Mecánica

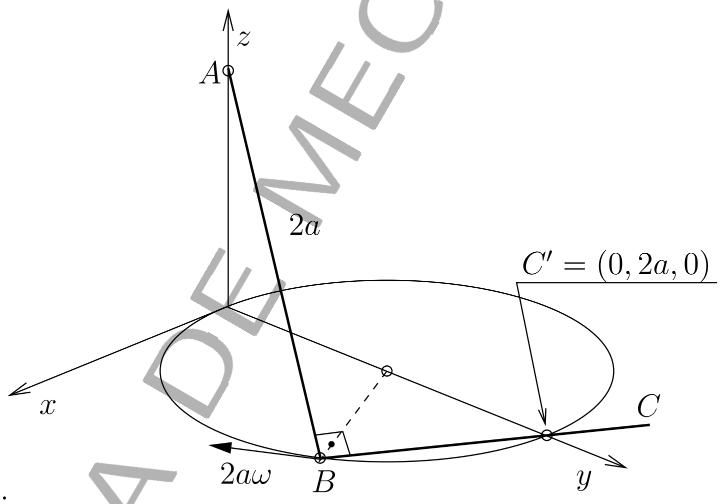
PRÁCTICA DE ALUMNOS, GRUPO B (n.º 3, 20 de noviembre de 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Una escuadra rígida ABC, siendo $\angle ABC = \pi/2$ y $\overline{AB} = \overline{BC} = 2a$, se mueve de forma que su vértice B recorre la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0; \quad z = 0,$$

con velocidad constante $2a\omega$. Además la varilla BC pasa siempre por el punto fijo $C' = (0, 2a, 0)$, mientras que el vértice A permanece sobre el eje Oz. Del movimiento así definido, para un instante genérico se pide:



1. Velocidad angular de la varilla BC en su movimiento plano; velocidad de A y del punto de la escuadra que pasa por C'.

2. Velocidad angular de la escuadra, expresando sus componentes en ejes fijos y en unos ejes ligados a la misma (móviles); eje del movimiento helicoidal tangente y velocidad mínima de los puntos del plano móvil de la escuadra.

3. Aceleración angular de la escuadra y aceleración del punto medio de AB.

1.— La velocidad del punto de la varilla BC que pasa por C' ha de llevar necesariamente la dirección de BC, para que se mantenga ensartada en C'. Una manera de justificar esto es considerando el movimiento inverso, del punto C' (ahora considerado como móvil) respecto a la recta BC (ahora considerada como fija). Se trataría del movimiento de un punto sobre una recta fija, obviamente su velocidad lleva la dirección de dicha recta. Pues bien, la velocidad del punto de la recta sobre C' será esta misma velocidad pero cambiada de signo, por tanto llevará también la dirección de la recta BC.

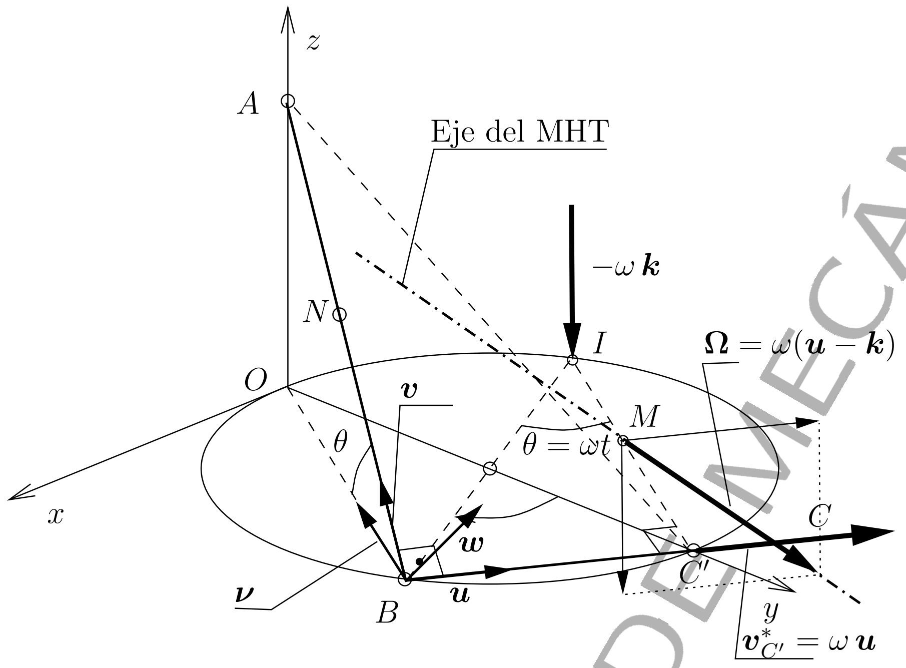
El movimiento plano de BC será una rotación instantánea alrededor del punto I que se obtiene como intersección del radio de la circunferencia por B (normal a $\boldsymbol{v}_B$) y de la normal a BC por C'. Por las propiedades del arco capaz de $\pi/2$ el punto I se sitúa diametralmente opuesto a B (véase figura más abajo). La velocidad de rotación de este movimiento se obtiene de manera inmediata, al conocerse $v_B = 2a\omega$:

$$\Omega_{BC} = \frac{v_B}{2a} = \omega \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega}_{BC} = -\omega\,\boldsymbol{k}.$$

Para simplificar las expresiones, en lo que sigue llamaremos $\theta = \omega t$. Considerando la rotación alrededor del CIR, la velocidad del punto sobre C' es

$$\boldsymbol{v}^*_{C'} = -\omega\,\overline{IC'}\,\boldsymbol{u} = -2a\omega\cos\theta\,\boldsymbol{u},$$

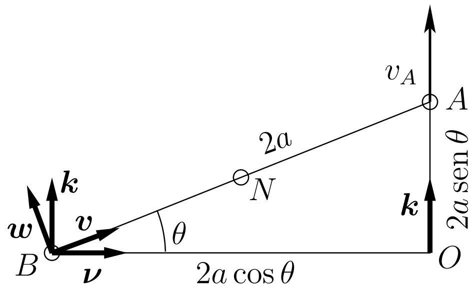
donde se emplea el versor $\boldsymbol{u}$ en dirección de la recta BC (ver figura).



Además, se definen los versores $\boldsymbol{v}$ según BA y $\boldsymbol{w}$ normal al plano de la escuadra, formando un triedro $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ ligado a la misma. Por otra parte, emplearemos también el versor $\boldsymbol{\nu}$ en el plano Oxy según $C'I$, formando el triedro $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{k})$ también móvil pero no ligado a la escuadra.

Para calcular la velocidad del punto A obtendremos primero la expresión de la cota z_A. Para ello tenemos en cuenta el triángulo BOA, rectángulo en O y situado en un plano vertical. Si se considera que $\overline{BO} = \overline{C'I}$ y que $\overline{BA} = \overline{BI} = 2a$, deducimos que los triángulos BOA y $BC'I$ son iguales, por lo que $\angle OBA = \angle C'IB = \theta$. Por tanto,

$$z_A = 2a \operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_A = \dot{z}_A \boldsymbol{k} = 2a\omega \cos\theta\, \boldsymbol{k}. \tag{1}$$



2.— La velocidad de la escuadra se compone, además de la velocidad angular ya calculada de BC alrededor de Iz, de una rotación alrededor de la propia recta BC. En el razonamiento anterior vimos que el ángulo $\angle OBA$ que forma la escuadra con el plano Oxy es precisamente θ, por tanto la velocidad angular total es

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\,\boldsymbol{u} - \omega\,\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

siendo las expresiones en los triedros móvil y fijo respectivamente

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \omega\left(\boldsymbol{u} - \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{v} - \cos\theta\,\boldsymbol{w}\right), \\ &= \omega\left(-\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}\right). \end{aligned}$$

El movimiento instantáneo es una composición de dos rotaciones ortogonales que se cruzan, resultando un caso general de rotación más deslizamiento. El eje del Movimiento Helicoidal tangente (MHT) es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$ y pasará por el punto medio M de la recta de mínima distancia $C'I$. La velocidad mínima de los puntos del sólido móvil es la de los puntos del eje, por ejemplo la del punto M,

$$\boldsymbol{v}_M = (-\omega\boldsymbol{k}) \wedge (-a\cos\theta\,\boldsymbol{\nu}) + \omega\boldsymbol{u} \wedge (a\cos\theta\,\boldsymbol{\nu}) = -\omega a\cos\theta(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{k}). \tag{3}$$

(También podríamos haber obtenido este resultado proyectando la velocidad de un punto conocido, como A o el punto sobre C', sobre la dirección de la rotación instantánea.)

3.— Para determinar la aceleración angular derivamos la expresión (2), teniendo en cuenta que el vector unitario $\boldsymbol{u}$ gira con velocidad $-\omega\boldsymbol{k}$:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega\boldsymbol{u} - \omega\boldsymbol{k}) = \omega(-\omega\boldsymbol{k}) \wedge \boldsymbol{u} = -\omega^2\boldsymbol{\nu} \tag{4}$$

La aceleración del punto medio N de AB se calcula mediante la fórmula general

$$\boldsymbol{a}_N = \boldsymbol{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{BN} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{BN}).$$

Desarrollando los términos de la expresión anterior,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_B &= 4a\omega^2(\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u} + \cos\theta\,\boldsymbol{\nu}) \\
&= 4a\omega^2(\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u} + \cos^2\theta\,\boldsymbol{v} - \cos\theta\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{w})\,; \\
\boldsymbol{r}_{BN} &= a\,\boldsymbol{v}; \\
\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{BN} &= -a\omega^2\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}\,; \\
\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{BN}) &= -a\omega^2\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u} - 2a\omega^2\cos\theta\,\boldsymbol{\nu} - a\omega^2\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k} \\
&= -a\omega^2\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u} - a\omega^2(1+\cos^2\theta)\boldsymbol{v} + a\omega^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\boldsymbol{w}\,.
\end{aligned}$$

Sumando componentes en los triedros $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{k})$ ó $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ resulta respectivamente

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_N &= a\omega^2\left[2\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u} + 2\cos\theta\,\boldsymbol{\nu} - \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k}\right] \\
&= a\omega^2\left[2\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u} + (-1+3\cos^2\theta)\,\boldsymbol{v} - 3\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\boldsymbol{w}\right].
\end{aligned} \tag{5}$$