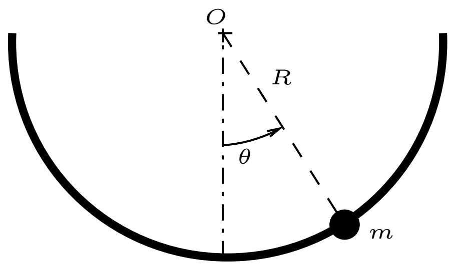
Mecánica

PRÁCTICA DE ALUMNOS, GRUPO C (4 de noviembre de 2008)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Una partícula pesada de masa m se mueve en todo momento sobre un semiaro de centro O y radio R. Se pide:



1. En el supuesto que el semiaro se encuentre fijo. Expresar la ecuación del movimiento.

2. Bajo el supuesto anterior, linealizar la ecuación del movimiento, en el caso en que el movimiento sea pequeño con respecto a la posición de equilibrio. Integrar la ecuación suponiendo que se deja caer la partícula sin velocidad con un ángulo θ_0 con respecto a la vertical. Calcular el tiempo que tarda en alcanzar la posición inicial. En el caso que se deje caer sin velocidad desde un ángulo $2\theta_0$, cúal es el tiempo que tarda en alcanzar la posición inicial?

3. En el supuesto que al centro del semiaro se le imponga un movimiento horizontal $x(t) = A \operatorname{sen} \Omega t$ y que el movimiento tenga un amortiguamiento crítico ξ, expresar las ecuaciones del movimiento de la partícula en el supuesto que el movimiento sea pequeño con respecto a la posición de equilibrio

4. En este último caso, expresar la solución general de la ecuación, indicando la componente transitoria y estacionaria.

5. Para este último caso, calcular la frecuencia del la excitación Ω para la que el sistema entra en resonancia, calculando la amplitud máxima en este caso.

⋆

1.- Planteando la ecuación de la cantidad de movimiento en dirección tangencial:

$$-mg \operatorname{sen}\theta = mR\ddot{\theta} \Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta = 0} \tag{1}$$

2.- Si el movimiento es pequeño se verifica que $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, por lo que la ecuación (1) se puede expresar como:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0} \tag{2}$$

La ecuación del movimiento integrada partiendo de la posición $\theta(0) = \theta_0$,con $\dot{\theta}(0) = 0$, resulta: $\theta = \theta_0 \cos\omega_0 t$; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$. El tiempo que tarda en alcanzar la posición inicial es el período del movimiento armónico, $t_1 = T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.

En el caso que parta de la posición $\theta = 2\theta_0$, la ecuación resulta $\theta = 2\theta_0 \cos\omega_0 t$ y el tiempo en alcanzar la posición inicial es también el período, $t_2 = T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.

3.- Adoptando como sistema móvil el correspondiente al que acompaña el movimiento impuesto del semiaro con origen en O, la aceleración de la partícula resulta:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{arr}} = R\ddot{\theta}\boldsymbol{t} + \ddot{x}\boldsymbol{i} \Longrightarrow a_t = R\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta, \tag{3}$$

siendo $\boldsymbol{t}$ un vector unitario tangente y $\boldsymbol{i}$ un vector unitario de dirección horizontal.

Sabiendo que $\ddot{x} = -A\Omega^2 \operatorname{sen} \Omega t$ y que $\cos\theta \approx 1$ la ecuación del movimiento linealizada introduciendo una fuerza disipativa $2\xi\omega_0\dot{\theta}$, se expresa como:

$$\boxed{\ddot{\theta} + 2\xi\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{A\Omega^2}{R}\operatorname{sen}\Omega t} \tag{4}$$

4.- La solución general de la ecuación se expresa como:

$$\boxed{\theta = \overbrace{ae^{-\xi\omega_0 t}\cos(\omega t + \varphi_0) + \underbrace{B\operatorname{sen}(\Omega t + \delta)}_{\text{estacionaria}}}^{\text{transitoria}}} \tag{5}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\omega &= \omega_0\sqrt{1-\xi^2} \\
B &= \frac{A\Omega^2/R}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}} \\
\tan\delta &= \frac{2\xi\omega_0}{\omega_0^2-\Omega^2}
\end{aligned}$$

5.- Para calcular la amplitud máxima B resulta conveniente expresarla del siguiente modo:

$$B = \frac{A/R}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}-1\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2}} \tag{6}$$

Llamando $\alpha = \dfrac{\omega_0^2}{\Omega^2}$, el valor máximo de B se obtiene calculando el valor mínimo del radicando en el denominador:

$$\frac{d}{d\alpha}[(\alpha-1)^2 + 4\xi^2\alpha] = 0 \Longrightarrow \alpha = 1 - 2\xi^2 \tag{7}$$

La frecuencia de resonancia resulta, por tanto:

$$\boxed{\Omega_R = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\xi^2}}} \tag{8}$$