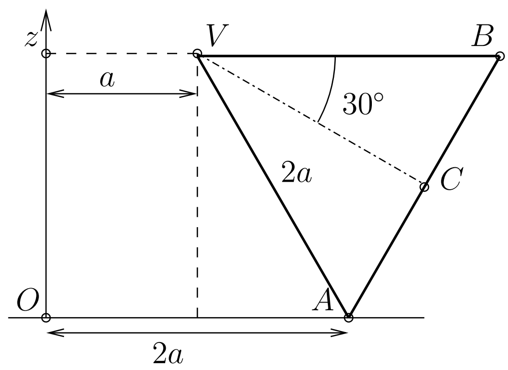
Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE C3 (17 de noviembre de 2009)

Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

Un cono recto de revolución, semiángulo cónico 30° y generatriz de longitud $2a$ rueda sin deslizar por el perímetro de su base sobre un plano horizontal, describiendo el punto de contacto A una circunferencia alrededor de O con velocidad uniforme $2a\omega$, en sentido antihorario visto desde arriba. A su vez, el vértice V del cono describe otra circunferencia horizontal de radio a alrededor de Oz, situada a una distancia $a\sqrt{3}$ del plano de rodadura. Se pide:



1. Describir el movimiento del cono, a) razonando si en cada instante puede interpretarse como una rotación instantánea o no; b) definiendo el eje del movimiento helicoidal instantáneo (o de rotación instantáneo en su caso); c) definiendo los lugares geométricos que define dicho eje a lo largo del movimiento (axoides fijo y móvil).

2. Interpretar el movimiento instantáneo como composición de una rotación alrededor del eje del cono VC y otra rotación alrededor de Oz. Calcular la velocidad y aceleración angular del cono.

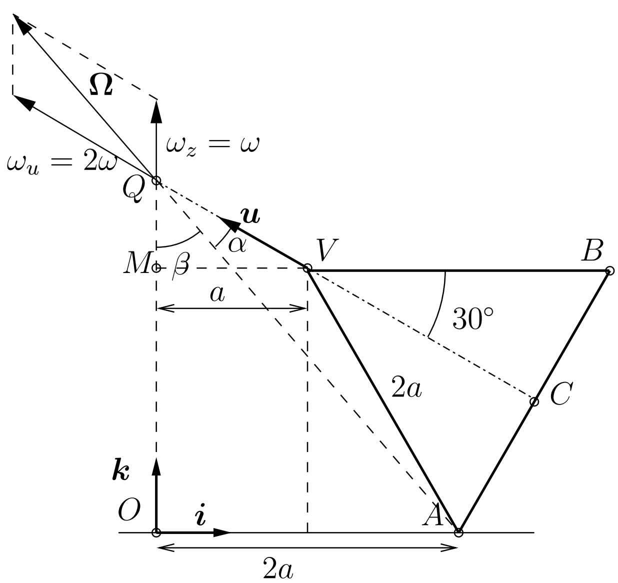
3. Velocidad y aceleración de los siguientes puntos del cono:

   a) Punto material B de la base del cono que en un determinado instante se encuentra más alejado del plano de rodadura;

   b) Punto material D de la base del cono que en un determinado instante se encuentra sobre el diámetro horizontal, en el punto más avanzado del mismo según el sentido del movimiento.

⋆

1.— El cono tiene al menos un punto de velocidad nula, el de rodadura A, por lo que el movimiento será una rotación instantánea alrededor de un eje por dicho punto. No debe confundirse el punto (geométrico) de contacto, cuya velocidad es $2a\omega$, con el punto (material) del cono sobre el contacto, cuya velocidad es nula. El vértice del cono V describe una circunferencia horizontal con centro en M situado en la coordenada $z = a\sqrt{3}$, por lo que la generatriz VA está en todo momento en un plano vertical (móvil) por el eje Oz y el punto A. Este plano vertical contiene también al eje del cono VC (ver figura adjunta). A lo largo del movimiento dicho plano vertical gira alrededor del eje Oz con velocidad de rotación ω. Al ser el eje del cono una recta material, el punto Q de corte del mismo con



el eje vertical Oz será un punto fijo Q del movimiento, y por tanto es otro punto de velocidad nula que sirve para definir el eje instantáneo de rotación QA.

El eje instantáneo de rotación QA forma constantemente un ángulo fijo α con el eje (móvil) del cono QC, por lo que el axoide móvil es un cono de semiángulo α y eje QC. Por otra parte, también forma constantemente un ángulo fijo $\beta = \pi/3 - \alpha$ con el eje (fijo) Oz, por lo que el axoide fijo es un cono de semiángulo β y eje Oz. Mediante consideraciones geométricas elementales se obtiene $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}/5$, $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3}/2$.

2.— El movimiento se puede interpretar como una rotación alrededor del eje Oz de velocidad $\omega_z = \omega$, y otra rotación alrededor del eje del cono de velocidad ω_u, que calcularemos. Para esto consideramos que la composición de estas rotaciones debe producir velocidad nula en el punto material sobre A:

$$2a\omega_z - a\omega_u = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_u = 2\omega_z = 2\omega.$$

Por tanto, y teniendo en cuenta que la dirección del eje del cono es $\boldsymbol{u} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}$, la velocidad angular del cono es

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\,\boldsymbol{k} + 2\omega\,\boldsymbol{u} = -\sqrt{3}\omega\,\boldsymbol{i} + 2\omega\,\boldsymbol{k}.$$

Esta velocidad angular permanece constante respecto al plano vertical (móvil) que la contiene, siendo por tanto su derivada únicamente la que corresponde por la rotación de este plano:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega_z\,\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\Omega} = -\omega^2\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}.$$

3.— Las velocidades pedidas las calcularemos a partir del punto A cuya velocidad es nula. Por tanto, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{r}_{AB} = a(\boldsymbol{i} + \sqrt{3}\,\boldsymbol{k})$ y que $\boldsymbol{r}_{AD} = a(\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\boldsymbol{k})$, resulta:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_B &= \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{AB} = 5a\omega\,\boldsymbol{j},\\
\boldsymbol{v}_D &= \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{AD} = a\omega\left(-2\,\boldsymbol{i} + \frac{5}{2}\,\boldsymbol{j} - \sqrt{3}\,\boldsymbol{k}\right).
\end{aligned}$$

Para las aceleraciones emplearemos como punto de referencia el centro de la base, C, que describe una circunferencia horizontal de radio $5a/2$ y por tanto su aceleración es $\boldsymbol{a}_C = -(5/2)a\omega^2\,\boldsymbol{i}$. Resulta

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_B &= \boldsymbol{a}_C + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{CB} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{CB}) = -a\omega^2\left(9\boldsymbol{i} + 2\sqrt{3}\,\boldsymbol{k}\right),\\
\boldsymbol{a}_D &= \boldsymbol{a}_C + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}_{CD} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{CD}) = -a\omega^2\left(\frac{5}{2}\boldsymbol{i} + 7\,\boldsymbol{j}\right).
\end{aligned}$$