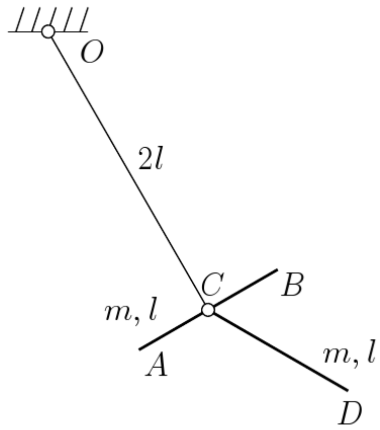
Mecánica

PRÁCTICA DE ALUMNOS, GRUPO B (30 de abril de 2009)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

El sistema mecánico de la figura está contenido en un plano vertical fijo y consta de los siguientes elementos: Un sólido rígido formado por una varilla AB, de masa m y longitud l, unida rígidamente por su punto medio a una varilla OC de masa despreciable y longitud $2l$ que está articulada en su extremo fijo O. Una varilla CD, de masa m y longitud l, articulada en el punto C a la varilla AB. Se pide:



1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Linealización de las ecuaciones para pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio estable.
3. Frecuencias propias y modos normales de oscilación.

1.— Denominaremos θ y φ a los ángulos que forman OC y CD respectivamente con la vertical descendente, quedando el sistema definido por estos dos grados de libertad. La energía cinética de cada sólido vale

$$\begin{aligned} T_{AB} &= \frac{1}{2}m(2l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}^2 \,, \\ T_{CD} &= \frac{1}{2}m\left((2l\dot{\theta})^2 + (l/2)^2\dot{\varphi}^2 + 2\cdot 2l\dot{\theta}\cdot(l/2)\varphi\cos(\varphi-\theta)\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\varphi}^2 \,, \end{aligned} \tag{1}$$

mientras que el potencial es

$$V = -mg(2l)\cos\theta - mg(2l\cos\theta + (l/2)\cos\varphi)\,. \tag{2}$$

Operando la Lagrangiana resulta

$$\begin{aligned} L &= T_{AB} + T_{CD} - V \\ &= \frac{97}{24}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2 + ml^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta) + 4mgl\cos\theta + mg\frac{l}{2}\cos\varphi\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange,

$$0 = \frac{97}{12}ml^2\ddot{\theta} + ml^2\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta) - ml^2\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}(\varphi-\theta) + 4mgl\operatorname{sen}\theta \tag{4}$$

$$0 = ml^2\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta) + \frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} + ml^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}(\varphi-\theta) + mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\varphi\,. \tag{5}$$

2.— La posición de equilibrio estable es $(\theta,\varphi) = (0,0)$. Considerando pequeñas oscilaciones a partir de las ecuaciones (4), (5) se obtienen las ecuaciones linealizadas:

$$0 = \frac{97}{12}ml^2\ddot{\theta} + ml^2\ddot{\varphi} + 4mgl\theta \tag{6}$$

$$0 = ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} + mg\frac{l}{2}\varphi\,. \tag{7}$$

Estas ecuaciones se pueden expresar de forma matricial,

$$[\mathbf{M}] = ml^2 \begin{pmatrix} 97/12 & 1 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix} \ ; \quad [\mathbf{K}] = mgl \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \ ; \quad \{\mathbf{q}\} = \begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} \ ; \tag{8}$$

$$\{\mathbf{0}\} = [\mathbf{M}]\,\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\,\{\mathbf{q}\} \ . \tag{9}$$

3.— La ecuación característica de autovalores es

$$0 = \det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = \frac{61}{36} m^2 l^4 \lambda^2 - \frac{43}{8} m^2 g l^3 \lambda + 2m^2 g^2 l^2 \, . \tag{10}$$

Las soluciones positivas para $\lambda = \omega^2$ son las dos frecuencias propias de vibración:

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = \frac{3(129 - 11\sqrt{73})}{244} \frac{g}{l} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 0{,}656142 \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{11}$$

$$\lambda_2 = \omega_2^2 = \frac{3(129 + 11\sqrt{73})}{244} \frac{g}{l} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 1{,}65578 \sqrt{\frac{g}{l}} \, . \tag{12}$$

Los modos de vibración asociados a cada frecuencia propia resultan:

$$\{\mathbf{v}_1\} = \begin{Bmatrix} \frac{12(129 - 11\sqrt{73})}{-8609 + 1067\sqrt{73}} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}828046 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{13}$$

$$\{\mathbf{v}_2\} = \begin{Bmatrix} \frac{-12(129 + 11\sqrt{73})}{8609 + 1067\sqrt{73}} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}150959 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{14}$$