática o incluso hiperestática, con un número cualquiera de barras redundantes) mientras que otra parte estuviese insuficientemente coaccionada, constituyendo el conjunto un mecanismo. Por tanto, es necesario realizar un análisis cuidadoso de cada sistema concreto, diferenciando si es preciso las distintas partes, antes de aplicar las fórmulas de la tabla anterior.

Restringiéndonos a los casos de *estructuras isostáticas* sustentadas asimismo de manera isostática, explicaremos a continuación a grandes rasgos dos métodos generales de resolución para las mismas.

### 13.8.2. Método de los nudos

El método de los nudos se basa en realizar una separación de cada uno de los nudos de la estructura, estableciendo el equilibrio de fuerzas en él a partir de las tensiones de las barras, las posibles cargas aplicadas en el nudo, y las posibles reacciones caso de existir un apoyo en el nudo.

En primer lugar se determinan, mediante las ecuaciones cardinales de la estática (13.23) y (13.24), las reacciones de apoyo de la estructura para las cargas dadas, lo que siempre será posible si la sustentación es isostática como se ha supuesto. A continuación se escoge un nudo en que exista un número de barras (es decir, de incógnitas) suficientemente bajo para que se puedan determinar las tensiones en barras por las ecuaciones de equilibrio en el nudo: un nudo con 3 barras como máximo en  $3D$ , ó con 2 barras como máximo en  $2D$ . Al plantear el equilibrio del nudo ( $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ) podremos calcular las tensiones en barras unidas al nudo. Una vez resuelto este nudo se procede a otro nudo conexo con éste, en el cual una de las tensiones ya es conocida (la de la barra que une ambos). Solucionamos este nudo para el resto de las tensiones incógnitas de igual manera. El procedimiento se repite sucesivamente, escogiendo siempre nudos con un número de incógnitas suficientemente bajo, hasta resolver toda la estructura.

El método se ilustra mejor mediante un ejemplo, como el correspondiente a la cercha articulada de la figura 13.21. En este ejemplo, una vez calculadas las reacciones de apoyo ( $X_B, Y_B, Y_A$ ), se van calculando las tensiones en barras, progresando de nudo en nudo como se ha dicho.

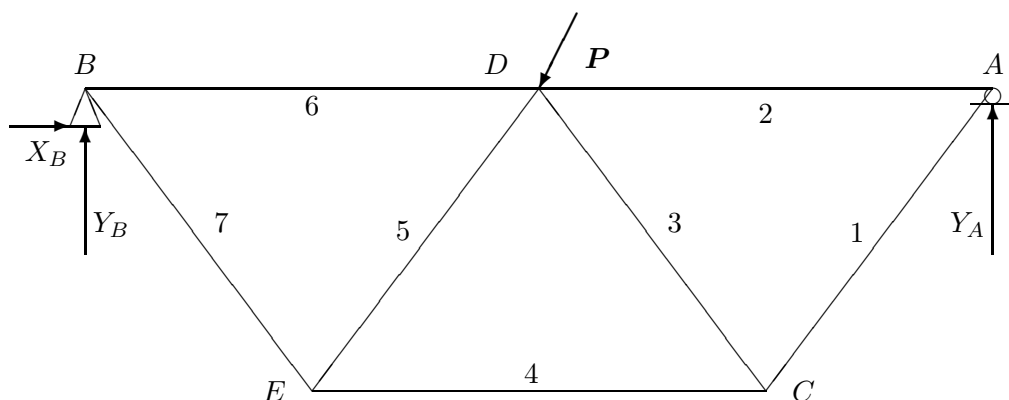


Figura 13.21: *Ejemplo de resolución de una estructura plana articulada por el método de los nudos. Se comienza por el nudo A para determinar  $T_1$  y  $T_2$ , luego el C ( $T_3$  y  $T_4$ ), el D ( $T_5$  y  $T_6$ ) y por último el E ( $T_7$ ).*

El procedimiento del cálculo se puede aplicar de forma analítica o de forma gráfica, siendo este último procedimiento debido a Cremona.

Conviene aclarar que en una estructura isostática siempre existe un camino isostático de solución que permite ir solucionando nudo a nudo. En el caso en que no exista este camino, se tratará en realidad de una estructura hiperestática.

### 13.8.3. Método de las secciones

El método de las secciones, que se aplica tan sólo a sistemas planos, se basa en plantear las ecuaciones de equilibrio a una parte de la estructura, en la que el resto se ha seccionado y sustituido por las tensiones en las barras cortadas.

El método comienza, al igual que en el caso anterior, por el cálculo de las reacciones de apoyo isostáticas. A continuación se basa en el principio de que, para una sección ideal (es decir, teórica) de una estructura, el efecto de un lado de la estructura sobre el otro se reduce a las fuerzas (como vectores deslizantes) de los elementos cortados aplicados en los puntos donde se han seccionado. Esto permite considerar el equilibrio de uno sólo de los lados de la estructura, sujeto a las fuerzas (incógnitas) de las barras seccionadas.

Puesto que en el caso plano disponemos de 3 ecuaciones cardinales de equilibrio, buscaremos secciones en las que se corte tan sólo a tres barras cuya tensión sea desconocida. De esta forma será posible mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio calcular la tensión en las tres barras.



Se procede así con sucesivas secciones hasta determinar finalmente todas las tensiones en barras de la estructura.

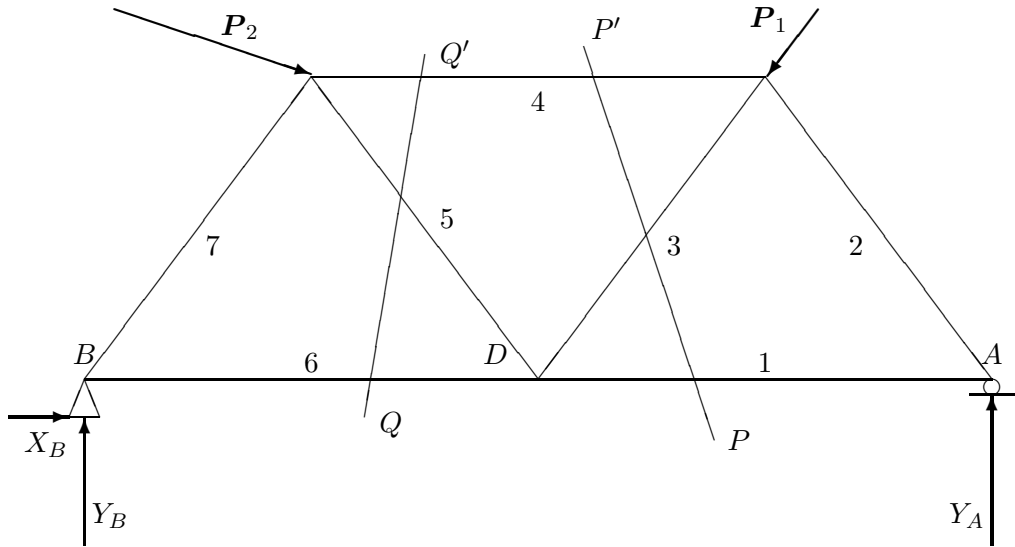


Figura 13.22: Resolución de una cercha articulada por el método de las secciones. Una vez calculadas las reacciones de apoyo, el corte por la sección  $PP'$  permite determinar las tensiones  $T_1$ ,  $T_3$  y  $T_4$ . La sección  $QQ'$  permitirá calcular  $T_5$  y  $T_6$ , y así sucesivamente

El mejor modo de explicar el método es, al igual que antes, mediante un ejemplo, descrito en la figura 13.22.

Al igual que en el caso de los nudos, toda estructura isostática permite dar secciones consecutivas de forma que en cada una surjan tan sólo 3 incógnitas o menos. En caso de que no se pudiera, la estructura sería en realidad hiperestática.



# Capítulo 14

## Estática de hilos

### 14.1. Consideraciones generales

Se trata aquí la aplicación de los métodos de la estática al estudio de hilos o cables flexibles e inextensibles. La flexibilidad de los hilos hace que su estudio difiera en cierta medida de los sistemas discretos considerados en el resto de este curso. En efecto, uno de los objetivos principales de su estudio será determinar la configuración que adoptan, a priori desconocida. Sin embargo, resulta apropiado su estudio en el ámbito de la mecánica de sistemas rígidos ya que comparten una propiedad esencial: las fuerzas internas (las que no permiten la extensión del cable) no desarrollan ningún trabajo. En este aspecto crucial se diferencian de los sistemas deformables y estructurales, en los que se produce una energía de deformación interna bajo carga.

Las características que definen los hilos flexibles e inextensibles y se admiten aquí como hipótesis de partida son las siguientes:

1. *Sección despreciable.* Se considera que el hilo posee una dimensión predominante, mucho mayor que los otros dos, por lo que puede ser idealizado según una línea, sin sección transversal. Tan sólo será necesario considerar esta sección a efecto de calcular su peso específico o peso propio por unidad de longitud, en función de la sección transversal y su densidad.
2. *Flexibilidad perfecta.* El hilo no resiste esfuerzos de flexión, y por lo tanto tampoco de corte. Tan sólo resiste esfuerzos en dirección tangencial o longitudinal.
3. *Inextensibilidad.* Cuando está sometido a tracción, el hilo es lo sufi-

cientemente rígido (en dirección longitudinal) como para que se pueda despreciar su extensibilidad. Por el contrario, sometido a compresión, el hilo no ofrece resistencia y se arruga.

Debe quedar claro que estas hipótesis son una idealización que conforma el modelo de *hilos flexibles inextensibles* al que se ciñe este capítulo. En circunstancias reales, los cables o cuerdas no cumplen exactamente ninguna de las hipótesis anteriores; sin embargo, en numerosos casos prácticos es suficientemente válida esta idealización.

## 14.2. Ecuaciones de equilibrio bajo cargas continuas

### 14.2.1. Ecuación vectorial del equilibrio

El hilo queda definido por su curva directriz,  $\mathbf{r}(s)$ , que supondremos parametrizada en función de la longitud de arco  $s$  de la misma. En un punto dado del hilo definido por  $s$  podremos considerar una sección normal  $A$ , en la cual definimos como *cara frontal*  $A^+$  la que está orientada en sentido de  $s$  creciente, y *cara dorsal*  $A^-$  la orientada en sentido de  $s$  decreciente (figura 14.1).

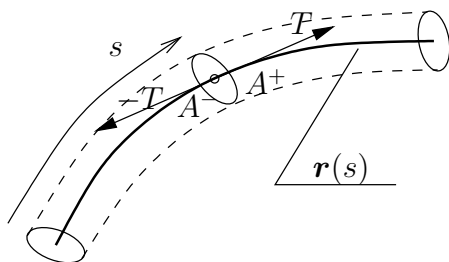


Figura 14.1: *Directriz del hilo ( $\mathbf{r}(s)$ ), secciones frontal ( $A^+$ ) y dorsal ( $A^-$ ), y concepto de tensión ( $T$ )*

Si se considera el hilo cortado por esta sección, la parte que queda por detrás queda limitada por la sección frontal  $A^+$ , en la que el efecto del hilo por delante que se ha eliminado puede sustituirse por una fuerza  $T$  que se denomina *tensión*. Si por el contrario se considera la parte del hilo por delante, queda limitado por la sección dorsal  $A^-$ , sobre la que el resto del hilo produce una fuerza  $-T$ , de forma que esté en equilibrio con  $T$ . En principio  $T$  podría llevar cualquier dirección, aunque como veremos más abajo su dirección será tangente al propio hilo. Por otra parte, debe ser siempre  $T > 0$  de forma que corresponda a una tracción,  $T < 0$  correspondería a un esfuerzo de compresión que no puede ser resistido.

Sea un elemento  $PQ$  del hilo, de longitud infinitesimal  $ds$ . El punto  $P$  corresponde a  $s$  y  $Q$  a  $(s + ds)$ . La sección en  $P$  será dorsal y la sección en  $Q$  frontal (figura 14.2).

Sobre el hilo actúa una carga continua  $\mathbf{q}$  por unidad de longitud. Al cortar el elemento de hilo por los puntos  $P$  y  $Q$ , el equilibrio del mismo queda garantizado por la tensión del hilo en cada extremo.

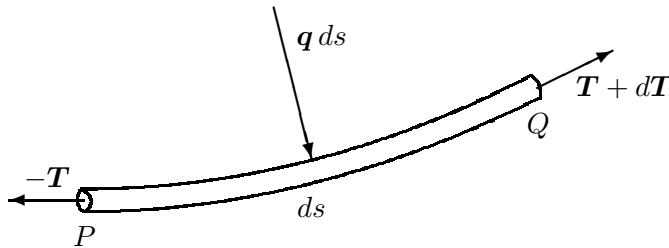


Figura 14.2:  
Equilibrio de un elemento  $PQ$  de hilo sometido a cargas continuas  $\mathbf{q}$  por unidad de longitud

En primer lugar, establecemos el equilibrio de fuerzas sobre este elemento de hilo. Las fuerzas que actúan sobre el mismo son:

- Tensión en  $P$ :  $(-T)$
- Tensión en  $Q$ :  $(T + dT)$
- Cargas externas:  $(\mathbf{q}ds)$

Expresando la anulación de la resultante,

$$-T + (T + dT) + \mathbf{q}ds = \mathbf{0}$$

de donde resulta la *ecuación vectorial del equilibrio*:

$$\boxed{d\mathbf{T} + \mathbf{q}ds = \mathbf{0}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{q} = \mathbf{0}} \quad (14.1)$$

Para completar las condiciones de equilibrio, expresamos la anulación de los momentos en  $Q$ . Denominando  $d\mathbf{r} = ds \mathbf{t} \simeq \overrightarrow{PQ}$ , siendo  $\mathbf{t}$  la tangente al hilo:

$$(-d\mathbf{r}) \wedge (-T) - \xi d\mathbf{r} \wedge \mathbf{q}ds = \mathbf{0},$$

donde hemos supuesto que la resultante de cargas exteriores  $(\mathbf{q}ds)$  actúa en un punto intermedio del elemento, definido por  $(-\xi d\mathbf{r})$  desde  $Q$ , siendo  $\xi \in (0, 1)$ . Prescindiendo de infinitésimos de 2.º orden, resulta

$$d\mathbf{r} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{0}$$

De aquí se deduce que la tensión ha de ser *tangente al hilo*, en conformidad con la hipótesis 2. enunciada en el apartado 14.1.

### 14.2.2. Ecuaciones en coordenadas intrínsecas

Expresemos ahora la ecuación del equilibrio (14.1<sup>2</sup>) en función de sus componentes en el triedro de Frenet (véase apartado 2.2.4). Recordamos que la fórmula de Frenet (2.13) permite expresar la derivada de la tangente como:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R},$$

siendo  $\mathbf{n}$  la normal principal y  $R$  el radio de curvatura.

La tensión lleva la dirección de la tangente, quedando definida por un escalar  $T$  de forma que  $\mathbf{T} = T\mathbf{t}$  Sustituyendo en la ecuación del equilibrio (14.1<sup>2</sup>):

$$\begin{aligned} \frac{d(T\mathbf{t})}{ds} + \mathbf{q} &= \mathbf{0} \\ \frac{dT}{ds}\mathbf{t} + T\frac{\mathbf{n}}{R} + \mathbf{q} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

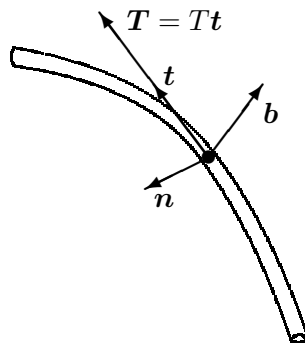


Figura 14.3: *Equilibrio en componentes intrínsecas*

Podemos extraer de esta última expresión las componentes según las direcciones del triedro. Denominando  $(q_t, q_n, q_b)$  las componentes de  $\mathbf{q}$  según cada una de las direcciones,

$$\begin{cases} \frac{dT}{ds} + q_t = 0 & \text{(dirección tangente)} \\ \frac{T}{R} + q_n = 0 & \text{(dirección normal)} \\ q_b = 0 & \text{(dirección binormal)} \end{cases} \quad (14.2)$$

OBSERVACIONES:

- La componente  $q_b$  según la binormal es nula. Esto quiere decir que el hilo adopta una configuración que contiene a la fuerza  $\mathbf{q}$  en su plano osculador, definido por los vectores  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ .
- Si no existe componente tangencial de la fuerza aplicada ( $q_t = 0$ ), la tensión del hilo se mantiene constante. Si además la fuerza normal ( $q_n$ ) es constante, el radio de curvatura adoptado será también constante, resultando una circunferencia como configuración de equilibrio del hilo.

EJEMPLO 14.1: Membrana cilíndrica sometida a presión interna de valor  $p$ .

Consideramos una rebanada de la membrana normal a la directriz del cilindro (figura 14.4), por lo que podremos considerarla como un hilo. La

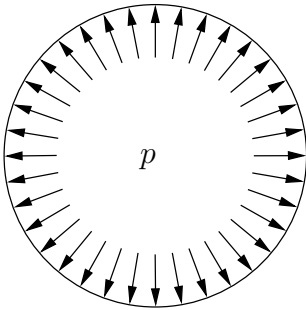


Figura 14.4: *Membrana cilíndrica sometida a presión interna  $p$*

presión hidrostática de un fluido es normal a la superficie, por lo que la tensión es constante. Aplicando la expresión (14.2<sup>2</sup>):

$$T = pR.$$

### 14.2.3. Ecuaciones en coordenadas cartesianas

Empleamos la siguiente nomenclatura para las componentes cartesianas de los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\equiv (x, y, z) \\ \mathbf{q} &\equiv (q_x, q_y, q_z) \\ \mathbf{t} &\equiv \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) \end{aligned}$$

Considerando que la tensión se puede expresar como  $\mathbf{T} = T\mathbf{t}$ , las ecuaciones de equilibrio (14.1<sup>2</sup>) resultan en las tres ecuaciones escalares

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left( T \frac{dx}{ds} \right) + q_x = 0 \\ \frac{d}{ds} \left( T \frac{dy}{ds} \right) + q_y = 0 \\ \frac{d}{ds} \left( T \frac{dz}{ds} \right) + q_z = 0 \end{cases} \quad (14.3)$$

#### 14.2.4. Casos de fuerzas conservativas

Supongamos que  $\mathbf{q}$ , fuerza aplicada por unidad de longitud del hilo, se puede obtener de un potencial:

$$\mathbf{q} = -\text{grad}(V) \quad \Rightarrow \quad dV = -\mathbf{q} \cdot d\mathbf{r} \quad (14.4)$$

Puesto que  $\mathbf{q}$  es una fuerza por unidad de longitud,  $V$  tiene la dimensión de energía por unidad de longitud, es decir de fuerza.

Proyectemos la ecuación vectorial (14.1) sobre la tangente  $\mathbf{t}$ :

$$d\mathbf{T} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{q} ds \cdot \mathbf{t} = 0$$

es decir,

$$dT + \mathbf{q} \cdot d\mathbf{r} = 0;$$

y empleando (14.4) se obtiene

$$dT = dV$$

e integrando

$$\boxed{T = V + h} \quad (14.5)$$

donde  $h$  es una constante de integración arbitraria.

Esta expresión es de gran utilidad práctica, puesto que permite de forma muy sencilla obtener la tensión en cada punto del hilo.

**EJEMPLO 14.2:** Hilo homogéneo sometido a su propio peso en el campo gravitatorio simplificado



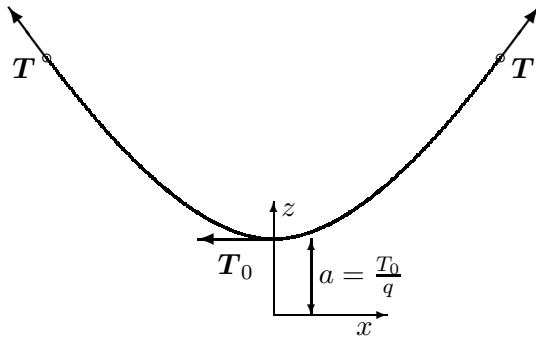


Figura 14.5: *Hilo sometido a su propio peso (campo conservativo)*

Sea el peso de valor  $q$  por unidad de longitud del hilo (figura 14.5). El potencial gravitatorio es  $V = qz$ , por lo que aplicando (14.5) obtenemos la tensión en cada punto del hilo como

$$T = qz + h$$

En la práctica conviene elegir un origen de coordenadas de forma que se anule la constante arbitraria  $h$ . Esto se consigue situando el origen a una distancia  $a = T_0/q$  por debajo del vértice o punto más bajo de la curva de equilibrio, siendo  $T_0$  la tensión del hilo en dicho vértice. Así resulta

$$\boxed{T = qz.} \tag{14.6}$$

### 14.2.5. Casos de fuerzas centrales o paralelas

Si el campo de fuerzas aplicadas  $\mathbf{q}$  pasa por un punto fijo, tomando el radio vector  $\mathbf{r}$  desde dicho punto, se cumplirá

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Multiplicando vectorialmente la ecuación del equilibrio (14.1) por  $\mathbf{r}$ ,

$$\mathbf{r} \wedge d\mathbf{T} + \underbrace{\mathbf{r} \wedge \mathbf{q} ds}_{=0} = \mathbf{0}$$

pero

$$\mathbf{r} \wedge d\mathbf{T} = d(\mathbf{r} \wedge \mathbf{T}) - \underbrace{d\mathbf{r} \wedge \mathbf{T}}_{=0}$$

ya que  $\mathbf{T}$  lleva la dirección de la tangente,  $\mathbf{T} = T d\mathbf{r}/ds$ . Se llega por tanto a

$$\boxed{\mathbf{r} \wedge \mathbf{T} = \text{cte.}} \tag{14.7}$$

Esta expresión indica que la curva de equilibrio será plana, puesto que  $\mathbf{r}$  es perpendicular a una dirección constante.

Supongamos ahora que el campo de fuerzas es paralelo a una dirección  $\mathbf{u}$  dada ( $\mathbf{q} = q\mathbf{u}$ ). Multiplicando vectorialmente la ecuación del equilibrio (14.1) por  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} \wedge d\mathbf{T} + \underbrace{\mathbf{u} \wedge \mathbf{q}}_{=0} ds = \mathbf{0}$$

pero

$$\mathbf{u} \wedge d\mathbf{T} = d(\mathbf{u} \wedge \mathbf{T}) - \underbrace{d\mathbf{u} \wedge \mathbf{T}}_{=0}$$

ya que  $\mathbf{u}$  es constante. Se obtiene por tanto

$$\boxed{\mathbf{u} \wedge \mathbf{T} = \text{cte.}} \quad (14.8)$$

Vemos pues que en este caso también ha de ser plana la curva por un razonamiento similar al anterior. En realidad, podríamos haber considerado este como un caso particular de fuerzas centrales, dirigidas hacia un punto impropio.

La expresión (14.8) indica además que la componente de  $\mathbf{T}$  normal a  $\mathbf{u}$  es constante; llamando a esta componente  $T_n$ ,

$$T_n = T_0 \quad (\text{cte.}) \quad (14.9)$$

Por otra parte, para evaluar la componente de  $\mathbf{T}$  según  $\mathbf{u}$ , proyectamos la ecuación del equilibrio (14.1) sobre esta dirección

$$dT_u + q ds = 0$$

de donde

$$\boxed{T_u = - \int_0^s q ds + C} \quad (14.10)$$

Siendo  $C$  una constante de integración.

Si elegimos el origen de arcos ( $s = 0$ ) en el punto del vértice de la curva, definido como aquél en el cual la tangente sea perpendicular a  $\mathbf{u}$  y por tanto  $T_u = 0$ , se anula la constante de integración:

$$\boxed{T_u = - \int_0^s q ds}$$

**EJEMPLO 14.3:** Hilo homogéneo sometido a su propio peso, bajo la acción gravitatoria simplificada

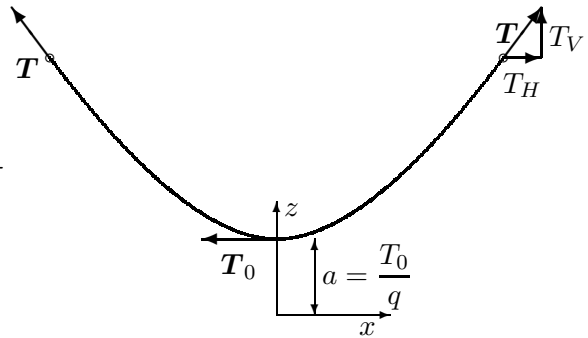


Figura 14.6: *Hilo sometido a su propio peso*

Se trata de un campo de fuerzas conservativo y paralelo. Denominamos las componentes vertical y horizontal de la tensión  $T_V$  y  $T_H$  respectivamente (figura 14.6).

Si el peso del hilo por unidad de longitud es  $q$ , el campo de fuerzas será  $\mathbf{q} = -q\mathbf{k}$ , por lo que

$$dT_V = qds \quad \Rightarrow \quad T_V = qs; \tag{14.11}$$

$$T_H = T_0 \quad (\text{cte}) \tag{14.12}$$

donde se ha elegido como origen de arcos ( $s = 0$ ) el vértice o punto más bajo de la curva, con tangente horizontal ( $T_V = 0$ ).

La tensión total es según (14.6)

$$T = qz = \sqrt{T_V^2 + T_H^2} \tag{14.13}$$

El origen de coordenadas se ha elegido a una distancia  $a$  por debajo del vértice de la curva, de forma que la tensión más baja, en el punto de tangente horizontal, vale

$$T_0 = qa \tag{14.14}$$

De las expresiones (14.11), (14.13) y (14.14) se deduce la relación

$$\boxed{z^2 = s^2 + a^2.} \tag{14.15}$$

Esta condición es una propiedad que cumple la curva de equilibrio del hilo, denominada *catenaria*. La determinación precisa de la ecuación de la catenaria se realiza más adelante (apartado 14.3.1).

### 14.2.6. Analogía dinámica

Exponemos a continuación un método alternativo, a través de una analogía, que puede emplearse para el estudio de la configuración del equilibrio de un hilo. El método consiste en asimilar la tensión  $\mathbf{T}$  a la velocidad de una partícula ficticia, cuya trayectoria dinámica será precisamente la curva de equilibrio del hilo:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$$

Para ello hemos de considerar que se ha definido un pseudo-tiempo  $t$ , que parametriza la curva de equilibrio. Derivando la velocidad respecto de este pseudo-tiempo obtenemos la “aceleración”, y por tanto la ecuación dinámica:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = -\mathbf{q} \cdot v$$

donde se ha empleado la ecuación (14.1<sup>2</sup>). Resulta por tanto

$$\boxed{\mathbf{a} = -v \cdot \mathbf{q}} \quad (14.16)$$

Esta ecuación define el valor de la aceleración  $\mathbf{a}$  en función de las cargas actuantes  $\mathbf{q}$ . Por tanto, podemos considerarla como la *ecuación dinámica* de esta analogía, en lugar de  $\mathbf{q} = m\mathbf{a}$ .

Si  $\mathbf{q}$  proviene de un potencial  $V$  tendremos, en función de (14.5),  $T = V + h$ , y por tanto

$$\mathbf{a} = (V + h) \mathbf{grad}(V) = -\mathbf{grad} \left[ -\frac{1}{2}(V + h)^2 \right]$$

Por lo que el potencial de este movimiento analógico es  $V^* = -\frac{1}{2}(V + h)^2$ , a partir del cual la aceleración se obtiene como

$$\mathbf{a} = -\mathbf{grad}(V^*).$$

## 14.3. Configuraciones de equilibrio de hilos

### 14.3.1. Hilo homogéneo sometido a peso propio (catenaria)

Se denomina *catenaria* la curva de equilibrio que adopta un hilo uniforme sometido a su propio peso. Supongamos que éste vale  $q$  por unidad de longitud, es decir  $\mathbf{q} = -q\mathbf{k}$ . Tomando el eje  $z$  como vertical y el eje

$x$  horizontal, las ecuaciones cartesianas del equilibrio (14.3) con  $F_x = 0$  y  $F_z = -q$  arrojan:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left( T \frac{dx}{ds} \right) = 0; \\ \frac{d}{ds} \left( T \frac{dz}{ds} \right) - q = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación,

$$\underbrace{T \frac{dx}{ds}}_{T_x} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_x = T_0 = \text{cte}}.$$

Aplicando la regla de la cadena a la segunda ecuación de equilibrio,

$$\frac{d}{ds} \left[ T \frac{dz}{dx} \frac{dx}{ds} \right] - q = 0,$$

y eliminando  $T$  en favor de  $T_0$ ,

$$\frac{d}{ds} \left( T_0 \frac{dz}{dx} \right) - q = 0.$$

Reorganizando términos y aplicando de nuevo la regla de la cadena,

$$\frac{T_0}{q} \frac{d}{dx} \left( \frac{dz}{dx} \right) \frac{dx}{ds} = 1. \quad (14.17)$$

Llamando  $a \stackrel{\text{def}}{=} T_0/q$  (*parámetro de la catenaria*) y  $z' \stackrel{\text{def}}{=} dz/dx$ , y considerando

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dz^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z')^2}},$$

la ecuación (14.17) se convierte en

$$a \frac{\frac{d}{dx} z'}{\sqrt{1 + (z')^2}} = 1$$

La primitiva de esta expresión es:  $a \sinh^{-1}(z')$ . Integrando con la condición inicial que corresponde a situar el origen de abscisas en el vértice o punto de tangente horizontal,

$$z' \Big|_{x=0} = 0$$

se obtiene

$$x = a \operatorname{senh}^{-1} z'$$

o bien, invirtiendo la relación

$$z' = \operatorname{senh} \frac{x}{a}.$$

Integrando de nuevo con la condición inicial  $z|_{x=0} = a$  resulta finalmente

$$z = a \cosh \frac{x}{a} \quad (14.18)$$

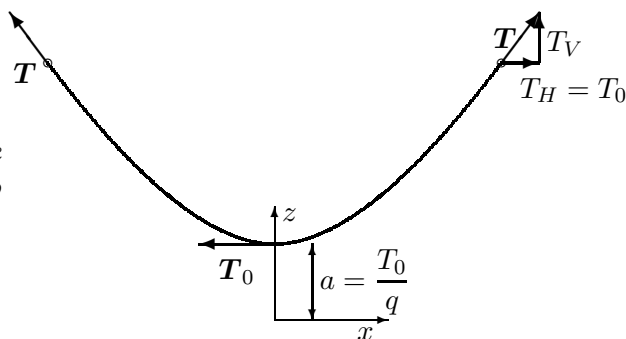


Figura 14.7: Configuración de un hilo sometido a su propio peso (catenaria)

La configuración de equilibrio puede verse en la figura 14.7. Debido a las constantes de integración tomadas, el vértice de la catenaria corresponde a las coordenadas  $(x = 0, z = a)$ .

La tensión en un punto cualquiera, según la fórmula general (14.6) para fuerzas conservativas y paralelas, es

$$T = qa \cosh \frac{x}{a} \quad (14.19)$$

### Longitud del arco de catenaria

Obtengamos ahora la longitud del arco de la catenaria entre dos puntos dados. Para ello, integramos el elemento infinitesimal de arco  $ds$  :

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 = dx^2 (1 + (z')^2) = dx^2 \left(1 + \operatorname{senh}^2 \frac{x}{a}\right) = dx^2 \cosh^2 \frac{x}{a}.$$

Por tanto, el arco  $s$  medido entre el vértice  $(x = 0)$  y un punto cualquiera de abscisa  $x$  es

$$s = \int_0^x ds = \int_0^x \cosh \frac{\xi}{a} d\xi = a \operatorname{senh} \frac{x}{a}. \quad (14.20)$$

Observamos inmediatamente, aplicando la relación entre funciones hiperbólicas ( $\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x$ ), que

$$s^2 = z^2 - a^2$$

ecuación que coincide con la deducida antes (14.15).

Observemos también que, según se dedujo en (14.11) y (14.14), las componentes vertical y horizontal de la tensión son

$$T_V = qs = qa \sinh \frac{x}{a},$$

$$T_H = T_0 = qa.$$

### Segmento desde el pie de la ordenada a la tangente

Demostraremos a continuación una propiedad geométrica interesante de la catenaria que en ocasiones puede resultar útil. Sea  $P'$  el pie de la ordenada de un punto  $P$  de la catenaria (figura 14.8), es decir la proyección de  $P$  sobre el eje  $Ox$ .

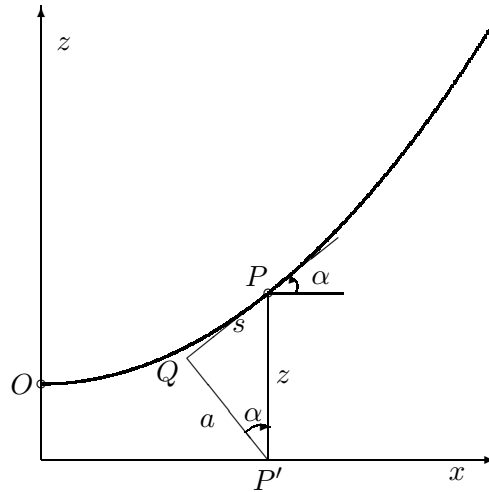


Figura 14.8: La distancia  $P'Q$  desde el pie de la ordenada a la tangente a la catenaria es constante e igual al parámetro “ $a$ ” de la misma; la distancia  $PQ$  es igual al arco  $s$  entre  $P$  y  $O$  (nótese que el dibujo no está a escala, por lo que en éste ambas magnitudes no coinciden).

Llamando  $\alpha$  al ángulo que forma la tangente a la catenaria con la horizontal,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{dz}{dx} = \sinh \frac{x}{a} \\ \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\cosh \frac{x}{a}} = \frac{a}{z} \end{aligned}$$

considerando el triángulo rectángulo  $PQP'$  (figura 14.8), obtenemos la distancia  $P'Q$  desde el pie de la ordenada a la tangente:

$$P'Q = z \cos \alpha = a \quad (\text{cte})$$

Por otra parte, la distancia desde el punto  $P$  de la curva al punto  $Q$  vale

$$PQ = \sqrt{z^2 - (P'Q)^2} = \sqrt{z^2 - a^2} = s$$

Es decir, es igual al arco de catenaria medido desde el vértice.

### Deducción de la ecuación de la catenaria mediante la analogía dinámica

Obtendremos ahora la ecuación de la catenaria por otro procedimiento distinto, empleando la analogía dinámica descrita en el apartado 14.2.6

La fuerza actuante por unidad de longitud para la catenaria vale  $\mathbf{q} = -q\mathbf{k}$ . La ecuación dinámica (14.16) es por lo tanto

$$\mathbf{a} = vq\mathbf{k} \quad (14.21)$$

Expresando la componente cartesiana  $x$  de esta ecuación,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = C \quad (\text{constante}),$$

y considerando que  $v^2 = (dx/dt)^2 + (dz/dt)^2$ , expresando la componente  $z$  de (14.21),

$$\frac{d^2z}{dt^2} = q \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = q \sqrt{C^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Integramos esta ecuación:

$$\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{C^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = q \quad \Rightarrow \quad \sinh^{-1} \left( \frac{dz/dt}{C} \right) = qt$$

donde se ha empleado la condición inicial  $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = 0$ . Invertiendo la expresión anterior,

$$\frac{dz}{dt} = C \sinh(qt),$$



e integrando de nuevo:

$$z = \frac{C}{q} \cosh(qt)$$

donde se ha considerado la condición  $z|_{t=0} = \frac{C}{q}$ . Puesto que  $x = Ct$ , y llamando  $a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C}{q}$ , se llega a

$$z = a \cosh \frac{x}{a}$$

idéntico resultado al obtenido antes (14.18) por el procedimiento directo.

### 14.3.2. Hilo sometido a carga constante por unidad de abscisa (parábola)

Un hilo sometido a carga vertical uniforme por unidad de abscisa  $x$  (coordenada horizontal) adopta una parábola como configuración de equilibrio. Como ejemplo más característico, puede citarse el de un puente colgante, en que el peso del tablero es soportado por los cables mediante péndolas (figura 14.9). El caso es distinto al del hilo sometido a peso propio (cate-

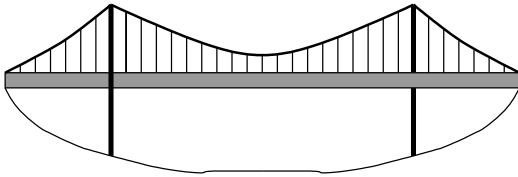


Figura 14.9: *Puente colgante: ejemplo de carga constante por unidad de abscisa.*

naria), aunque si el cable está muy tenso ambos se aproximan bastante. En este caso la parábola podría servir como una primera aproximación a la catenaria.

Si el peso por unidad de abscisa es  $q$ , un elemento de cable de longitud  $ds$  pesará  $q(dx/ds)$ . Expresando las ecuaciones cartesianas del equilibrio (14.3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( T \frac{dx}{ds} \right) &= 0; \\ \frac{d}{ds} \left( T \frac{dz}{ds} \right) - q \frac{dx}{ds} &= 0. \end{aligned}$$

De la primera ecuación se deduce que la tensión horizontal es constante:

$$T_x = T \frac{dx}{ds} = T_0 \text{ (cte.)}$$

Desarrollando la segunda ecuación y empleando este resultado,

$$\frac{d}{ds} \left( T \frac{dz}{dx} \frac{dx}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( T_0 \frac{dz}{dx} \right) = q \frac{dx}{ds}.$$

Simplificando las derivadas, esta expresión equivale a

$$\frac{d}{dx} \left( T_0 \frac{dz}{dx} \right) = q \quad \Rightarrow \quad T_0 \frac{d^2z}{dx^2} = q.$$

Esta última es la ecuación diferencial del equilibrio, que resulta particularmente simple para integrar. Integrando dos veces obtenemos:

$$\boxed{z = \frac{1}{2} \frac{q}{T_0} x^2.} \quad (14.22)$$

Esta ecuación corresponde a una *parábola de eje vertical*. Al integrar se han escogido los ejes para anular las constantes de integración, imponiendo

$$z|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0} = 0,$$

es decir, el origen de los ejes está situado en el vértice de la parábola (figura 14.10), a diferencia de la catenaria (figura 14.7).

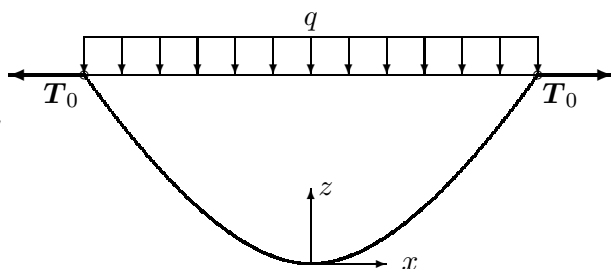


Figura 14.10: *Hilo sometido a carga uniforme por unidad de abscisa (parábola)*

Análogamente al caso de la catenaria, la tensión horizontal es constante para todo el cable, puesto que no hay fuerzas horizontales sobre él. La tensión mínima se produce en el vértice de la parábola, donde la única componente de la tensión es la horizontal,  $T = T_x = T_0$ .

La tensión vertical vale, proyectando la ecuación (14.1) sobre la vertical,

$$dT_z + q_z ds = 0 \quad \Rightarrow \quad dT_z = q \frac{dx}{ds} ds$$

e integrando, considerando que para  $x = 0$  es  $T_z = 0$ ,

$$\boxed{T_z = qx}$$

Esto equivale a decir que la tensión vertical es precisamente el peso del cable entre el vértice ( $x = 0$ ) y un punto genérico de abscisa  $x$ .

La tensión total es

$$T = \sqrt{T_0^2 + (qx)^2} \tag{14.23}$$

siendo su valor mayor cuanto más alejados estemos del vértice.

En este caso las fuerzas no provienen del potencial gravitatorio que se deduciría del peso uniforme del cable, por lo cual la tensión total no vale  $T = qz$  como en el caso de la catenaria. Sin embargo, podemos comprobar que provienen de un potencial  $V'$  definido como

$$V' = \sqrt{T_0^2 + 2qT_0z}$$

En efecto las fuerzas se obtienen derivando  $V'$ :

$$q_z = -\frac{\partial V'}{\partial z} = \frac{-q}{\sqrt{1 + \frac{2q}{T_0}z}} = -q \frac{dx}{ds}; \quad F_x = -\frac{\partial V'}{\partial x} = 0$$

Por otra parte, empleando (14.23) y (14.22) se comprueba que resulta ser  $T = V'$ , de acuerdo con la expresión (14.5) deducida antes.

EJEMPLO 14.4: Sea un cable sometido a una carga repartida por unidad de abscisa  $q$ , del cual conocemos su flecha  $f$  y la luz entre apoyos  $L$  a la misma altura (figura 14.11). Se desea calcular las tensiones mínimas y máximas en el cable. Solucionar de forma genérica y aplicar para los valores numéricos  $q = 1 \text{ kg/m}$ ,  $L = 200 \text{ m}$ ,  $f = 20 \text{ m}$ .

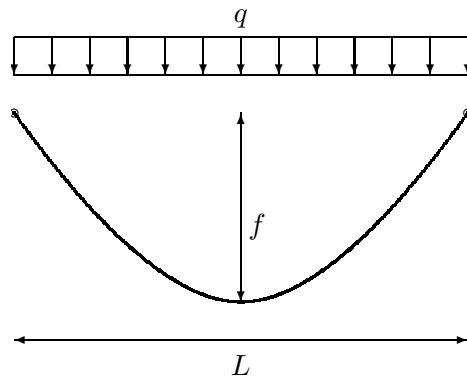


Figura 14.11: Ejemplo: cable sometido a carga constante por unidad de abscisa

La configuración de equilibrio es una parábola, por lo que su ecuación es la (14.22):

$$z = \frac{1}{2} \frac{q}{T_0} x^2.$$

Para  $x = L/2$  es  $z = f$ , luego

$$T_0 = \frac{1}{2} \frac{q}{z} x^2 = \frac{1}{8} q \frac{L^2}{f}$$

La tensión mínima es por tanto

$$T_0 = \frac{qL^2}{8f},$$

y la tensión máxima, aplicando (14.23) para  $x = L/2$ ,

$$T_{\max} = \sqrt{T_0^2 + \left(q \frac{L}{2}\right)^2} \Rightarrow T_{\max} = q \frac{L}{2} \sqrt{\frac{L^2}{16f^2} + 1}$$

Aplicando los datos numéricos del enunciado, resulta

$$T_0 = 250,0 \text{ kg}; \quad T_{\max} = 269,26 \text{ kg}; \quad S = 205,2121 \text{ m}.$$

**EJEMPLO 14.5:** Supongamos ahora el mismo problema que en el ejemplo anterior 14.4 (cable de flecha  $f$  y luz  $L$  entre apoyos a la misma altura) pero con carga  $q$  constante por unidad de longitud del cable.

La curva de equilibrio es ahora una catenaria (14.18):

$$z = a \cosh \frac{x}{a}$$

Particularizando para la flecha  $f$  en  $x = L/2$ ,

$$(a + f) = a \cosh \frac{L}{2a}. \quad (14.24)$$

Para resolver el problema es preciso solucionar la ecuación anterior en  $a$ . Se trata de una ecuación trascendente que carece de solución analítica, debiendo resolverse por métodos numéricos<sup>1</sup> para obtener el parámetro  $a$  de la catenaria. Esto se puede realizar por diversos procedimientos: dicotomía, método de Newton, etc. (este último es el más recomendado con carácter

<sup>1</sup>No es objeto de este curso de mecánica el estudio de los métodos numéricos de resolución de ecuaciones; si se precisa, consultar algún texto de análisis numérico, como p.ej. J. Puy: *Algoritmos Numéricos en Pascal*, Servicio de Publicaciones de la E.T.S. de Ing. de Caminos de Madrid, o R.L. Burden y J.D. Faires: *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamericana, 1985.

general). Otra alternativa es aproximar la solución considerando la catenaria como una parábola, tal y como se justifica más abajo. Una vez obtenido el valor de  $a$ , los valores de la tensión se obtienen como:

$$\begin{aligned} T_0 &= qa && \text{(Tensión mínima, en el vértice)} \\ T_{\max} &= q(f + a) && \text{(Tensión máxima, en el apoyo)} \end{aligned}$$

En el caso que nos ocupa, resolviendo para los valores numéricos del enunciado (véase ejemplo 14.4), resulta:

$$T_0 = 253,2649 \text{ kg}; \quad T_{\max} = 273,2649 \text{ kg}; \quad S = 205,2374 \text{ m}.$$

### Aproximación de la catenaria por la parábola

Como se ha dicho antes, la parábola es una buena aproximación de la catenaria para hilos muy tendidos, es decir, en los que la pendiente máxima sea pequeña. Puede comprobarse esto desarrollando en serie la ecuación de la catenaria en función del argumento  $(x/a)$ :

$$z_c = a \cosh \frac{x}{a} = a \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{a} \right)^2 + \frac{1}{24} \left( \frac{x}{a} \right)^4 + \frac{1}{720} \left( \frac{x}{a} \right)^6 + \mathcal{O} \left( \frac{x}{a} \right)^8 \right].$$

El segundo término en el desarrollo anterior corresponde precisamente a la ecuación de la parábola (14.22), en la que se toma  $T_0/q = a$ . El primer término corresponde a la traslación vertical de ejes, ya que los de la catenaria se toman una distancia  $a$  por debajo del vértice.

Esta propiedad permite, siempre que el parámetro  $(x/a)$  sea suficientemente pequeño, aproximar la catenaria por una parábola. Esta aproximación es tanto mejor cuanto más baja sea la pendiente, ya que un hilo más tenso tiene un valor mayor de  $a = T_0/q$ . De esta forma, pueden resolverse de forma aproximada con operaciones más sencillas algunos problemas de catenarias. Asimismo, esta aproximación sirve como un primer valor para comenzar las iteraciones en una resolución numérica aproximada de la ecuación de la catenaria (14.24).

### Longitud de la parábola

Desarrollamos a continuación el cálculo de la longitud del hilo en el caso de la parábola. Partimos de la ecuación de la misma (14.22), en la que para simplificar sustituimos  $T_0 = qa$ , es decir:

$$z = \frac{1}{2} \frac{x^2}{a}.$$

La longitud se obtiene integrando el elemento de arco:

$$s = \int_0^x ds = \int_0^x \sqrt{1 + (z')^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + (x/a)^2} dx$$

Resolviendo la integral<sup>2</sup>, resulta:

$$s = \frac{1}{2}x\sqrt{1 + (x/a)^2} + \frac{a}{2} \ln \left( \frac{x}{a} + \sqrt{1 + (x/a)^2} \right). \quad (14.25)$$

Este resultado representa la longitud del hilo parabólico entre el vértice ( $x = 0$ ) y un punto genérico de abscisa  $x$ . Como puede comprobarse, la expresión resulta más difícil de obtener y engorrosa de trabajar que la que correspondía a la catenaria (cf. ecuación (14.20)).

Para trabajar en la práctica, a menudo conviene desarrollar en serie la longitud de la parábola (14.25), obteniéndose:

$$s = x \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{a} \right)^2 - \frac{1}{40} \left( \frac{x}{a} \right)^4 + \frac{1}{112} \left( \frac{x}{a} \right)^6 + \mathcal{O} \left( \frac{x}{a} \right)^8 \right]. \quad (14.26)$$

En los casos usuales basta con tomar los dos primeros términos del desarrollo en serie, es decir

$$s \approx x \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right]. \quad (14.27)$$

EJEMPLO 14.6: Obtener la longitud del hilo en una parábola de luz  $L$  y flecha  $f$  (figura 14.11).

La ecuación de la parábola (14.22), particularizada para  $x = L/2$ ,  $z = f$  arroja:

$$f = \frac{1}{2} \frac{T_0}{q} (L/2)^2, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{T_0}{q} = \frac{1}{8} \frac{L^2}{f}.$$

Sustituyendo en la ecuación (14.25), y teniendo en cuenta que la longitud del hilo es  $S = 2s|_{x=L/2}$ , resulta:

$$S = \frac{1}{2} L \sqrt{1 + 16(f/L)^2} + \frac{1}{8} \frac{L^2}{f} \ln \left( 4 \frac{f}{L} + \sqrt{1 + 16(f/L)^2} \right).$$

Empleando el desarrollo en serie (14.26), resulta:

$$\begin{aligned} S &= L \left[ 1 + \frac{8}{3} \left( \frac{f}{L} \right)^2 - \frac{32}{5} \left( \frac{f}{L} \right)^4 + \frac{256}{7} \left( \frac{f}{L} \right)^6 + \mathcal{O} \left( \frac{f}{L} \right)^8 \right] \\ &\approx L \left[ 1 + \frac{8}{3} \left( \frac{f}{L} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Mediante el cambio  $t = \sinh(x/a)$  y haciendo la integral resultante por partes. La expresión final se obtiene teniendo en cuenta que  $\sinh^{-1} x/a = \ln(x/a + \sqrt{1 + (x/a)^2})$ .

EJEMPLO 14.7: Un cable de peso  $Q$  está anclado entre dos puntos a igual altura, a una determinada distancia horizontal  $L$ , de forma que su tensión horizontal vale  $H = 10Q$ . Se desea saber la *rigidez geométrica*  $k_G$  del cable respecto al desplazamiento horizontal de un extremo, es decir, el aumento de la tensión horizontal  $H$  producida para un desplazamiento unidad, supuesto el cable inextensible<sup>3</sup>. Resolver el problema de dos formas distintas, como catenaria y empleando la aproximación de la parábola.

**Resolución como catenaria.**— En primer lugar, expresamos la ecuación del peso del cable, llamando  $x = L/2$ :

$$Q/2 = qa \operatorname{senh} \frac{x}{a} = 10Q \operatorname{senh} \frac{x}{a}.$$

Despejando en esta expresión se obtiene

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{\operatorname{senh}^{-1}(1/20)} = 20,00832744. \quad (14.28)$$

A continuación, expresamos la ecuación de la longitud del cable y la diferenciamos:

$$\begin{aligned} S &= 2a \operatorname{senh} \frac{x}{a}; \\ 0 &= 2da \operatorname{senh} \frac{x}{a} + a \left( \frac{adx - xda}{a^2} \right) \cosh \frac{x}{a}; \end{aligned}$$

operando extraemos  $da/dx$ :

$$\frac{da}{dx} = \frac{1}{(x/a) - \operatorname{tgh}(x/a)}$$

Teniendo en cuenta que  $H = qa$ ,  $x = L/2$ , obtenemos la expresión de la rigidez:

$$k_G = \frac{dH}{dL} = \frac{q}{2} \frac{da}{dx} = \frac{H/2a}{(x/a) - \operatorname{tgh}(x/a)}$$

Sustituyendo el valor de  $a$  calculado antes (14.28), resulta

$$k_G = 12021,99355 \frac{Q}{L}$$

<sup>3</sup>Se denomina esta razón como *rigidez geométrica*, ya que la rigidez real tendrá además una contribución adicional (*rigidez elástica*) debido a la elongación del cable bajo carga,  $k_E = EA/S$ , siendo  $E$  el módulo elástico,  $A$  la sección del cable, y  $S$  su longitud total; la rigidez conjunta se calculará mediante  $1/k = 1/k_G + 1/k_E$ .

**Resolución como parábola.**— Tomando la aproximación de la longitud de la parábola (14.27), la expresión del peso del cable, siendo  $x = L/2$ , es

$$Q/2 = qS = \frac{10Q}{a}x \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right].$$

Esta expresión resulta en una ecuación cúbica en  $a$ , de la cual despejando la única raíz real se obtiene

$$\frac{a}{x} = 20,00832640 \quad (14.29)$$

A continuación, expresamos la ecuación de la longitud del cable y la diferenciamos:

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= x \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right]; \\ 0 &= dx \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right] + x \frac{1}{3} \frac{x}{a} \frac{adx - xda}{a^2}; \end{aligned}$$

operando extraemos  $da/dx$ :

$$\frac{da}{dx} = \frac{1 + (x/a)^2/2}{(x/a)^3/3}$$

Teniendo en cuenta que  $H = qa$ ,  $x = L/2$ , obtenemos la expresión de la rigidez:

$$k_G = \frac{dH}{dL} = \frac{q}{2} \frac{da}{dx} = \frac{H}{2a} \frac{1 + (x/a)^2/2}{(x/a)^3/3}$$

Sustituyendo el valor de  $a$  calculado antes (14.29), resulta

$$k_G = 12024,99376 \frac{Q}{L}.$$

Como puede comprobarse, resulta un valor bastante aproximado al obtenido realizando el cálculo como catenaria.

### 14.3.3. Efecto de cargas puntuales

En lo anterior se ha considerado tan sólo el efecto de cargas continuas distribuidas sobre el hilo, que dan lugar a la ecuación de equilibrio (14.1). En un caso general pueden existir también sobre el hilo cargas puntuales o concentradas aisladas, que provengan de apoyos intermedios o de cargas suspendidas.



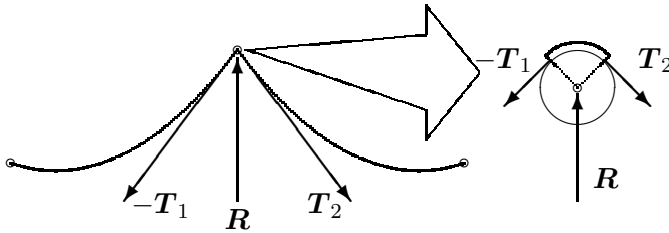


Figura 14.12:  
 Las cargas puntuales o concentradas en un hilo flexible producen una discontinuidad en la tangente; en este caso  $\mathbf{R}$  se aplica mediante un apoyo deslizante o polea de radio muy pequeño, por lo cual se orienta como bisectriz de  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$ .

El efecto que tienen las cargas puntuales sobre la configuración del hilo es producir una discontinuidad en la tangente. En efecto, debido a una carga puntual  $\mathbf{R}$ , planteando el equilibrio en el nudo de aplicación de la carga (figura 14.12),

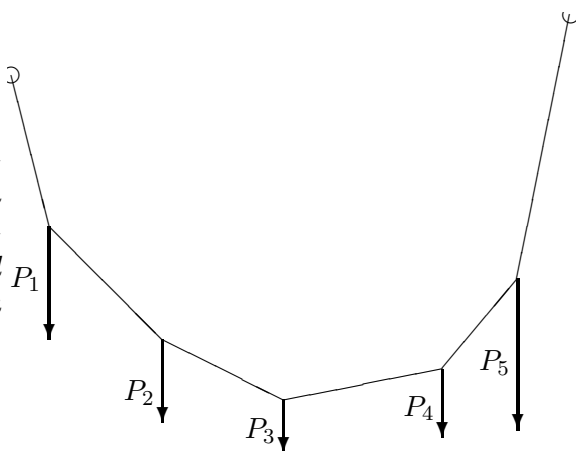
$$-\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

Si no hay rozamiento en el punto de aplicación de la carga, no se transmiten fuerzas al hilo en dirección tangencial. La carga puntual  $\mathbf{R}$  estará en la bisectriz de las tangentes, al ser el módulo de la tensión igual a ambos lados,  $T_1 = T_2$ .

El procedimiento general de análisis para estos casos consiste en dividir el hilo en tramos entre cada dos apoyos o cargas puntuales, y solucionar cada tramo por separado, en función de las cargas distribuidas en él. Si estas cargas distribuidas son el propio peso del hilo, se formarán arcos de catenaria.

Si lo único que existen sobre el hilo son cargas puntuales y no hay cargas repartidas, el hilo se configura formando tramos rectos entre cada dos cargas. La configuración resultante se denomina *polígono funicular*.

Figura 14.13: *Polígono funicular debido a cargas concentradas sobre un hilo, sin cargas repartidas; las cargas  $P_i$  se aplican en puntos fijos del hilo (no deslizantes), por lo que su dirección no es bisectriz del hilo.*



#### 14.3.4. Algunos tipos de condiciones de apoyo en los extremos

Discutimos a continuación, a título de ejemplos y sin ánimo de exhaustividad, algunas condiciones de extremo y su tratamiento estático en las ecuaciones de los hilos.

##### Extremo con tensión máxima dada

Para materializar esta condición basta colocar un contrapeso  $P$  en el extremo más alto (figura 14.14), cuyo valor equivaldrá a la tensión máxima en el cable. El contrapeso cuelga de una pequeña polea lisa, que transmite la carga  $P$  al cable, sin variar el módulo, hasta la dirección de la tangente al hilo en el apoyo. Como la tensión en un cable es máxima en el punto más alto, se obtiene un cable cuya tensión máxima es constante, independientemente de las cargas intermedias que luego vaya a soportar.

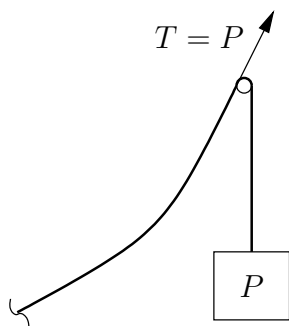


Figura 14.14: *Cable sometido a carga constante  $P$  en un extremo a través de un contrapeso.*

**Extremo con tensión horizontal dada**

Se materializa mediante el hilo anclado a un carrito, y otro hilo auxiliar (sin peso) unido a un contrapeso  $P$  a través de una polea lisa (figura 14.15). La polea de la derecha transmite la carga  $P$  fija como tensión horizontal al carrito. El apoyo del carrito proporciona la necesaria componente de tensión vertical en el extremo del hilo.

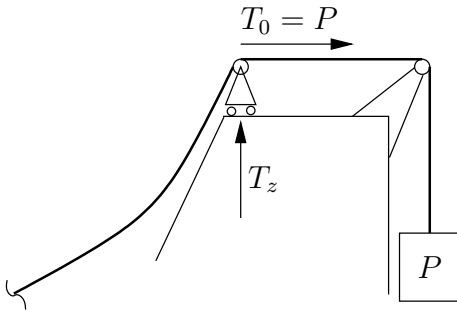


Figura 14.15: Cable sometido a tensión horizontal dada.

**Punto de anclaje con rozamiento**

En el extremo apoyado sobre la recta la reacción vertical es  $T_z$  y la horizontal  $T_0$  (figura 14.16). La relación entre las componentes de la tensión es  $\mu T_z \geq T_0 = T_z / \text{tg } \alpha$ , por lo cual para el equilibrio habrá de ser

$$1 / \text{tg } \alpha \leq \mu = \text{cotg } \varphi \Rightarrow \alpha \geq \pi / 2 - \varphi.$$

En el límite estricto de equilibrio será  $1 / \text{tg } \alpha = \mu$ .

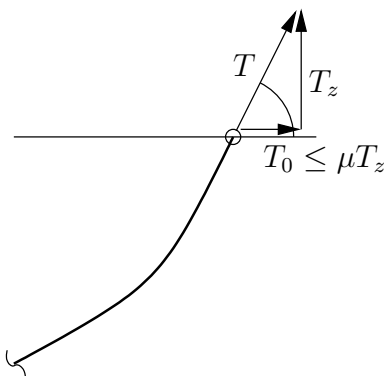


Figura 14.16: Cable anclado en una anilla que desliza en una recta horizontal con rozamiento.

### Anclaje en bloque pesado con rozamiento

Se considera aquí un extremo  $A$  anclado a un bloque pesado sobre un suelo rugoso, del cual tira hacia arriba el cable (figura 14.17). Para el equilibrio debe considerarse que la normal es  $N = mg - T_{A,z}$ , y de nuevo que el límite de la tensión horizontal es  $\mu N$ . En este caso se considera la masa del bloque como puntual y por lo tanto no se estudia el posible vuelco del mismo.

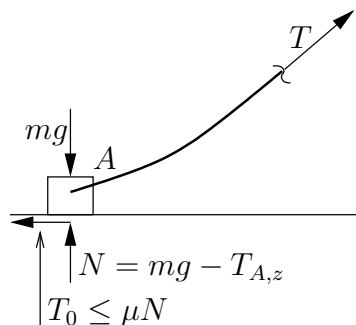


Figura 14.17: Cable anclado en bloque pesado sobre suelo rugoso.

### Carga puntual deslizando

Suponemos en este caso un cable con extremos anclados a igual altura, y una carga puntual situada en el mismo de forma que pueda deslizar libremente. Obviamente se tenderá a situar en el punto medio, de forma que se forme un ángulo entre las dos ramas de catenaria simétricas que se forman a derecha e izquierda de la carga (figura 14.18). Debe tenerse en cuenta que el punto  $A$  donde se sitúa la carga no es el vértice de esta catenaria. Por el contrario, con la convención usual de considerar el origen de abscisas bajo el vértice de la catenaria, la abscisa de este punto es a priori una incógnita del problema ( $x_A$ ). Para relacionar ésta con los datos del problema, expresamos en forma de ecuación que cada una de las catenarias simétricas debe equilibrar la mitad de la carga vertical:

$$T_{A,z} = \frac{P}{2} = qa \operatorname{senh} \frac{x_A}{a}.$$

### Anclaje en puntos a distinta altura

Sea un cable homogéneo, de peso unitario  $q$ , con anclajes en los puntos  $A$  y  $B$ , situados a distinta altura (figura 14.19). Se conoce el valor de la

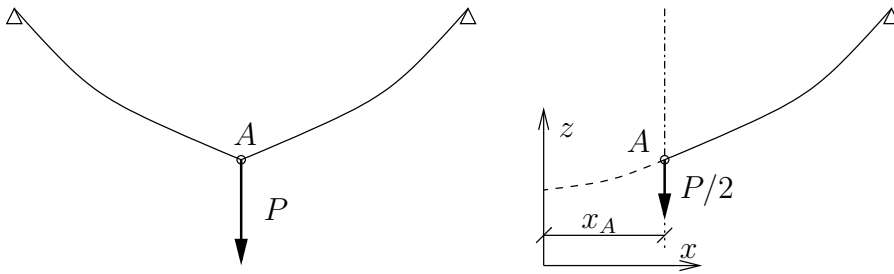


Figura 14.18: Cable con extremos anclados a igual altura y sometido a una carga puntual deslizante, que se sitúa en el medio formando dos arcos simétricos de catenaria.

reacción horizontal en uno de los anclajes  $H$ , la luz entre ambos  $L$  y el desnivel  $h$ .

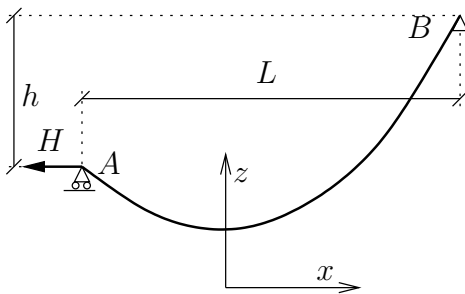


Figura 14.19: Cable anclado en apoyos a distinta altura, sometido a carga horizontal constante  $H$ .

La tensión horizontal en el hilo es constante, de valor  $T_0 = H$ , por lo que se conoce  $a = H/q$ . La incógnita es la abscisa  $x_A$  del apoyo  $A$  en relación con el vértice de la catenaria, ya que  $x_B = x_A + L$ . Se plantea por tanto la ecuación siguiente:

$$a \cosh \frac{x_A + L}{a} - a \cosh \frac{x_A}{a} = h.$$

Para resolver esta ecuación, desarrollamos el coseno hiperbólico de la suma. Denominando  $u = \cosh(x_A/L)$  (incógnita) y  $\beta = \cosh(L/a)$  (dato), resulta:

$$\beta u + \sqrt{\beta^2 - 1} \sqrt{u^2 - 1} - u = \frac{h}{a},$$

Expresión que equivale a una ecuación cuadrática de fácil resolución para  $u$ .

## 14.4. Hilos apoyados sobre superficies

### 14.4.1. Superficie lisa sin cargas

Una superficie lisa sobre la que se apoya un hilo proporciona una reacción que es normal a la superficie y al propio hilo. Puesto que las fuerzas exteriores están siempre en el plano osculador (ecuación (14.2)<sub>3</sub>), esta normal es precisamente la normal principal del hilo.

Las curvas trazadas sobre una superficie para las que la normal principal a la curva es en todo punto la normal a la superficie, son las denominadas *geodésicas*<sup>4</sup>. Por lo tanto la curva de equilibrio que adopta un hilo apoyado sobre una superficie lisa, sin otras cargas exteriores, es una geodésica de la superficie.

Por ejemplo, en una esfera las geodésicas son siempre círculos máximos. En un cilindro, las geodésicas son bien secciones rectas normales al eje, bien generatrices, o bien hélices.

OBSERVACIONES:

- Al no existir fuerza tangencial, de (14.2) se deduce que la tensión en el hilo es constante.
- También de (14.2) se deduce que la reacción normal sobre la superficie es  $\frac{T}{R}$ , siendo  $R$  el radio de curvatura del hilo. Nótese que ésta es la reacción por unidad de longitud del hilo.
- Se puede emplear la analogía dinámica para estudiar la curva de equilibrio, calculando para ello la trayectoria de un punto ligado a una superficie lisa, sometida a la ecuación dinámica de la analogía, (14.16).

### 14.4.2. Superficie lisa con cargas

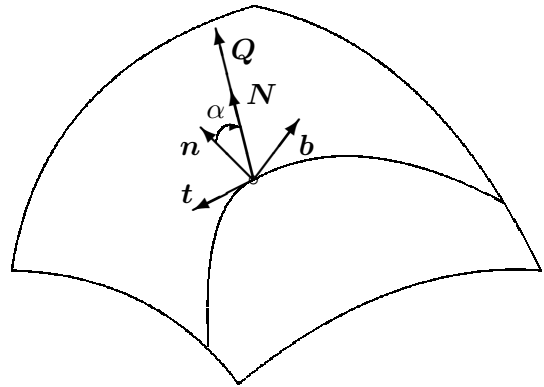
Consideremos ahora, que además de la reacción normal a la superficie, actúan unas cargas exteriores de valor  $q$  por unidad de longitud del hilo.

Llamemos  $Q$  a la reacción normal de la superficie, que ahora no coincidirá necesariamente con la normal principal del hilo, aunque seguirá siendo normal a este (al ser normal a la superficie también es normal a cualquier curva sobre la misma).

---

<sup>4</sup>Ver página 2.32 de estos apuntes, o D.J. Struik, *Geometría Diferencial Clásica*, ed. Aguilar, (apartado 2.5).

Figura 14.20: *Hilo sobre superficie lisa con cargas exteriores  $\mathbf{F}$ : la reacción normal de la superficie  $\mathbf{N}$  no es necesariamente la normal principal al hilo.*



Denominamos  $\mathbf{n}$  a la normal principal al hilo,  $\mathbf{b}$  a la binormal, y  $\mathbf{N}$  a la normal a la superficie. Todos estos vectores son versores unitarios. Sea  $\alpha$  el ángulo que forman  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = \cos \alpha$$

La reacción vale (figura 14.20)

$$\mathbf{Q} = Q\mathbf{N}$$

y en componentes

$$\begin{cases} Q \cos \alpha, & \text{componente según } \mathbf{n} \\ Q \sin \alpha, & \text{componente según } \mathbf{b} \end{cases}$$

Escribimos las ecuaciones de equilibrio en las direcciones del triedro intrínseco (14.2)

$$\begin{aligned} 0 &= q_t + \frac{dT}{ds} \\ 0 &= q_n + Q \cos \alpha + \frac{T}{R} \\ 0 &= q_b + Q \sin \alpha \end{aligned} \tag{14.30}$$

Proyectamos éstas sobre la normal a la superficie,  $\mathbf{N}$ , multiplicando la 2.<sup>a</sup> ecuación por  $\cos \alpha$  y la 3.<sup>a</sup> por  $\sin \alpha$ :

$$\underbrace{q_n \cos \alpha + q_b \sin \alpha}_{=q_N} + Q + \frac{T}{R} \cos \alpha = 0$$

Aplicamos ahora el Teorema de Meusnier de geometría diferencial<sup>5</sup>. Este afirma que para una curva  $\Gamma$  sobre una superficie, con radio de curvatura  $R$  (de la curva), el radio de curvatura  $R_n$  de la sección normal a la superficie que es tangente a  $\Gamma$  en ese punto verifica

$$R_n \cos \alpha = R,$$

por lo que podemos escribir la ecuación anterior como

$$\boxed{q_N + Q + \frac{T}{R_n} = 0} \quad (14.31)$$

siendo  $R_n$  el radio de curvatura de la sección normal a la superficie tangente al hilo en cada punto.

EJEMPLO 14.8: Hilo homogéneo pesado, situado sobre un paralelo horizontal en una esfera lisa, en una latitud  $\alpha$  (figura 14.21).

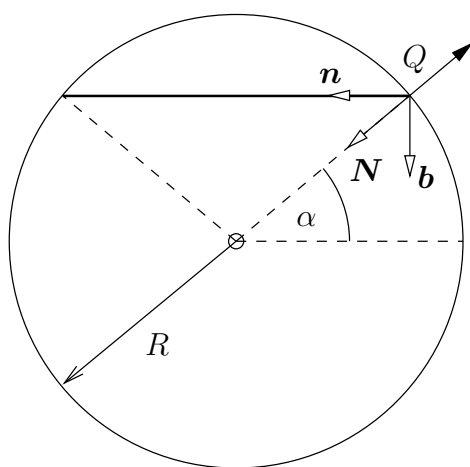


Figura 14.21: *Hilo pesado situado sobre una esfera lisa, en un paralelo de latitud  $\alpha$ .*

La normal principal del hilo  $\mathbf{n}$  está dirigida hacia el centro del paralelo, la normal a la superficie  $\mathbf{N}$  hacia el centro de la esfera, y la binormal  $\mathbf{b}$  es perpendicular al plano del paralelo, es decir vertical. La carga del peso distribuido es  $\mathbf{q} = q\mathbf{b}$ . Denominando  $\mathbf{Q} = -Q\mathbf{N}$  a la reacción de la esfera sobre el hilo, la ecuación de equilibrio en la dirección de  $\mathbf{b}$  (14.30<sup>3</sup>) arroja:

$$-Q \sin \alpha + q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{q}{\sin \alpha}.$$

<sup>5</sup>D.J. Struik, *Geometría Diferencial Clásica*, ed. Aguilar, (apartado 2.5).



Por otra parte, la ecuación de equilibrio en la dirección  $\mathbf{N}$  (14.31) conduce a:

$$q \operatorname{sen} \alpha - Q + \frac{T}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = qR \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \operatorname{sen} \alpha \right) = qR \cos \alpha \cotg \alpha.$$

### 14.4.3. Enrollamiento sobre tambor rugoso

Si el hilo está apoyado sobre una superficie rugosa, se producen fuerzas tangenciales debido al rozamiento y el problema se complica considerablemente. En principio se podría tratar como el caso estudiado en el apartado anterior, considerando las fuerzas de rozamiento como cargas aplicadas  $q$ . Sin embargo las fuerzas de rozamiento son por lo general desconocidas a priori, y definidas por desigualdades ( $R \leq \mu N$ ), lo cual complica aún más su tratamiento.

Un caso particular importante y que tiene solución analítica es el del enrollamiento sobre un tambor rugoso. Haremos para ello las siguientes hipótesis:

1. No existen cargas exteriores aplicadas sobre el hilo;
2. El tambor tiene una sección recta convexa (no es necesario exigir que ésta sea circular);
3. El hilo se enrolla según una sección recta del tambor.

Se desea calcular la situación límite del equilibrio, cuando al tirar de un extremo más que del otro el hilo está a punto de deslizarse sobre el tambor. En esta situación límite, por ser inextensible el hilo, el rozamiento se agota simultáneamente en toda la longitud del hilo apoyada sobre el tambor. Suponemos que se está tirando desde un extremo con una tensión  $T$ , mientras que en el origen existe una tensión  $T_0$  fija. Por tanto el rozamiento se moviliza en sentido contrario a  $T$  (figura 14.22).

Planteamos las ecuaciones de equilibrio (14.2), denominando  $q_n$  la reacción normal del tambor (figura 14.22).

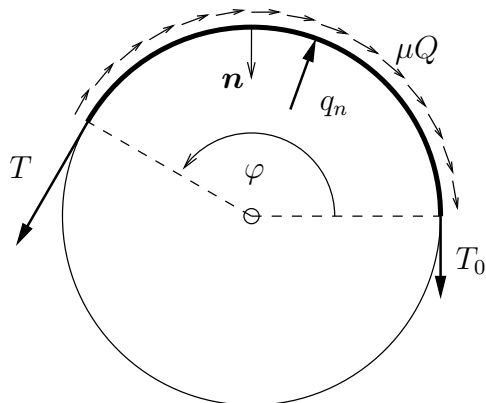
- Según la tangente:

$$\frac{dT}{ds} - \mu q_n = 0, \quad (14.32)$$

- Según la normal:

$$\frac{T}{R} - q_n = 0. \quad (14.33)$$

Figura 14.22: *Hilo enrollado sobre un tambor rugoso, en el cual se tira desde  $T$ , en situación de equilibrio estricto (a punto de deslizar)*



El signo negativo de  $q_n$  proviene de considerar sentido positivo el opuesto a la normal  $\mathbf{n}$ , es decir hacia el lado convexo del tambor.

De (14.33) obtenemos  $q_n = T/R$ , por lo que de (14.32)

$$\frac{dT}{ds} = \mu \frac{T}{R},$$

y separando variables

$$\frac{dT}{T} = \mu \frac{ds}{R} = \mu d\varphi.$$

Integramos entre dos puntos, el origen  $\varphi = 0$ , donde suponemos que la tensión vale  $T = T_0$ , y un punto genérico  $\varphi$  donde la tensión vale  $T$ :

$$\boxed{T = T_0 e^{\mu\varphi}} \quad (14.34)$$

Esta fórmula indica el aumento de la tensión producido por el rozamiento, desde un punto en  $\varphi = 0$  con tensión  $T_0$ , hasta un punto en que el hilo se ha enrollado un ángulo  $\varphi$ , desde el que se tira con tensión  $T > T_0$ .

# Apéndice A

## Resumen de álgebra vectorial y tensorial

Se resumen aquí algunos conceptos y definiciones importantes de vectores y tensores, con pretensión de sencillez y brevedad. En aras de esta sencillez, nos limitaremos al espacio Euclídeo ordinario  $\mathbb{E}^3$  y a coordenadas cartesianas.

### A.1. Escalares, puntos y vectores

En lo que sigue restringiremos nuestra atención a los números reales  $\mathbb{R}$  y el espacio geométrico ordinario  $\mathbb{E}^3$ , espacio afin de dimensión 3 y dotado de la métrica euclídea.

Los elementos  $\alpha \in \mathbb{R}$  se denominan *escalares* y pueden considerarse como *tensores de orden cero*.

Los elementos  $A \in \mathbb{E}^3$  se denominan *puntos*. El segmento orientado con origen en un punto  $A$  y final en otro  $B$  se denomina *vector*:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = B - A. \quad (\text{A.1})$$

El conjunto de los vectores, junto con las operaciones de suma de vectores mediante la regla del paralelogramo y producto por un escalar tiene la estructura de *espacio vectorial*, denominándose  $\mathcal{V}$ , espacio vectorial asociado a  $\mathbb{E}^3$ .

## A.2. Producto escalar y vectorial

El módulo de un vector es la distancia entre los puntos origen y final del mismo,  $|\mathbf{v}| = |\overrightarrow{AB}| = \text{dist}(A, B)$ . El producto escalar de dos vectores es un escalar  $\in \mathbb{R}$ , cuyo valor se define geoméricamente como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta, \quad (\text{A.2})$$

siendo  $\theta$  el ángulo formado por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Cuando el producto escalar de dos vectores es nulo ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ) se dice que son *normales* o *perpendiculares*. El producto escalar es *conmutativo*, es decir,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.3})$$

## A.3. Bases y coordenadas

El espacio vectorial euclídeo  $\mathcal{V}$  tiene dimensión 3, es decir que se puede establecer una base de 3 vectores linealmente independientes ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) que permite expresar un vector cualquiera  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  como combinación lineal,

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.4})$$

Los coeficientes  $(v_1, v_2, v_3)$  se denominan coordenadas de  $\mathbf{v}$  en la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Se puede escoger esta base de forma que sea *ortonormal*, es decir formada por vectores unitarios y mutuamente perpendiculares, verificándose

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \quad (\text{A.5})$$

(Donde los coeficientes  $\delta_{ij}$  ó *deltas de Kronecker* se definen por  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  y  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ).

En lo que sigue, salvo indicación expresa en contra, supondremos siempre bases ortonormales<sup>1</sup>. Se denomina *sistema de referencia cartesiano* al conjunto  $\{O; \mathbf{e}_i\}$  formado por un punto  $O \in \mathbb{E}^3$  y una base  $\{\mathbf{e}_i\}$  para el espacio vectorial asociado  $\mathcal{V}$ . De esta forma, las coordenadas cartesianas de un punto  $X \in \mathbb{E}^3$  se definen como las coordenadas del vector  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$ .

En función de sus coordenadas en una base ortonormal, el producto escalar de dos vectores puede expresarse como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = u_i v_i. \quad (\text{A.6})$$

<sup>1</sup>Esta restricción da lugar a los denominados *tensores cartesianos*.

En esta fórmula y en lo que sigue, con objeto de simplificar la notación, siempre que en un monomio haya un índice repetido dos veces se entenderá que la expresión se suma sobre el rango del índice, salvo que se indique expresamente lo contrario.

Mediante el producto escalar se puede asociar a un vector cualquiera  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  una aplicación lineal  $\mathbf{v}^\flat : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , de forma que le haga corresponder su producto escalar por  $\mathbf{v}$ :

$$\mathcal{V} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.7})$$

Esta propiedad permite identificar los vectores como *tensores de orden uno*.

## A.4. Tensores de orden dos

Se denomina *tensor de orden dos* sobre un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  a una aplicación lineal  $\mathbf{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ , de forma que

$$\mathcal{V} \ni \mathbf{v} \mapsto \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.8})$$

La linealidad se traduce en las propiedades siguientes

1.  $\mathbf{T} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$
2.  $\mathbf{T} \cdot (\alpha \mathbf{u}) = \alpha (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}$

El conjunto de tensores de orden dos sobre  $\mathcal{V}$  se denota por  $\mathcal{V}^2$ . Se define el *tensor nulo*  $\mathbf{O} \in \mathcal{V}^2$  por  $\mathbf{O} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , y el *tensor identidad o unidad*  $\mathbf{1} \in \mathcal{V}^2$  por  $\mathbf{1} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ .

Además, en  $\mathcal{V}^2$  se definen las propiedades y operaciones siguientes.

1. *Igualdad.* Dos tensores  $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$  son iguales si y sólo si

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.9})$$

2. *Suma.* Dados  $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$  la suma  $\mathbf{S} + \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$  se define por

$$(\mathbf{S} + \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\text{A.10})$$

3. *Producto por un escalar.* Dado  $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  se define el producto  $\alpha \mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$  por

$$(\alpha \mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} = \alpha (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\text{A.11})$$

4. *Producto o composición de tensores.* Dados  $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$  se define el producto  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$  por

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\text{A.12})$$

Con estas definiciones, es fácil comprobar que la suma de tensores es conmutativa y asociativa, así como el producto por un escalar. Asimismo, el producto por un escalar y el producto de tensores son distributivos respecto de la suma.

Se definen las *componentes de un tensor*  $\mathbf{S}$  en una base cualquiera  $\{\mathbf{e}_i\}$  como los coeficientes escalares

$$S_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_j) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (\text{A.13})$$

Por tanto, la expresión en componentes de la aplicación de un tensor sobre un vector es

$$\mathbf{v} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad v_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{S} \cdot u_j \mathbf{e}_j) = S_{ij} u_j. \quad (\text{A.14})$$

Las componentes de un tensor se pueden escribir en forma de matriz,

$$[\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

indicando el primer índice fila y el segundo columna de la matriz. Nótese que para diferenciar la matriz de componentes del tensor respecto del tensor mismo se emplea la notación  $[\mathbf{S}]$  en lugar de  $\mathbf{S}$ . La definición de un tensor es intrínseca, independiente de la base, mientras que sus componentes son distintas según la base elegida.

Análogamente, escribiremos las componentes de un vector  $\mathbf{v}$  en una base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  mediante una matriz columna  $\{\mathbf{v}\}$  (el empleo de llaves indicará la estructura de matriz columna). La traspuesta de ésta será una matriz fila, que denotaremos por  $\|\mathbf{v}\| = \{\mathbf{v}\}^T$  (el empleo de doble barra vertical indicará la estructura de matriz fila):

$$\{\mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}; \quad \|\mathbf{v}\| = \{\mathbf{v}\}^T = (v_1 \quad v_2 \quad v_3). \quad (\text{A.16})$$

De esta forma, en una base dada, el producto de tensores se traduce en el correspondiente producto de matrices,

$$\mathbf{U} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad U_{ij} = S_{ik} T_{kj} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{U}] = [\mathbf{S}][\mathbf{T}]. \quad (\text{A.17})$$

Por otra parte, el desarrollo de un vector en función de los vectores de la base puede expresarse mediante la matriz formada por estos últimos,

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \{\mathbf{e}_i\}^T \{\mathbf{v}\}. \quad (\text{A.18})$$

El *producto tensorial* (también llamado diádico) de dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  se define como un tensor de orden dos, de acuerdo a

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.19})$$

La expresión en componentes es

$$\mathbf{u} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad u_i = a_i b_j v_j. \quad (\text{A.20})$$

Las componentes del tensor  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  son

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}]_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot ((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_j)) = a_i b_j, \quad (\text{A.21})$$

lo que en expresión matricial es

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}] = \{\mathbf{a}\} \{\mathbf{b}\}^T. \quad (\text{A.22})$$

Mediante el producto tensorial de los vectores de la base, se puede escribir el desarrollo de un tensor en función de sus componentes,

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.23})$$

## A.5. Cambio de base

Establezcamos un cambio de base, desde  $\{\mathbf{e}_i\}$  a una nueva base  $\{\mathbf{e}'_i\}$ , ambas ortonormales. El cambio se puede caracterizar mediante un tensor  $\mathbf{A}$  que transforma los vectores de la antigua base en los de la nueva:

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.24})$$

Desarrollando las componentes de los nuevos vectores  $\mathbf{e}'_i$  en la base  $\mathbf{e}_i$ ,

$$\mathbf{e}'_i = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_i) \mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_j \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i)) \mathbf{e}_j = A_{ji} \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.25})$$

Empleando la matriz de coordenadas  $[\mathbf{A}] = [A_{ij}]$  en la base  $\{\mathbf{e}_i\}$ , esta relación puede formularse matricialmente como

$$(\mathbf{e}'_1 \quad \mathbf{e}'_2 \quad \mathbf{e}'_3) = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3) [\mathbf{A}] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}]^T \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

Las componentes de  $[\mathbf{A}]$  tienen el significado siguiente:

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j. \quad (\text{A.27})$$

Asimismo, puede obtenerse una expresión directa del tensor de cambio mediante:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{e}_k. \quad (\text{A.28})$$

Veamos ahora la propiedad de *ortogonalidad* de la matriz de cambio. Para ello, comenzamos por expresar los vectores de la base antigua ( $\mathbf{e}_j$ ) en la nueva base,

$$\mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_i) \mathbf{e}'_i = A_{ji} \mathbf{e}'_i. \quad (\text{A.29})$$

Si sustituimos esta expresión en (A.25) resulta

$$\mathbf{e}'_i = A_{ji} A_{jk} \mathbf{e}'_k \quad (\text{A.30})$$

(habiendo sustituido el índice mudo  $i$  de (A.29) por  $k$ ). De esta forma se deduce inmediatamente la condición que deben cumplir las componentes del tensor de cambio de base,

$$\delta_{ik} = A_{ji} A_{jk} \Leftrightarrow [\mathbf{A}]^T [\mathbf{A}] = [\mathbf{1}]. \quad (\text{A.31})$$

Esta propiedad, obtenida basándose en la ortonormalidad de ambas bases, caracteriza la matriz de cambio de base como *matriz ortogonal*:

$$[\mathbf{A}]^T = [\mathbf{A}]^{-1}. \quad (\text{A.32})$$

Veamos ahora la transformación de coordenadas de un vector, al cambiar a la nueva base:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_i \mathbf{e}_i \\ &= v'_j \mathbf{e}'_j = v'_j A_{ij} \mathbf{e}_i; \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

luego

$$v_i = A_{ij} v'_j \Rightarrow \{\mathbf{v}\} = [\mathbf{A}] \{\mathbf{v}'\} \quad (\text{A.34})$$

$$v'_j = A_{ij} v_i \Rightarrow \{\mathbf{v}'\} = [\mathbf{A}]^T \{\mathbf{v}\} \quad (\text{A.35})$$



## A.6. Operaciones y clases especiales de tensores

Dado un tensor  $\mathbf{S}$  definimos su *traspuesto*,  $\mathbf{S}^T$ , como otro tensor que verifica

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.36})$$

Decimos que un tensor  $\mathbf{S}$  es *simétrico* si  $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$ , mientras que será *hemi-simétrico* si  $\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}$ .

Un tensor  $\mathbf{S}$  admite *inverso* si existe otro tensor  $\mathbf{S}^{-1}$  tal que

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{1}. \quad (\text{A.37})$$

Decimos que un tensor  $\mathbf{Q}$  es *ortogonal* si  $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$ , es decir,

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{1}. \quad (\text{A.38})$$

El tensor  $\mathbf{A}$  que define un cambio entre bases ortonormales, teniendo en cuenta (A.31), es un tensor ortogonal:

$$[\mathbf{A}]^T[\mathbf{A}] = [\mathbf{1}] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}. \quad (\text{A.39})$$

Un tensor ortogonal  $\mathbf{A}$  se denomina *rotación* si en el cambio de base asociado a partir de un triedro a derechas (es decir, que verifica  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ ) se obtiene otro triedro a derechas. Más abajo (apartado A.11) veremos que una condición equivalente es que su determinante debe valer +1.

## A.7. Cambio de coordenadas de un tensor

Sea un cambio de base definido por las expresiones tensoriales  $\mathbf{e}'_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ), o de forma equivalente, por las expresiones algebraicas  $\mathbf{e}'_i = A_{ji}\mathbf{e}_j$ . Un tensor  $\mathbf{T}$  define una aplicación lineal en  $\mathcal{V}$ ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}, \quad (\text{A.40})$$

que expresada en unas u otras coordenadas resulta en las siguientes expresiones matriciales:

$$\{\mathbf{v}\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{u}\}, \quad \{\mathbf{v}'\} = [\mathbf{T}']\{\mathbf{u}'\}. \quad (\text{A.41})$$

Teniendo en cuenta las relaciones de cambio de coordenadas para los vectores, (A.34, A.35):

$$\{\mathbf{v}'\} = [\mathbf{A}]^T\{\mathbf{v}\} = [\mathbf{A}]^T[\mathbf{T}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{A}]^T[\mathbf{T}][\mathbf{A}]\{\mathbf{u}'\}; \quad (\text{A.42})$$

por lo que

$$[\mathbf{T}'] = [\mathbf{A}]^T[\mathbf{T}][\mathbf{A}] \quad \Leftrightarrow \quad T'_{ij} = T_{kl}A_{ki}A_{lj}. \quad (\text{A.43})$$

## A.8. Coeficientes de permutación

Se definen a partir de los vectores de una base ortonormal  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  mediante la expresión general siguiente:

$$\epsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k. \quad (\text{A.44})$$

Desarrollando la expresión, comprobamos que su valor es  $+1$ ,  $-1$  ó  $0$  según el caso:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si la permutación } (i, j, k) \text{ es par:} \\ & (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ó } (3, 1, 2); \\ -1 & \text{si la permutación } (i, j, k) \text{ es impar:} \\ & (1, 3, 2), (2, 1, 3) \text{ ó } (3, 2, 1); \\ 0 & \text{si en } (i, j, k) \text{ algún índice está repetido.} \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

Se comprueba fácilmente la propiedad de hemisimetría para los coeficientes,

$$\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk}; \quad \epsilon_{ikj} = -\epsilon_{ijk}. \quad (\text{A.46})$$

A partir de (A.44) se deduce inmediatamente que  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$ , por lo que el producto vectorial de dos vectores cualesquiera será

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \epsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{e}_k. \quad (\text{A.47})$$

Análogamente, el producto mixto de tres vectores vale

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k. \quad (\text{A.48})$$

Los coeficientes hemisimétricos  $\epsilon_{ijk}$  corresponden a las coordenadas de un *tensor de orden tres*, aunque no entraremos en más detalles sobre este aspecto.

## A.9. Forma cuadrática asociada a un tensor

Un tensor de orden 2 cualquiera  $\mathbf{T}$  define una forma cuadrática asociada,  $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , de forma que

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.49})$$

Esta forma cuadrática es bilineal, es decir, lineal en cada uno de sus dos argumentos. Decimos que el tensor  $\mathbf{T}$  es *definido positivo* si la forma cuadrática asociada lo es, es decir,

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) > 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}. \quad (\text{A.50})$$

Análogamente, cabría definir los conceptos de tensor *definido negativo*, *semidefinido negativo*, *semidefinido positivo* e *indefinido*.

## A.10. Vector axial asociado a un tensor hemisimétrico

La forma cuadrática asociada a un tensor hemisimétrico es igualmente *hemisimétrica*:

$$\text{si } \mathbf{T} = -\mathbf{T}^T, \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.51})$$

Particularizando esta propiedad para los vectores de la base ( $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_j$ ), deducimos que la matriz de coordenadas es también hemisimétrica:

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad \forall i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{A.52})$$

Una propiedad importante de un tensor hemisimétrico es que existe siempre un *vector axial asociado*, que lo hace equivalente a un producto vectorial:

$$\mathbf{W} \in \mathcal{V}^2, \quad \mathbf{W} = -\mathbf{W}^T \quad \Rightarrow \quad \exists \mathbf{w} \in \mathcal{V}, \quad \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.53})$$

Desarrollando las componentes de esta expresión,

$$W_{ki}x_i\mathbf{e}_k = \epsilon_{ijk}w_jx_j\mathbf{e}_k, \quad (\text{A.54})$$

e igualando éstas,

$$\underbrace{\epsilon_{ijk}w_jx_j}_{=\epsilon_{jik}w_jx_i} = W_{ki}x_j, \quad (\text{A.55})$$

por lo que

$$W_{ij} = w_k\epsilon_{kji}. \quad (\text{A.56})$$

Asimismo, se puede invertir esta relación para obtener

$$w_i = \frac{1}{2}\epsilon_{jik}W_{jk}. \quad (\text{A.57})$$

El tensor hemisimétrico asociado a un vector  $\mathbf{w}$  lo denominaremos también  $\hat{\mathbf{w}}$ , ó  $\mathbf{w} \wedge$ . La equivalencia es por tanto

$$\mathbf{W} = \mathbf{w} \wedge = \hat{\mathbf{w}} \quad (\text{A.58})$$

$\Updownarrow$

$$\{\mathbf{w}\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}, \quad [\mathbf{W}] = [\hat{\mathbf{w}}] = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.59})$$

## A.11. Traza y determinante

La *traza* es una operación tensorial lineal que asocia a un tensor de orden dos un escalar. Aplicada al producto tensorial de dos vectores, cumple

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.60})$$

Por tanto, para los vectores de la base —ortonormal—,

$$\text{tr}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}, \quad (\text{A.61})$$

y aplicando esta expresión en el desarrollo de un tensor  $\mathbf{T}$ ,

$$\text{tr } \mathbf{T} = \text{tr}(T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = T_{ij} \delta_{ij} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}. \quad (\text{A.62})$$

Conviene recalcar que, al tratarse de una operación tensorial intrínseca, el resultado es independiente del sistema de coordenadas en el que se calcule. Por este motivo se dice que la traza es un *invariante* del tensor.

El *determinante* de un tensor es un escalar cuyo valor coincide con el determinante de la matriz de componentes asociada en una base dada.

$$\det \mathbf{T} = \det[\mathbf{T}]. \quad (\text{A.63})$$

En función de los coeficientes de permutación puede expresarse como

$$\det \mathbf{T} = \epsilon_{ijk} T_{i1} T_{j2} T_{k3} = \epsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{k3}. \quad (\text{A.64})$$

Se trata igualmente de una operación tensorial intrínseca, por lo que el resultado es el mismo independientemente de la base empleada para calcular las coordenadas. Es por tanto otro *invariante* del tensor.

El determinante tiene las propiedades siguientes.

1. Un tensor cuyo determinante es no nulo posee siempre inverso:

$$\det \mathbf{T} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \exists \mathbf{T}^{-1} \mid \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{1}. \quad (\text{A.65})$$

2. El determinante de un producto de tensores es el producto de los determinantes,

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \quad (\text{A.66})$$

3. El determinante del tensor identidad vale 1, y el del inverso de un tensor es el inverso del determinante,

$$\det \mathbf{1} = 1, \quad \det \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{T}}. \quad (\text{A.67})$$

4. El determinante del traspuesto de un tensor es igual al determinante del tensor original,

$$\det(\mathbf{T}^T) = \det(\mathbf{T}) \quad (\text{A.68})$$

5. El determinante de un tensor ortogonal vale  $\pm 1$ ,

$$1 = \det(\mathbf{1}) = \det(\mathbf{R}^T \mathbf{R}) = (\det \mathbf{R})^2 \Rightarrow \det \mathbf{R} = \pm 1. \quad (\text{A.69})$$

Se dice que un tensor ortogonal corresponde a una *rotación propia* (ver apartado [A.6](#)) cuando su determinante vale  $+1$ . En este caso puede comprobarse que un triedro a derechas es transformado siempre en otro triedro a derechas.