Mecánica

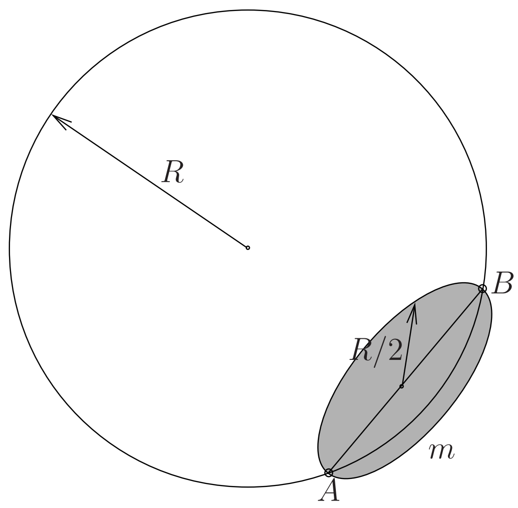
PRÁCTICA DE ALUMNOS, GRUPO C (4 de marzo de 2009)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Un disco pesado de masa m y diámetro R se mueve de forma que los extremos de uno de sus diámetros AB deslizan sobre una circunferencia vertical fija y lisa de radio R. El disco puede además girar libremente alrededor de este diámetro AB y alrededor de un eje perpendicular al mismo que pasa por su centro.

Se pide:

1. Expresión de la velocidad de rotación del disco en función de los grados de libertad y sus derivadas.
2. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento del disco y obtenerlas en su caso.
3. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento del disco en función de los grados de libertad y sus derivadas.



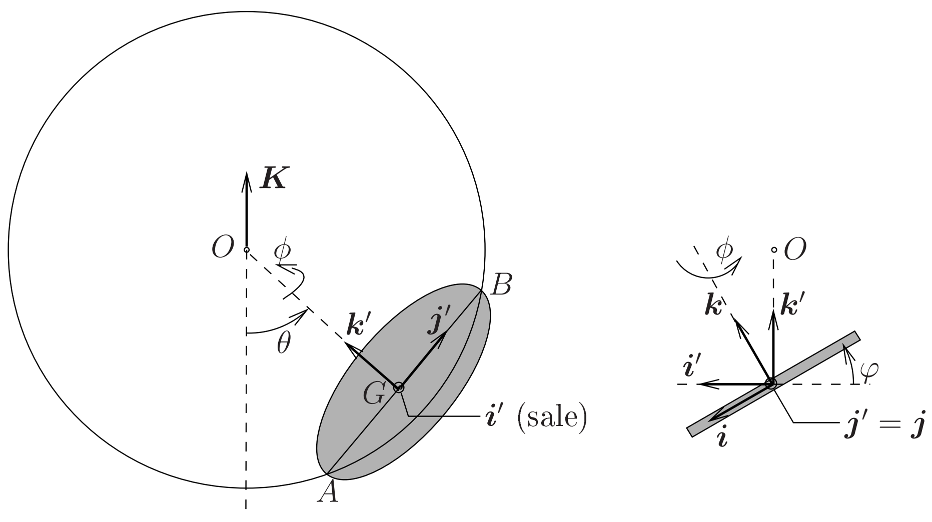


Figura 1: *Grados de libertad y sistemas de referencia auxiliares*

1.— El disco tiene tres grados de libertad, que podemos representar con el ángulo θ que sitúa el centro del disco en el plano de la circunferencia, el ángulo φ que gira el disco alrededor del diámetro material AB, y el ángulo ϕ que gira el disco alrededor del eje perpendicular al mismo por su centro.

También definimos por conveniencia dos sistemas de referencia auxiliares en G. El sistema móvil $\{G; \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ se define de manera que $\boldsymbol{i}'$ es horizontal y $\boldsymbol{j}'$ lleva la dirección del diámetro

AB. El otro sistema $\{G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ es un *triedro intermedio*, que se encuentra girado un ángulo φ respecto del anterior (y que no participa en la rotación propia ϕ del disco). La velocidad de rotación del disco se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\, \boldsymbol{i}' + \dot{\varphi}\, \boldsymbol{j} + \dot{\phi}\, \boldsymbol{k} = \dot{\theta} \cos\varphi\, \boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\, \boldsymbol{j} + (\dot{\phi} + \dot{\theta} \operatorname{sen}\varphi)\, \boldsymbol{k} \tag{1}$$

2.— Una integral primera del movimiento es la conservación de la energía, ya que la única fuerza externa que trabaja es el peso, que es conservativo. La expresión es:

$$E = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) - mg|\boldsymbol{OG}| \cos\theta\,, \tag{2}$$

donde las componentes del tensor central de inercia $\boldsymbol{I}_G$ en el triedro del cuerpo vienen dadas por:

$$[\boldsymbol{I}_G] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad , \quad \text{con} \quad C = 2A = \frac{1}{8} m R^2\,. \tag{3}$$

Teniendo en cuenta que $|\boldsymbol{OG}| = R\sqrt{3}/2$ y que por tanto $v_G = \dot{\theta} R\sqrt{3}/2$, empleando las expresiones (1), (2) y (3) se obtiene:

$$E = \frac{1}{32} m R^2 \left[\dot{\theta}^2 \left(13 + \operatorname{sen}^2\varphi\right) + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\phi}(\dot{\phi} + 2\dot{\theta} \operatorname{sen}\varphi)\right] - mgR\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta\,. \tag{4}$$

Existe además la integral primera correspondiente a la coordenada cíclica ϕ:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} + \dot{\theta} \operatorname{sen}\varphi = C\,. \tag{5}$$

3.— Las integrales primeras (4) y (5) pueden considerarse como ecuaciones del movimiento. Se necesita pues otra ecuación para lo que puede tomarse una de las ecuaciones de Lagrange correspondiente a la coordenada θ o a la coordenada φ. La Lagrangiana L tiene la misma expresión que la energía E ya obtenida en (4) salvo el signo de la energía potencial. Las ecuaciones para θ y φ respectivamente resultan:

$$0 = \frac{1}{16} m R^2 \ddot{\theta} \left(13 + \operatorname{sen}^2\varphi\right) + \frac{1}{8} m R^2 \ddot{\phi} \operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{8} m R^2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + \frac{1}{8} m R^2 \dot{\phi}\dot{\varphi} \cos\varphi + mgR\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}\theta\,, \tag{6}$$

$$0 = \frac{1}{16} m R^2 \ddot{\varphi} - \frac{1}{16} m R^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, \dot{\theta}^2 - \frac{1}{8} m R^2 \dot{\phi}\dot{\theta} \cos\varphi\,. \tag{7}$$