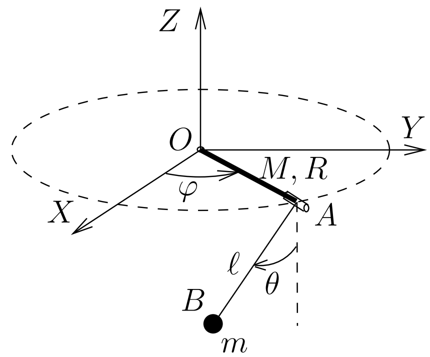
Mecánica

PRÁCTICA DE ALUMNOS, GRUPO B (22 de enero de 2009)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Una barra OA de masa M y longitud R tiene su extremo O fijo mientras que A puede moverse libremente en el plano horizontal por O, recorriendo una circunferencia. A su vez, una partícula pesada de masa m se mueve unida mediante una varilla AB rígida, sin masa y de longitud ℓ, a una rótula en A. La rótula actúa obligando a que la varilla se mueva contenida el plano vertical perpendicular a OA por A. Se pide:

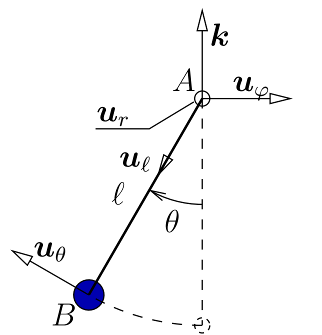


1. Obtener las ecuaciones del movimiento mediante los métodos de la mecánica analítica. Expresar las posibles integrales primeras del movimiento e interpretarlas físicamente.

2. Se considera ahora que la velocidad de rotación de la barra OA es constante, $\dot\varphi = \omega$. Calcular para esta situación de nuevo la Lagrangiana y ecuación del movimiento para el grado de libertad θ. Calcular el momento de eje vertical que debe aplicarse en O para garantizar este movimiento.

3. Para el mismo caso, expresar las posibles integrales primeras del movimiento e interpretarlas físicamente.

1.– Para definir las magnitudes vectoriales emplearemos los ejes XYZ de la figura del enunciado, así como los versores de la figura adjunta: $\boldsymbol{u}_\varphi$ según la coordenada φ, $\boldsymbol{u}_\theta$ según la coordenada θ, y $\boldsymbol{u}_r$ según el radio del centro del círculo hacia A (dirigido hacia fuera del papel en la figura).



La velocidad de B es

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{AB}, \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{\Omega} = \dot\varphi\,\boldsymbol{k} - \dot\theta\,\boldsymbol{u}_r$ es la velocidad angular (absoluta) de la varilla AB. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{v}_A = R\dot\varphi\,\boldsymbol{u}_\varphi$, resulta

$$\boldsymbol{v}_B = R\dot\varphi\,\boldsymbol{u}_\varphi + \ell\dot\varphi \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_r + \ell\dot\theta\,\boldsymbol{u}_\theta. \tag{2}$$

También podríamos haber calculado esta velocidad a partir de la composición de movimientos de la rotación alrededor de OZ, $\dot\varphi\,\boldsymbol{k}$ (arrastre) y la rotación alrededor de OA, $(-\dot\theta\,\boldsymbol{u}_r)$ (relativa):

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\text{arr}} + \boldsymbol{v}_{\text{rel}} = \dot\varphi\,\boldsymbol{k} \wedge (R\boldsymbol{u}_r + \ell\boldsymbol{u}_\ell) + \ell\dot\theta\,\boldsymbol{u}_\theta\,,$$

llegándose al mismo resultado de (2).

Con esto ya se puede calcular la Lagrangiana, resultando

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot\varphi^2\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{2}m\left(R^2\dot\varphi^2 + \ell^2\dot\theta^2 - 2R\ell\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}MR^2\right)\dot\varphi^2 + mg\ell\cos\theta\,. \tag{3}$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$m\ell^2\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}^2\theta + \left(m + \frac{M}{3}\right)R^2\dot{\varphi} - mR\ell\dot{\theta}\cos\theta = \text{cte.} \tag{4}$$

$$m\ell^2\ddot{\theta} - mR\ell\ddot{\varphi}\cos\theta - m\ell^2\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + mg\ell\,\mathrm{sen}\,\theta = 0. \tag{5}$$

La ecuación (4) corresponde a expresar la condición de coordenada cíclica de φ, puesto que $\partial L/\partial\varphi = 0$. Físicamente equivale a la conservación del momento cinético respecto al eje vertical OZ asociado al giro φ, ya que las fuerzas exteriores al sistema que dan momento en O son paralelas a dicho eje y por tanto el momento en la dirección del eje es nulo.

Por otra parte la única fuerza que trabaja es el peso, por lo que se conserva la energía:

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}^2\theta + \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\varphi}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 - 2R\ell\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{6}MR^2\dot{\varphi}^2 - mg\ell\cos\theta\,. \tag{6}$$

Esta expresión coincide con la integral de Jacobi $h = p_\varphi\dot{\varphi} + p_\theta\dot{\theta} - L$ como se comprueba fácilmente.

2.– En este caso, la coordenada φ ya no es cíclica, de hecho ya no es ni siquiera coordenada, al tratarse de un movimiento impuesto: el único grado de libertad que queda es θ. La Lagrangiana se puede obtener particularizando $\dot{\varphi} = \omega$ en (3):

$$L = \left(\frac{1}{6}M + \frac{1}{2}m\right)R^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2\theta + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mR\ell\omega\dot{\theta}\cos\theta + mg\ell\cos\theta\,. \tag{7}$$

El primer término en la expresión anterior se constante y no hace falta considerarlo en la expresión de L. Derivando se obtiene la ecuación que resulta para el grado de libertad θ:

$$m\ell^2\ddot{\theta} - m\ell^2\omega^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + mg\ell\,\mathrm{sen}\,\theta = 0. \tag{8}$$

Por otra parte, para imponer el movimiento de rotación $\dot{\varphi} = \omega$ será necesario aplicar un par. Para calcular su valor podemos considerar que φ es un grado de libertad, existiendo una fuerza generalizada Q_φ cuyo efecto será precisamente que resulte $\dot{\varphi} = \omega$. Es fácil comprobar que el momento pedido es precisamente esta fuerza generalizada, ya que el trabajo virtual del momento sería $\delta W = M\delta\varphi = Q_\varphi\delta\varphi$. La ecuación de Lagrange resultaría de derivar (4) respecto del tiempo, colocando en el lado derecho del signo = el momento generalizado Q_φ y sustituyendo finalmente $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = 0$:

$$2m\ell^2\omega\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - mR\ell\ddot{\theta}\cos\theta + mR\ell\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\theta = Q_\varphi. \tag{9}$$

3.— La energía del sistema no se conserva, ya que el par aplicado desarrolla un trabajo sobre el sistema. Sin embargo, al ser $\partial L/\partial t = 0$ podemos obtener una integral primera mediante la integral de Jacobi,

$$h = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\dot{\theta} - L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{3}\right)R^2\omega^2 - \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2\theta - mg\ell\cos\theta = \text{cte.} \tag{10}$$

Es inmediato comprobar que esta expresión difiere de la energía (6).