

Mecánica

PRÁCTICA DE ALUMNOS, GRUPO B (16 de abril de 2009)

Apellidos

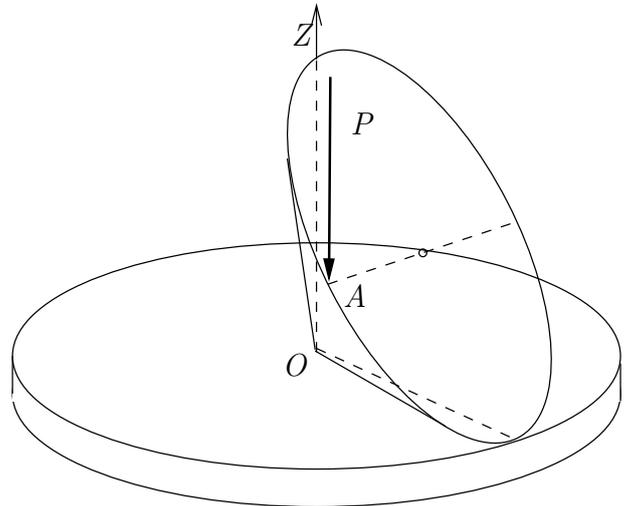
Nombre

N.º

Grupo

--	--	--

Se considera un cono de revolución sólido de semiángulo cónico α , masa m y radio de la base a , apoyado mediante una generatriz sobre una plataforma circular de masa M y radio R sobre la que puede rodar sin deslizar, estando el vértice del cono en el centro O de la plataforma. La plataforma se mantiene horizontal pudiendo girar libremente alrededor de su eje vertical OZ . En un instante determinado el cono y la plataforma se encuentran en reposo y se aplica una percusión vertical P en el punto A situado en el extremo de un diámetro horizontal de la base del cono. Se pide:



1. Obtener las ecuaciones que definen el campo de velocidades de ambos sólidos inmediatamente después de la percusión. Particularizar las ecuaciones obtenidas para $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $m = M$, y $R = a\sqrt{2}$.
2. Obtener el campo de velocidades de los dos sólidos después de la percusión para este caso.
3. Obtener las reacciones impulsivas que se producen en el punto O de la plataforma (fuerzas y momentos).

NOTA: Los momentos principales de inercia de un cono de altura h y radio a de la base respecto de su vértice son $A = \frac{3}{20}m(a^2 + 4h^2)$ y $C = \frac{3}{10}ma^2$

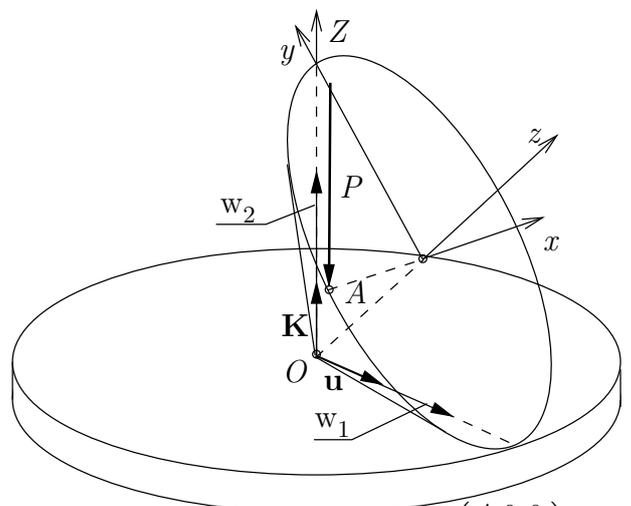
1.— El movimiento del cono respecto de la plataforma después de la impulsión será una rotación ω_1 alrededor de la generatriz, definida por el versor \mathbf{u} . A su vez, la plataforma girará con una velocidad de rotación $\omega_2 \mathbf{K}$. Por tanto, la velocidad de rotación del cono será $\omega_1 \mathbf{u} + \omega_2 \mathbf{K}$. Bastará obtener ω_1 y ω_2 para determinar el campo de velocidades.

Obtendremos una primera ecuación mediante el balance de momento cinético en O según la dirección \mathbf{u} , teniendo en cuenta que las reacciones de la plataforma sobre el cono se aplican en la generatriz y no producen momento en ella:

$$\mathbf{H}_{O,\text{cono}} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{r}_{OA} \wedge \mathbf{P}) \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

En los ejes $Oxyz$ las componentes del tensor de inercia del cono en O serían $\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$. Por su parte, los versores se expresan como $\mathbf{K} = \cos \alpha \mathbf{j} + \sin \alpha \mathbf{k}$, y $\mathbf{u} = -\sin \alpha \mathbf{j} + \cos \alpha \mathbf{k}$. El momento impulsivo es

$$\mathbf{r}_{OA} \wedge \mathbf{P} = aP \mathbf{u} + hP \cos \alpha \mathbf{i}, \quad (2)$$



siendo h la altura del cono. Con estos resultados la expresión (1) arroja:

$$\omega_1 (A \operatorname{sen}^2 \alpha + C \operatorname{cos}^2 \alpha) + \omega_2 (C - A) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha = aP \quad (3)$$

Otra ecuación que plantearemos será el balance del momento cinético en la dirección del eje OZ , para el conjunto plataforma+cono:

$$(\mathbf{H}_{O,\text{cono}} + \mathbf{H}_{O,\text{disco}}) \cdot \mathbf{K} = 0,$$

que desarrollando resulta:

$$\omega_1 (C - A) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha + \omega_2 (A \operatorname{cos}^2 \alpha + C \operatorname{sen}^2 \alpha) + \frac{1}{2} MR^2 \omega_2 = 0. \quad (4)$$

Particularizando las ecuaciones (3) y (4) con los datos del enunciado se obtiene

$$\frac{1}{2} \omega_1 \frac{21}{20} ma^2 - \frac{1}{2} \omega_2 \frac{9}{20} ma^2 = aP; \quad (5)$$

$$-\frac{1}{2} \omega_1 \frac{9}{20} ma^2 + \frac{1}{2} \omega_2 \frac{21}{20} ma^2 + \frac{1}{2} m(2a^2) \omega_2 = 0. \quad (6)$$

2.— Resolviendo las ecuaciones (5) y (6) se obtiene:

$$\omega_1 = \frac{61}{30} \frac{P}{ma}; \quad \omega_2 = \frac{3}{10} \frac{P}{ma}. \quad (7)$$

3.— Las reacciones exteriores en el apoyo O constan de una fuerza impulsiva \mathbf{R}_O así como de un momento impulsivo \mathbf{M}_O horizontal que impida la inclinación del plano de la plataforma. Considerando en primer lugar el balance de cantidad de movimiento para el sistema conjunto cono+plataforma:

$$\mathbf{R}_O - P \mathbf{K} = m \mathbf{v}_G = m(\omega_1 \mathbf{u} + \omega_2 \mathbf{K}) \wedge \left(\frac{3}{4} a \mathbf{k} \right) \Rightarrow \mathbf{R}_O = P \mathbf{K} - \frac{13}{10\sqrt{2}} P \mathbf{i}.$$

El momento de reacción impulsivo sobre la plataforma se origina por la reacción impulsiva transmitida a través de la generatriz de contacto, cuya resultante vale precisamente \mathbf{R}_O . El momento producido por esta reacción debe ser perpendicular a la generatriz, por lo que dicho momento reactivo tendrá únicamente componente horizontal según la dirección \mathbf{i} . Estableciendo ahora el balance de momento cinético, el momento reactivo debe equilibrar al segundo sumando de (2):

$$\mathbf{M}_O = \frac{1}{\sqrt{2}} Pa \mathbf{i}.$$