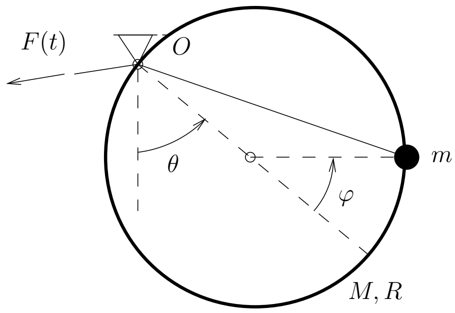
Mecánica

PRÁCTICA DE ALUMNOS, GRUPO C (3 de febrero de 2009)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Una aro de masa M y radio R se mueve en todo momento en un plano vertical fijo con un punto de su periferia O también fijo. Ensartada en el aro se mueve una partícula de masa m. Por otra parte, la partícula está unida a uno de los extremos de un cable inextensible y sin masa que pasa por O a través de una pequeña argolla. En el otro extremo del cable se aplica una fuerza $F(t)$ dada. No existe rozamiento entre ninguna de las partes del sistema.

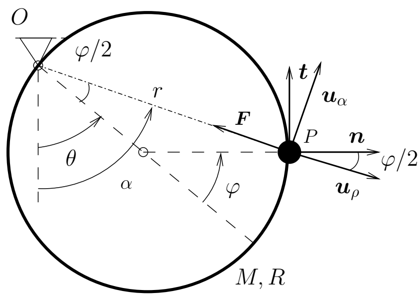


Se pide:

1. Identificar y justificar el número de grados de libertad del sistema.
2. Calcular las fuerzas generalizadas para cada uno de los grados de libertad.
3. Calcular las ecuaciones diferenciales del movimiento mediante procedimientos de dinámica analítica.
4. Justificar razonadamente la existencia o no de integrales primeras del movimiento.

⋆

1. El sistema posee dos grados de libertad: el giro θ del aro en torno a una recta ortogonal que pasa por O y la posición de la partícula φ con respecto al aro.



2. Consideramos los ejes de la figura adjunta, en donde $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n})$ son los versores tangente y normal respectivamente a la circunferencia en el punto P, $(\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{u}_\rho)$ son respectivamente perpendicular y paralelo a $\boldsymbol{OP}$. Siendo $r = |\boldsymbol{OP}|$ y α el ángulo que forma con la vertical.

Para obtener las fuerzas generalizadas que se derivan de $\boldsymbol{F}$, se calcula el trabajo virtual, sabiendo que $\boldsymbol{F} = -F\boldsymbol{u}_\rho$ y que $\boldsymbol{r} = 2R\cos(\varphi/2)\boldsymbol{u}_\rho$. El desplazamiento virtual se puede expresar del siguiente modo:

$$\boldsymbol{\delta r} = \delta r \boldsymbol{u}_\rho + r\delta\alpha \boldsymbol{u}_\alpha = -R \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{u}_\rho + 2R\cos\frac{\varphi}{2}\left(\delta\theta + \frac{\delta\varphi}{2}\right)\boldsymbol{u}_\alpha. \tag{1}$$

Por tanto:

$$\delta W = \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r} = FR\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\delta\varphi \Longrightarrow Q_F^\varphi = FR\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}. \tag{2}$$

Las componentes de las fuerzas generalizadas que derivan de potencial se obtienen a partir del potencial V:

$$V = -MgR\cos\theta - mgR[\cos\theta + \cos(\theta+\varphi)], \tag{3}$$

$$\begin{aligned} Q^\varphi &= Q_F^\varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} = FR\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} - mgR\operatorname{sen}(\theta+\varphi), \\ Q^\theta &= -\frac{\partial V}{\partial\theta} = -MgR\operatorname{sen}\theta - mgR[\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(\theta+\varphi)]. \end{aligned}$$

3. A partir de la energía cinética del sistema se obtienen las dos ecuaciones diferenciales del movimiento:

$$T = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\varphi}^2 + 4\dot{\theta}^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 4\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right) + MR^2\dot{\theta}^2. \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q^{\varphi}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= Q^{\theta}.
\end{aligned}$$

$$m[R\ddot{\varphi} + R\ddot{\theta}(1+\cos\varphi) + R\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\varphi] = F\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2} - mg\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&[2MR^2 + 2mR^2(1+\cos\varphi)]\ddot{\theta} + mR^2(1+\cos\varphi)\ddot{\varphi} - mR^2\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\varphi - 2mR^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\varphi = \\
= \; &-MgR\,\mathrm{sen}\,\theta - mg[R\,\mathrm{sen}\,\theta + R\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi)]
\end{aligned} \tag{6}$$

4. No existen integrales primeras al no existir estrictamente una función lagrangiana del sistema. La energía no se conserva debido a que la fuerza $F(t)$ realiza un trabajo y suministra, por tanto, energía al sistema.