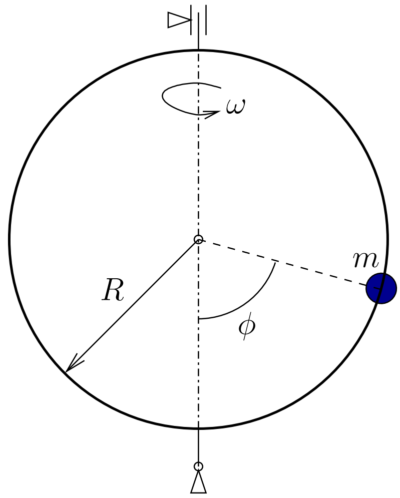
Mecánica

PRÁCTICA DE ALUMNOS, GRUPO B (24 de octubre de 2008)

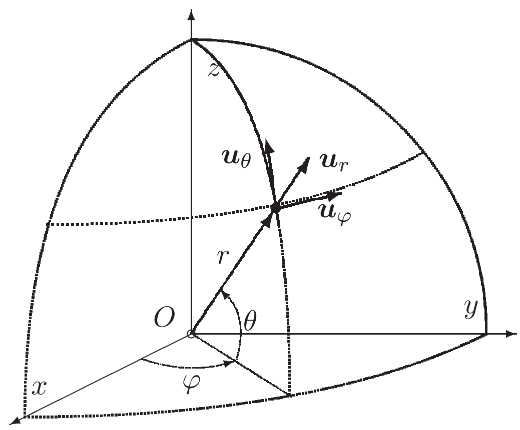
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Se considera un aro circular de radio R, que puede girar alrededor de un diámetro vertical fijo, teniendo una velocidad de rotación impuesta de valor ω alrededor del mismo. Una partícula pesada de masa m está obligada a permanecer en el aro, sobre el cual puede deslizar sin rozamiento. Se pide:



1. Obtener la expresión de la aceleración de la partícula en una configuración genérica.
2. Ecuación que expresa la dinámica del movimiento de la partícula relativa al aro, en función del ángulo ϕ y sus derivadas (ecuación diferencial del movimiento).
3. Expresiones de las reacciones del aro sobre la partícula, en función de ϕ y sus derivadas. Calcular el par que sería necesario realizar sobre el aro para producir el movimiento impuesto ω.
4. ¿Se conserva la energía mecánica de la partícula? ¿y su momento cinético respecto al eje vertical? Razonar las respuestas.

1.— Para calcular la expresión de la aceleración se pueden emplear las coordenadas esféricas. Según se ha desarrollado en el libro de texto, con las coordenadas de la figura:



$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} = {} & (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r \\ & + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + r\ddot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta \\ & + (2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\theta - 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta + r\ddot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{u}_\varphi \quad (1)\end{aligned}$$

Podemos considerar el aro como un meridiano de la esfera, que gira con velocidad $\dot{\varphi} = \omega$. Al ser ω constante vale $\ddot{\varphi} = 0$. Las otras coordenadas son $r = R$ y $\theta = \phi - \pi/2$, por lo que $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \dot{\phi}$, $\ddot{\theta} = \ddot{\phi}$. La dirección $\boldsymbol{u}_\theta$ define la tangente al aro, $\boldsymbol{u}_r$ la normal dentro de su plano y $\boldsymbol{u}_\varphi$ la normal al plano del aro. Las componentes de la aceleración en estas direcciones son:

$$\begin{aligned} a_\theta &= -R\omega^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi + R\ddot{\phi} \\ a_r &= -R\omega^2\operatorname{sen}^2\phi - R\dot{\phi}^2 \\ a_\varphi &= 2R\dot{\phi}\omega\cos\phi\,. \end{aligned} \quad (2)$$

Nota: Otra forma de calcular estas componentes sería mediante la descomposición de movimientos, considerando el arrastre debido a la rotación $\boldsymbol{\Omega} = \omega\boldsymbol{k}$ del aro y el movimiento relativo $\boldsymbol{v}_{\text{rel}} = R\dot{\phi}\,\boldsymbol{u}_\theta$ de la partícula en el mismo. De esta manera, se obtiene

$$\boldsymbol{a}_{\text{arr}} = \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}) = -R\omega^2\operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{u}_\rho = -R\omega^2\operatorname{sen}\phi(\cos\phi\,\boldsymbol{u}_\theta + \operatorname{sen}\phi\,\boldsymbol{u}_r) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{rel}} = R\ddot{\phi}\,\boldsymbol{u}_\theta - R\dot{\phi}^2\,\boldsymbol{u}_r \quad (4)$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{cor}} = 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{v}_{\text{rel}} = 2R\omega\dot{\phi}\cos\phi\,\boldsymbol{u}_\varphi\,, \quad (5)$$

donde $\boldsymbol{u}_\rho$ es el vector unitario en el plano Oxy y el plano meridiano. Se comprueba que la expresión de la aceleración $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}}$ es la misma que la obtenida antes en (2).

2.— La única fuerza aplicada sobre la partícula es la gravedad, $\boldsymbol{f} = -mg\,\boldsymbol{k}$. El movimiento permitido por el aro es únicamente en dirección tangencial, por lo que proyectando la ecuación fundamental de la dinámica resulta

$$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}_\theta = ma_\theta \quad \Rightarrow \quad -mg \operatorname{sen}\phi = m(-R\omega^2 \operatorname{sen}\phi\cos\phi + R\ddot{\phi})\,. \tag{6}$$

3.— La reacción del aro sobre la partícula tiene dos componentes, según las dos normales al aro: $\boldsymbol{R} = R_r\,\boldsymbol{u}_r + R_\varphi\,\boldsymbol{u}_\varphi$. Las expresiones las obtenemos proyectando la ecuación fundamental de la dinámica en estas dos direcciones:

$$R_r = -mg\cos\phi - m(R\omega^2 \operatorname{sen}^2\phi + R\dot{\phi}^2) \tag{7}$$

$$R_\varphi = 2mR\omega\dot{\phi}\cos\phi\,. \tag{8}$$

Se puede interpretar que R_φ proviene de un par $\boldsymbol{M} = M\,\boldsymbol{k}$ que produce el giro alrededor del eje vertical, siendo su valor la reacción por el brazo,

$$M = R_\varphi \cdot R\operatorname{sen}\phi = 2mR^2\dot{\phi}\omega\operatorname{sen}\phi\cos\phi\,. \tag{9}$$

4.— El momento cinético no se conserva debido al par antes mencionado.

La energía cinética tampoco se conserva. Aunque la componente de la reacción R_r no trabaja, la componente R_φ sí lo hace, variando la energía del sistema al objeto de mantener la velocidad prescrita ω. El sistema por tanto *no es conservativo*.

Puede observarse que si la partícula estuviera fija sobre el aro el par necesario sería nulo (tomando $\dot{\phi} = 0$ en (9)), en este caso se conservaría tanto el momento cinético como la energía.