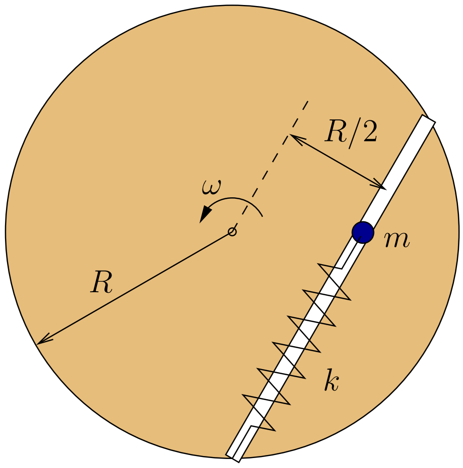
Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE C1 (20 de octubre de 2009)

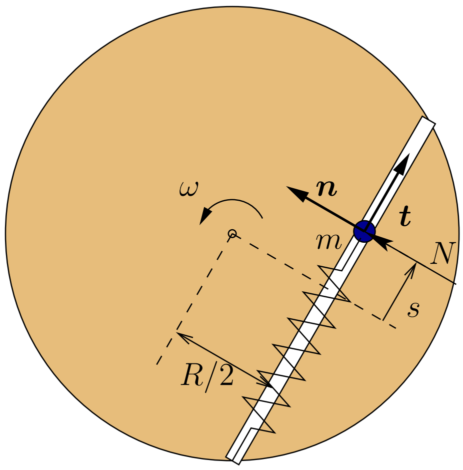
Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

Se considera un disco vertical de radio R con una ranura recta y lisa, excéntrica y situada a distancia $R/2$ del centro. Dentro de la ranura se mueve sin resistencia una partícula pesada de masa m, unida a un extremo de la ranura mediante un resorte lineal de constante k y longitud natural $R\sqrt{3}/2$. El disco tiene su centro fijo y se mantiene en un plano vertical fijo con movimiento de rotación impuesto de velocidad angular constante ω. En el instante inicial la ranura se encuentra en posición horizontal, y la partícula se encuentra en el punto medio de la ranura en reposo respecto del disco. Se considera que en el movimiento la partícula no alcanza los extremos de la ranura. Se pide:



1. Expresar las ecuaciones del movimiento de la partícula.
2. Valor mínimo de k para que el movimiento de la partícula sea de tipo oscilatorio.
3. Expresión de la reacción de la ranura sobre la partícula.
4. Calcular el trabajo de esta reacción sobre la partícula entre el instante inicial y un instante genérico t.

1.— La velocidad de giro del disco ω es constante, por lo que el movimiento de la partícula queda determinado por un único parámetro. Elegimos éste como la distancia s de la partícula al centro de la ranura, que determina la posición natural del resorte. En primer lugar, expresamos las coordenadas de la partícula (x, y) respecto de un sistema cartesiano inercial, y a partir de éstas la velocidad y aceleración:



$$
\begin{aligned}
x &= \frac{R}{2}\operatorname{sen}\omega t + s\cos\omega t \\
y &= -\frac{R}{2}\cos\omega t + s\operatorname{sen}\omega t
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{R}{2}\omega\cos\omega t + \dot{s}\cos\omega t - s\omega\operatorname{sen}\omega t \\
\dot{y} &= \frac{R}{2}\omega\operatorname{sen}\omega t + \dot{s}\operatorname{sen}\omega t + s\omega\cos\omega t
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{R}{2}\omega^2\operatorname{sen}\omega t + \ddot{s}\cos\omega t - 2\dot{s}\omega\operatorname{sen}\omega t - s\omega^2\cos\omega t \\
\ddot{y} &= \frac{R}{2}\omega^2\cos\omega t + \ddot{s}\operatorname{sen}\omega t + 2\dot{s}\omega\cos\omega t - s\omega^2\operatorname{sen}\omega t
\end{aligned}
\tag{3}
$$

A partir de $(\ddot{x}, \ddot{y})$, calculamos las componentes de la aceleración según la dirección de la propia ranura ($\boldsymbol{t}$) y en la dirección perpendicular ($\boldsymbol{n}$):

$$a_t = \ddot{x}\cos\omega t + \ddot{y}\,\mathrm{sen}\,\omega t = \ddot{s} - s\omega^2 \qquad (4)$$

$$a_n = -\ddot{x}\,\mathrm{sen}\,\omega t + \ddot{y}\cos\omega t = \frac{R}{2}\omega^2 + 2\dot{s}\omega \qquad (5)$$

Otra forma de calcular las componentes (a_t, a_n) de la aceleración sería haciendo uso de un sistema móvil que acompañe a la ranura, con una de las direcciones según la propia ranura. De esta forma se obtiene $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{arr}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{cor}}$, siendo $\boldsymbol{a}_{\mathrm{rel}} = \ddot{s}\,\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{a}_{\mathrm{arr}} = \frac{R}{2}\omega^2\,\boldsymbol{n} - s\omega^2\,\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{a}_{\mathrm{cor}} = 2\dot{s}\omega\,\boldsymbol{n}$, llegándose a las mismas expresiones (4) y (5).

Proyectando las fuerzas (peso según la vertical descendente, la reacción de la ranura $\boldsymbol{N} = N\,\boldsymbol{n}$ y fuerza del resorte $\boldsymbol{F}_k = -ks\,\boldsymbol{t}$) según las mismas direcciones, se obtienen las ecuaciones:

$$m(\ddot{s} - s\omega^2) \;=\; -mg\,\mathrm{sen}\,\omega t - ks \qquad (6)$$

$$m(\frac{R}{2}\omega^2 + 2\omega\dot{s}) \;=\; N - mg\cos\omega t \qquad (7)$$

La expresión (6) es la ecuación del movimiento, que integrada proporcionaría $s = s(t)$.

2.— Los términos de la ecuación (6) se pueden reordenar, obteniéndose:

$$m\ddot{s} + (k - m\omega^2)s = -mg\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

que representa un movimiento forzado, y cuyo carácter oscilatorio viene determinado por el signo de la rigidez de muelle equivalente $k^* = k - m\omega^2$. Si $k \geq m\omega^2$, el movimiento es oscilatorio. En caso contrario es divergente, gobernado por una función exponencial.

3.— De la expresión (7) se deduce la reacción de la ranura:

$$N = m(\frac{R}{2}\omega^2 + 2\omega\dot{s}) + mg\cos\omega t$$

4.— El sistema no es conservativo, puesto que el movimiento de la partícula tiene lugar sobre una ranura móvil, en la que en general el trabajo de la fuerza de reacción no es nulo. Físicamente, este trabajo es el que un agente externo debe realizar sobre el sistema partícula-disco para que éste se mueva con velocidad angular constante.

El principio de la energía cinética establece que el trabajo (W) de todas las fuerzas aplicadas sobre la partícula entre dos instantes es igual a la variación de su energía cinética:

$$T - T_0 = \underbrace{W^k}_{\text{muelle}} + \underbrace{W^p}_{\text{peso}} + \underbrace{W^N}_{\text{reacción}} \qquad (8)$$

Puesto que la partícula parte desde $s_0 = 0$ con velocidad relativa nula $\dot{s}_0 = 0$, los distintos términos de (8) se expresan como:

$$T - T_0 = \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{s} + \frac{R}{2}\omega\right)^2 + (s\omega)^2\right] - \frac{1}{2}m\left(\frac{R}{2}\omega\right)^2$$

$$W^p = -(V^p - V^p_0) = -mg\left[\frac{R}{2}(1 - \cos\omega t) + s\,\mathrm{sen}\,\omega t\right]$$

$$W^k = -(V^k - V^k_0) = -\frac{1}{2}ks^2$$

de donde se deduce la expresión del trabajo de la reacción:

$$W^N = \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + R\omega\dot{s} + s^2\omega^2) + mg\left[\frac{R}{2}(1 - \cos\omega t) + s\,\mathrm{sen}\,\omega t\right] + \frac{1}{2}ks^2$$