Mecánica

PRÁCTICA DE ALUMNOS - Dinámica Partícula - Grupo C (22 de Octubre de 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Una partícula pesada de masa m se mueve en todo momento sobre una hélice circular de radio R y paso b, cuya ecuación se expresa como:

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta \\ y &= R\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= b\,\theta \end{aligned}$$

Además de la gravedad, la partícula está sujeta a una fuerza atractiva proporcional a la distancia desde origen a la partícula y cuya constante de proporcionalidad es k.

Se pide:

1. Expresar las ecuaciones de la dinámica de la partícula.
2. Discutir la existencia de integrales primeras y, en caso de existir, calcularlas.
3. Suponiendo que la partícula parte de $z = 0$ con velocidad nula, calcular la altura máxima y mínima entre las que se desarrolla el movimiento.
4. Calcular la reacción ejercida por la curva.

1.- La ecuación de la hélice en coordenadas cilíndricas se expresa como:

$$\begin{aligned} \rho &= R \\ z &= b\,\theta. \end{aligned}$$

Aplicando la expresión general de la aceleración en cilíndricas:

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{u}_z = -R\dot{\theta}^2\boldsymbol{u}_\rho + R\ddot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + b\ddot{\theta}\boldsymbol{u}_z.$$

Si $\boldsymbol{N}$ es la reacción ejercida por la curva sobre la partícula, la resultante de fuerzas se puede expresar como:

$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{u}_z + \boldsymbol{N} - k(R\boldsymbol{u}_\rho + z\boldsymbol{u}_z).$$

Siendo $\boldsymbol{t}$ un vector tangente unitario a la curva, la ecuación de la dinámica se expresa:

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t} = m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t},$$

Sabiendo que $\boldsymbol{T}$ es un vector tangente:

$$\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta} = R\boldsymbol{u}_\theta + b\boldsymbol{u}_z \Longrightarrow \boldsymbol{t} = \frac{R\boldsymbol{u}_\theta + b\boldsymbol{u}_z}{\sqrt{R^2+b^2}},$$

la ecuación del movimiento resulta:

$$\boxed{(R^2+b^2)\ddot{\theta} + kb^2\theta = -mgb}. \qquad (1)$$

2.- Tanto la fuerza gravitatoria como la fuerza atractiva son fuerzas conservativas por lo que la energía se conserva. El potencial V_F que deriva de la fuerza atractiva resulta:

$$V_F = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(R^2 + z^2).$$

Si V_g es el potencial de la fuerza gravitatoria, la ecuación de de la energía se expresa como:

$$\boxed{E = T + V_F + V_g = \frac{1}{2}m(R^2 + b^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kb^2\theta^2 + mgb\theta}. \tag{2}$$

Se puede comprobar fácilmente que la ecuación (1) es la derivada de la correspondiente ecuación (2).

3.- La altura máxima y mínima del movimiento se alcanzan cuando $\dot{z} = 0$ y por tanto cuando $\dot{\theta} = 0$. De las condiciones iniciales se deduce que $E = 0$ por lo que de la ecuación (2) se deduce que: $z_{max} = 0$ y $z_{min} = -\dfrac{2mg}{k}$.

4.- La reacción se puede expresar en el triedro intrínseco mediante dos componentes: $\boldsymbol{N} = N_n\boldsymbol{n} + N_b\boldsymbol{b}$. Sabiendo que $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{u}_\rho$ y $\boldsymbol{b} = \dfrac{-b\boldsymbol{u}_\theta + R\boldsymbol{u}_z}{\sqrt{R^2 + b^2}}$, las componentes de la reacción resultan:

$$\begin{aligned} N_n &= -kR + mR\dot{\theta}^2 \\ N_b &= (mg + kb\theta)\frac{R}{\sqrt{R^2 + b^2}}. \end{aligned}$$