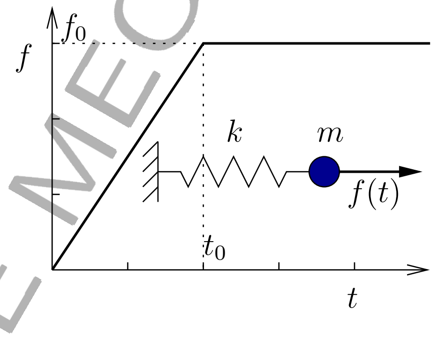
Mecánica

PRÁCTICA DE ALUMNOS, GRUPO B (6 de noviembre de 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Se considera un sistema dinámico formado por una partícula de masa m y un resorte lineal de constante k, que une la partícula con un punto fijo. La partícula se puede mover sobre una recta horizontal. Estando la partícula en reposo y el resorte en su posición natural se aplica una fuerza f_0 mediante una rampa de duración t_0, manteniéndose constante después (ver figura). Se sabe que la duración de la rampa es tal que $t_0\omega_0 = 3\pi/2$, siendo ω_0 la frecuencia propia del sistema. Se pide:



1. Obtener la respuesta del sistema para $0 \leq t < t_0$.
2. Obtener la respuesta del sistema para $t_0 \leq t$.
3. Calcular el factor de amplificación dinámica, definido como el cociente entre la máxima amplitud dinámica y la máxima amplitud en condición estática.
4. Repetir el cálculo de la respuesta para el caso 1 suponiendo que hay un amortiguamiento viscoso de valor el 5 % del crítico.

⋆

1.— La ecuación del movimiento en la parte ascendente de la rampa ($0 \leq t < t_0$) es la siguiente:

$$m\ddot{x} + kx = f_0\frac{t}{t_0}\,, \tag{1}$$

donde x es la elongación del resorte medida a partir de su posición natural. La solución de esta ecuación se obtiene como suma de la general de la homogénea y la particular de la completa,

$$x_1(t) = x_h(t) + x_p(t)\,; \tag{2}$$

$$x_h(t) = a\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \phi) \quad \text{con } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,; \qquad x_p(t) = qt + r \quad \text{con } q = \frac{f_0}{kt_0}, r = 0\,. \tag{3}$$

Las constantes (a, ϕ) se obtienen obligando a las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} x_1(0) &= a\,\mathrm{sen}\,\phi = 0 \quad &\Rightarrow \quad &\phi = 0 \\ \dot{x}_1(0) &= a\omega_0\cos\phi + \frac{f_0}{kt_0} \quad &\Rightarrow \quad &a = -\frac{f_0}{k\omega_0 t_0} \end{aligned} \tag{4}$$

En resumen la solución es

$$x_1(t) = \frac{f_0}{kt_0}\left(-\frac{1}{\omega_0}\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t + t\right) = \frac{f_0}{k}\left(-\frac{2}{3\pi}\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t + \frac{t}{t_0}\right)\,. \tag{5}$$

2.— La solución de la ecuación en esta fase la escribiremos, por conveniencia, en función de $t' = t - t_0$. Al estar sometido a una fuerza constante, la solución general es

$$x_2(t') = a' \operatorname{sen}(\omega_0 t' + \phi') + \frac{f_0}{k} \, . \tag{6}$$

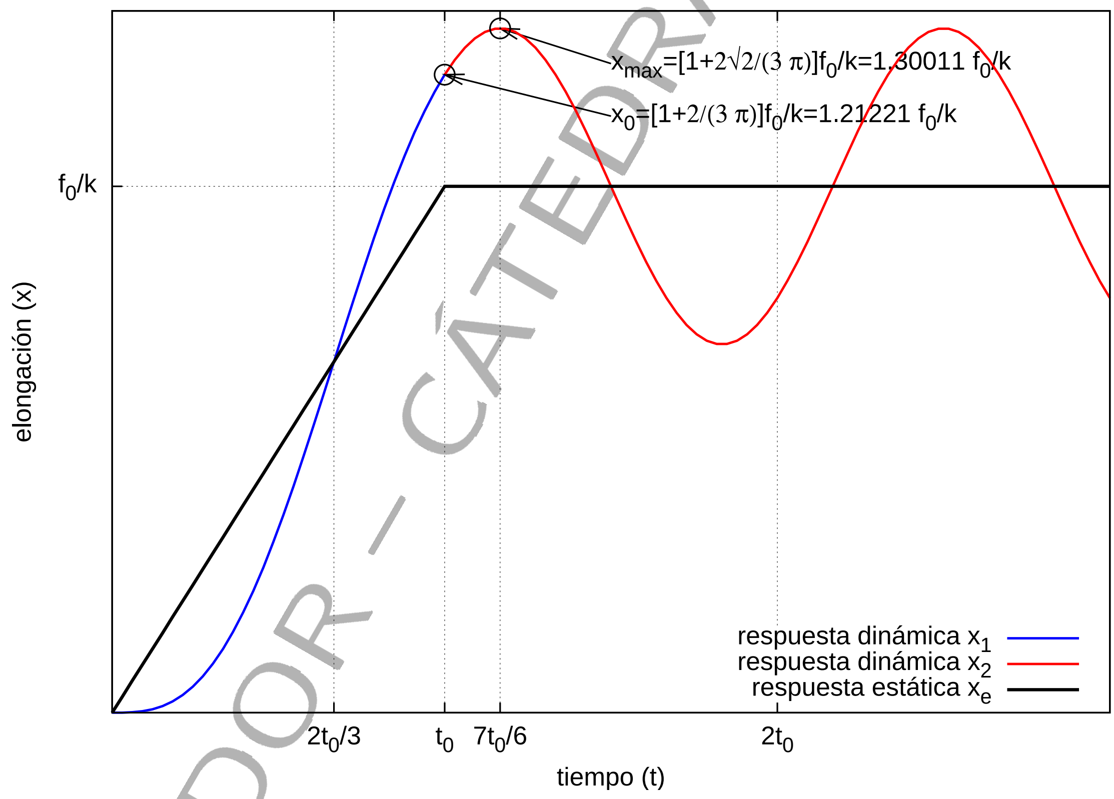
Las condiciones iniciales de esta fase son las que corresponden al final de la fase anterior, es decir $t = t_0$ en (5):

$$\begin{aligned} x_2(0) = x_1(t_0) &= \frac{f_0}{k t_0}\left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{3\pi}{2\omega_0}\right) = \frac{f_0}{k}\left(1 + \frac{2}{3\pi}\right) ; \\ \dot{x}_2(0) = \dot{x}_1(t_0) &= \frac{f_0}{k t_0}(-0 + 1) = \frac{f_0}{k}\frac{2}{3\pi}\omega_0 \, . \end{aligned} \tag{7}$$

Obligando a estas condiciones se obtienen las constantes de la solución (6):

$$a' = \frac{f_0}{k}\frac{2\sqrt{2}}{3\pi} ; \quad \phi' = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x_2(t') = \frac{f_0}{k}\left[\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\operatorname{sen}(\omega_0 t' + \pi/4) + 1\right] . \tag{8}$$

La gráfica de la solución en ambas fases se muestra en la figura siguiente, donde se comprueba la continuidad de la respuesta y de su derivada.



3.— La respuesta estática del resorte para una fuerza $f(t)$ es $x_e(t) = f(t)/k$, es decir resulta una respuesta en forma de rampa idéntica a la fuerza aplicada salvo el factor de escala k. La gráfica se muestra en la figura anterior, donde se comprueba que la respuesta dinámica supera a la estática, como era de esperar.

Para obtener el factor de amplificación dinámica (FAD) debemos en primer lugar calcular el máximo de la respuesta dinámica. Para ello derivamos la expresión (8) e igualamos a cero,

$$\dot{x}_2 = \frac{f_0}{k}\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\omega_0 \cos(\omega_0 t' + \pi/4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 t' + \pi/4 = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{\pi/4}{\omega_0} = \frac{t_0}{6} \, . \tag{9}$$

La amplitud máxima se obtiene particularizando (8) para este instante,

$$x_{\text{máx}} = x_2(t_0/6) = \frac{f_0}{k}\left[\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\cdot 1 + 1\right] . \tag{10}$$

En la figura anterior se representa el punto obtenido de máxima respuesta. El factor de amplificación se obtiene directamente como

$$\text{FAD} = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} = 1{,}30011\,. \tag{11}$$

4.— En este caso en que hay amortiguamiento ($\zeta = 0{,}05$) el desarrollo es similar, aunque las operaciones son algo más engorrosas. La ecuación del movimiento en la parte ascendente de la rampa ($0 \leq t < t_0$) es ahora

$$m\ddot{x} + 2\zeta m\omega_0\dot{x} + kx = \frac{f_0}{k}\frac{t}{t_0}\,. \tag{12}$$

La solución general es

$$x_1(t) = a\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) + \frac{f_0}{kt_0}\left(t - \frac{2\zeta}{\omega_0}\right) , \tag{13}$$

siendo $\omega = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$. Consideramos en este caso $t_0\omega = 3\pi/2$. Las constantes (a, ϕ) se obtienen obligando a las condiciones iniciales ($x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0$), resultando

$$a = \frac{f_0}{kt_0}\frac{1}{\omega}\,; \quad \cos\phi = 2\zeta^2 - 1\,. \tag{14}$$

En resumen la solución es

$$x_1(t) = \frac{f_0}{kt_0}\left[\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) + \left(t - \frac{2\zeta}{\omega_0}\right)\right] . \tag{15}$$

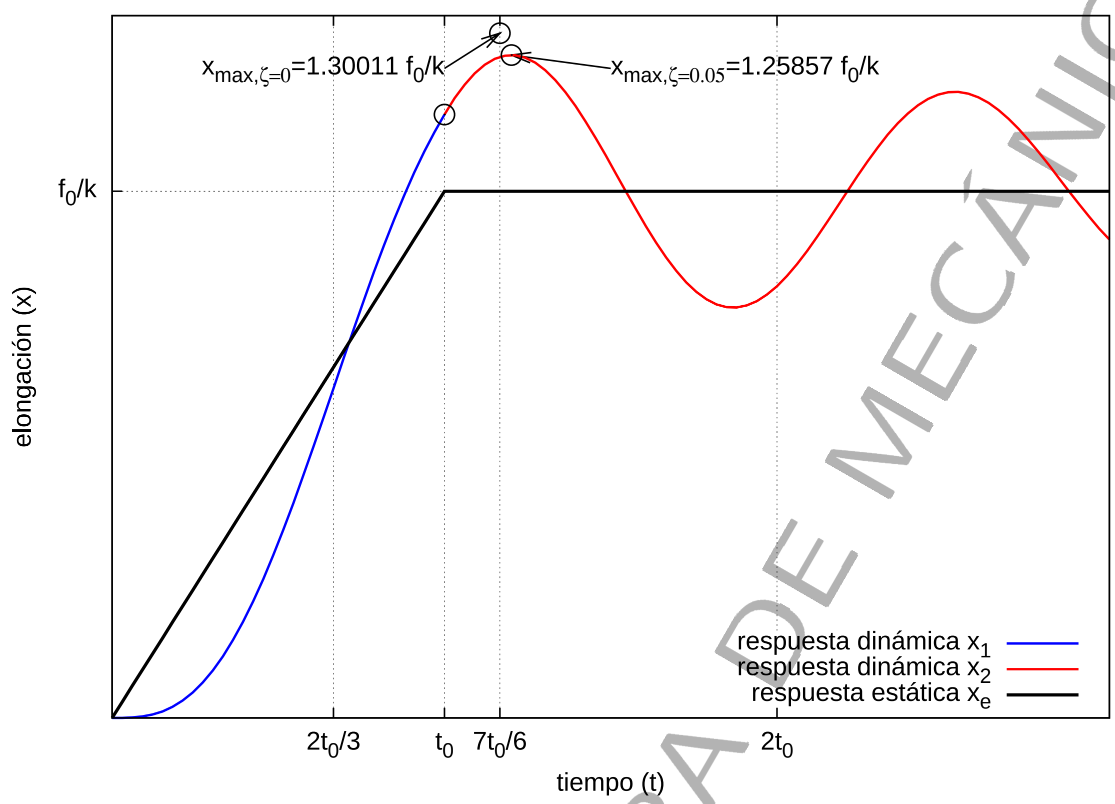
La solución general en la fase de carga constante, en función de $t' = t - t_0$, es

$$x_2(t) = a'\mathrm{e}^{-\zeta\omega_0 t'}\,\mathrm{sen}(\omega t' + \phi') + \frac{f_0}{k}\,, \tag{16}$$

Imponiendo las condiciones iniciales de esta fase a partir de las finales de la fase anterior y operando se obtienen las constantes:

$$a' = -0{,}27148\frac{f_0}{k}\,; \quad \phi' = -2{,}56935\,\mathrm{rad}\,. \tag{17}$$

El máximo se produce para $t = 1{,}20154t_0$ y su valor es $x_{\text{máx}} = 1{,}25857\frac{f_0}{k}$, algo menor que en el caso anterior sin amortiguamiento. El resultado se muestra en la figura siguiente.


x_{max,ζ=0}=1.30011 f_0/k
x_{max,ζ=0.05}=1.25857 f_0/k
f_0/k
elongación (x)
respuesta dinámica x_1
respuesta dinámica x_2
respuesta estática x_e
2t_0/3
t_0
7t_0/6
2t_0
tiempo (t)