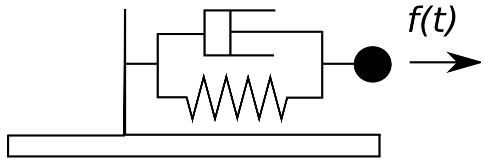
Mecánica

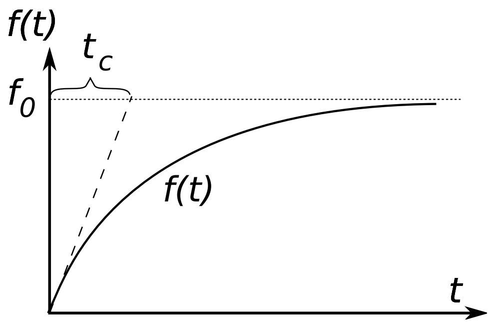
PRÁCTICA PUNTUABLE C2 (3 de noviembre de 2009)

Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

Sea un sistema dinámico formado por una partícula de masa m y un resorte lineal de constante de recuperación k y de coeficiente de viscosidad c. La partícula se puede mover sobre una recta horizontal. Estando la partícula en reposo y el resorte en su posición natural se aplica una fuerza $f(t) = f_0\,(1-e^{-a\,t})$.



Se pide:



1. Escribir la ecuación diferencial del movimiento junto con sus condiciones iniciales.
2. Expresar la forma general de la solución (sin resolver la ecuación diferencial).
3. Asumiendo que $k = 4\,m\,a^2$ y $c = a\,m/5$, obtener la expresión $x = x(t)$ de la respuesta de la estructura.
4. Para los valores del apartado 3, definiendo el tiempo característico t_c de la solicitación como la intersección de la pendiente en el origen a $f(t)$ con el valor asintótico f_0 (ver figura), obtener la relación entre dicho tiempo característico y el periodo de la parte oscilatoria de la respuesta.

1.— La ecuación fundamental de la dinámica establece que la resultante de todas las fuerzas que se aplican sobre la partícula sea igual a la variación de su cantidad de movimiento. En nuestro caso las fuerzas existentes son la fuerza recuperadora del muelle $f_r = -k\,x$, la fuerza viscosa $f_v = -c\,\dot{x}$ y la solicitación actuante $f(t)$. Poniendo el origen de coordenadas en la posición natural del resorte, la ecuación diferencial a resolver junto con sus condiciones iniciales se escribe como:

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = f_0(1 - e^{-at}) \tag{1}$$

$$\text{Condiciones Iniciales:} \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{array} \right.$$

2.— Estamos ante una ecuación diferencial ordinaria no homogénea cuya solución será igual a la suma de la solución de la ecuación homogénea más una solución particular:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{2}$$

Suponemos amortiguamiento subcrítico (asumimos $c < 2\sqrt{k\,m}$). Bajo esa hipótesis, la solución $x_h(t)$ de la ecuación homogénea es de la forma:

$$x_h(t) = A\,e^{-\frac{c}{2m}t}\,\mathrm{sen}(\omega\,t + \phi) \qquad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4\,m^2}} \tag{3}$$

mientras que la solución particular $x_p(t)$ (asumiendo una función del mismo tipo que el término de fuerza) es de la forma:

$$x_p(t) = F + G\,e^{-a\,t} \tag{4}$$

3.— Con los valores indicados de k y c la solución puede escribirse como:

$$x(t) = \underbrace{A\,e^{-\frac{a}{10}t}\,\mathrm{sen}(\omega\,t+\phi)}_{x_h(t)} + \underbrace{F + G\,e^{-a\,t}}_{x_p(t)} \qquad \text{con} \quad \omega = \sqrt{3{,}99}a \tag{5}$$

Los valores $\{F, G\}$ se obtienen sustituyendo la solución particular en la ecuación del movimiento, sabiendo que:

$$x_p(t) = F + G\,e^{-a\,t}; \quad \dot{x}_p(t) = -G\,a\,e^{-a\,t}; \quad \ddot{x}_p(t) = G\,a^2\,e^{-a\,t} \tag{6}$$

obteniéndose:

$$F = \frac{1}{4}\frac{f_0}{m\,a^2} = \frac{f_0}{k}; \quad G = -\frac{5}{24}\frac{f_0}{m\,a^2} = -\frac{5}{6}\frac{f_0}{k} \tag{7}$$

Los valores $\{A, \phi\}$ se obtienen imponiendo las condiciones iniciales a la solución total $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$:

$$x(t) = A\,e^{-\frac{a}{10}t}\,\mathrm{sen}(\omega\,t+\phi) + \frac{f_0}{k}\left[1 - \frac{5}{6}\,e^{-a\,t}\right] \tag{8}$$

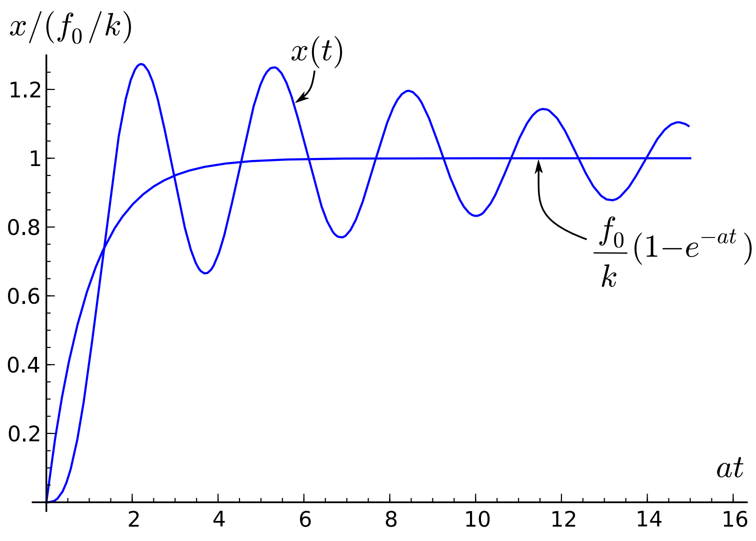
$$\dot{x}(t) = -A\frac{a}{10}\,e^{-\frac{a}{10}t}\,\mathrm{sen}(\omega\,t+\phi) + A\,\omega\;e^{-\frac{a}{10}t}\cos(\omega\,t+\phi) + \frac{5}{6}\frac{f_0}{k}\,a\,e^{-a\,t} \tag{9}$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A\;\mathrm{sen}(\phi) = -\dfrac{f_0}{6\,k} \\ \dot{x}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad -A\,\dfrac{a}{10}\,\mathrm{sen}(\phi) + A\,\sqrt{3{,}99}\,a\;\cos(\phi) = -\dfrac{5}{6}\dfrac{f_0}{k}a \end{cases} \tag{10}$$

siendo los valores finales:

$$A = -0{,}457\,\frac{f_0}{k}; \quad \phi = 21{,}389^\circ \tag{11}$$

La siguiente figura compara la solución obtenida $x(t)$ en la ecuación 8 con la solución estática $\frac{f_0}{k}(1 - e^{-at})$.



4.— Tal como indica la figura, el tiempo característico t_c se obtiene como la intersección de la recta que pasa por el origen y con pendiente $f'(t=0)$ con la recta de ordenada f_0.

$$f'(0)\, t_c = f_0; \quad f_0\, a\, t_c = f_0; \quad t_c = \frac{1}{a} \tag{12}$$

El periodo de la parte oscilatoria de la respuesta se obtiene como:

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}; \quad T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{3{,}99a}} \tag{13}$$

Finalmente, la relación entre ambos es:

$$\frac{T}{t_c} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{3{,}99}} \approx \pi \tag{14}$$