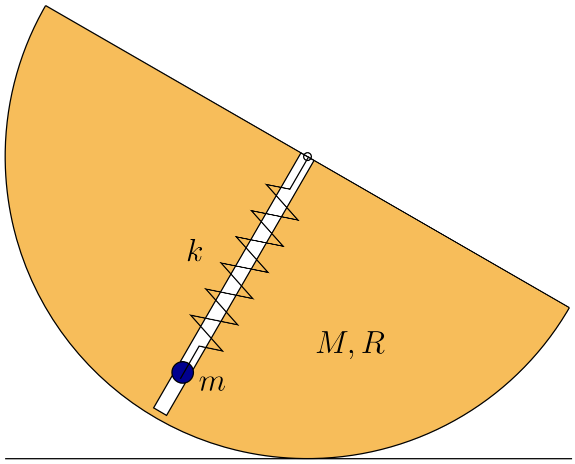
Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE C4 (15 de diciembre de 2009)

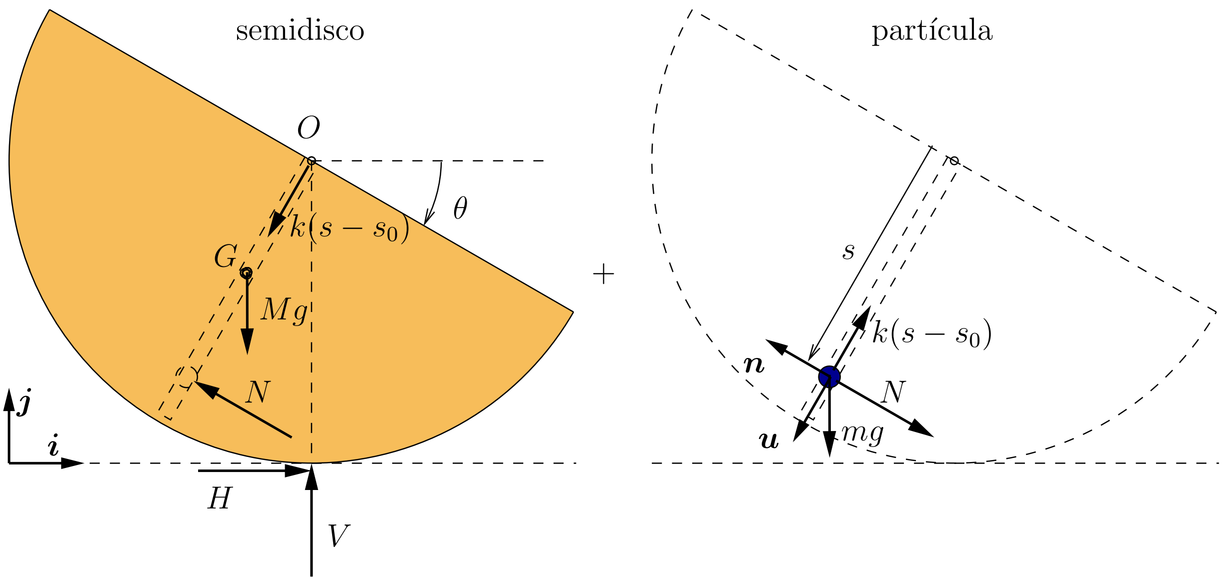
Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

Se considera un semidisco de masa M y radio R que rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, estando en todo momento en un plano vertical fijo. En el semidisco hay una ranura lisa siguiendo el radio en la mitad del mismo, que contiene una partícula de masa m unida por un resorte lineal al centro del semidisco, siendo la constante k y la longitud natural $R/2$. Se pide:



1. Definir unas coordenadas adecuadas para estudiar el movimiento e identificar las reacciones tanto internas como externas sobre el sistema.
2. Obtener las ecuaciones de la dinámica (ecuaciones diferenciales de segundo orden) en función de las coordenadas y las reacciones.
3. Eliminar las reacciones para expresar las ecuaciones necesarias y suficientes de la dinámica en función de las coordenadas y sus derivadas tan sólo.
4. Aislar la expresión de las reacciones en función de las coordenadas y sus derivadas.

1.— El sistema tiene dos grados de libertad, que podemos caracterizar mediante las variables o coordenadas generalizadas (θ, s). El ángulo θ es el giro del semidisco medido en sentido horario, y s es la distancia de la partícula al centro del semidisco.



Las reacciones externas son (H, V) de la recta sobre el semidisco. La componente horizontal H es necesaria para que el semidisco no deslice en el contacto. Por otra parte hay una reacción N de la partícula sobre la ranura en el semidisco, y una igual y contraria del semidisco sobre la partícula. Además de estas reacciones actúan las fuerzas del peso del semidisco (Mg) y de la partícula (mg), así como la acción del resorte $k(s - s_0)$ que es una fuerza interna y actuará en un sentido sobre la partícula y en el contrario sobre el centro del semidisco.

2.— Al plantear las ecuaciones de la dinámica del balance de cantidad de movimiento o de momento cinético intervienen tanto las variables (θ, s) como también necesariamente las reacciones (H, V, N) citadas anteriormente. Plantearemos las ecuaciones dividiendo en dos subsistemas rígidos, correspondientes al semidisco y a la partícula respectivamente, como queda definido en la figura anterior.

- Cantidad de movimiento del semidisco:

$$N\,\boldsymbol{n} + H\,\boldsymbol{i} + V\,\boldsymbol{j} - Mg\,\boldsymbol{j} + k\left(s - \frac{R}{2}\right)\boldsymbol{u} = M\boldsymbol{a}_G\,, \tag{1}$$

  siendo la expresión de la aceleración

$$\boldsymbol{a}_G = R\ddot{\theta}\,\boldsymbol{i} + \frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta}\,\boldsymbol{n} - \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2\boldsymbol{u}\,.$$

- Momento cinético del semidisco, tomando momentos en el centro de masas G, cuya distancia al centro del semidisco es $4R/(3\pi)$:

$$-H\left(R - \frac{4R}{3\pi}\cos\theta\right) - V\frac{4R}{3\pi}\operatorname{sen}\theta + N\left(s - \frac{4R}{3\pi}\right) = I_G\ddot{\theta}\,, \tag{2}$$

  siendo el momento de inercia en G

$$I_G = MR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)\,.$$

- Cantidad de movimiento de la partícula:

$$-N\,\boldsymbol{n} - k\left(s - \frac{R}{2}\right)\boldsymbol{u} - mg\,\boldsymbol{j} = m\boldsymbol{a}_P\,, \tag{3}$$

  siendo la expresión de la aceleración

$$\boldsymbol{a}_P = R\ddot{\theta}\,\boldsymbol{i} + s\ddot{\theta}\,\boldsymbol{n} - s\dot{\theta}^2\boldsymbol{u} + 2\dot{\theta}\dot{s}\,\boldsymbol{n} + \ddot{s}\,\boldsymbol{u}\,.$$

Las expresiones (1), (2) y (3) constituyen cinco ecuaciones escalares, para las cinco incógnitas existentes.

3.— Desarrollamos en primer lugar la ecuación vectorial (3), proyectando sus componentes según las direcciones $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{n}$:

$$m\ddot{s} - mR\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta - ms\dot{\theta}^2 = -k\left(s - \frac{R}{2}\right) + mg\cos\theta\,, \tag{4}$$

$$-mR\ddot{\theta}\cos\theta + ms\ddot{\theta} + 2m\dot{\theta}\dot{s} = -N - mg\operatorname{sen}\theta\,. \tag{5}$$

La ecuación (4) es directamente una de las ecuaciones diferenciales de la dinámica, en la que no intervienen las reacciones. La ecuación (5) sirve para expresar la reacción N entre semidisco y partícula.

Por otra parte, expresando las componentes horizontal y vertical de la ecuación (1):

$$-N\cos\theta + H - k\left(s-\frac{R}{2}\right)\operatorname{sen}\theta = MR\ddot{\theta} + M\frac{4R}{3\pi}(-\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta)\,, \tag{6}$$

$$N\operatorname{sen}\theta + V - Mg - k\left(s-\frac{R}{2}\right)\cos\theta = M\frac{4R}{3\pi}(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\,. \tag{7}$$

Agrupando términos en (2) se puede expresar

$$I_G\ddot{\theta} + HR + (-H\cos\theta + V\operatorname{sen}\theta)\frac{4R}{3\pi} - N\left(s-\frac{4R}{3\pi}\right) = 0\,, \tag{8}$$

y sustituyendo en ésta las expresiones de H y V que se deducen de (6) y (7) se obtiene

$$I_G\ddot{\theta} + HR + \left(-MR\ddot{\theta}\cos\theta + Mg\operatorname{sen}\theta + M\frac{4R}{3\pi}\ddot{\theta}\right)\frac{4R}{3\pi} - Ns = 0\,. \tag{9}$$

Sustituyendo ahora el valor de I_G y de nuevo H a partir de (6),

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} - M\frac{8R^2}{3\pi}\ddot{\theta}\cos\theta + M\frac{4R^2}{3\pi}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + Mg\frac{4R}{3\pi}\operatorname{sen}\theta$$
$$+ N(R\cos\theta - s) + k\left(s-\frac{R}{2}\right)R\operatorname{sen}\theta = 0\,. \tag{10}$$

Finalmente sustituimos la expresión de N a partir de (5), resultando

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} - M\frac{8R^2}{3\pi}\ddot{\theta}\cos\theta + M\frac{4R^2}{3\pi}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + Mg\frac{4R}{3\pi}\operatorname{sen}\theta$$
$$+ [m\ddot{\theta}(R\cos\theta - s) - 2m\dot{\theta}\dot{s} - mg\operatorname{sen}\theta](R\cos\theta - s) + k\left(s-\frac{R}{2}\right)R\operatorname{sen}\theta = 0\,. \tag{11}$$

Las ecuaciones (4) y (11) son las ecuaciones diferenciales de la dinámica pedidas.

4.— Las reacciones se expresan a partir de las ecuaciones ya obtenidas. La reacción normal N resulta de (5),

$$N = m\ddot{\theta}(R\cos\theta - s) - 2m\dot{\theta}\dot{s} - mg\operatorname{sen}\theta\,. \tag{12}$$

Las reacciones H y V resultan de (6) y (7) respectivamente eliminando en éstas la expresión de N de (12):

$$H = [m\ddot{\theta}(R\cos\theta - s) - 2m\dot{\theta}\dot{s} - mg\operatorname{sen}\theta]\cos\theta$$
$$+ k\left(s-\frac{R}{2}\right)\operatorname{sen}\theta + MR\ddot{\theta} + M\frac{4R}{3\pi}(-\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta)\,, \tag{13}$$

$$V = -[m\ddot{\theta}(R\cos\theta - s) - 2m\dot{\theta}\dot{s} - mg\operatorname{sen}\theta]\operatorname{sen}\theta$$
$$+ Mg + k\left(s-\frac{R}{2}\right)\cos\theta + M\frac{4R}{3\pi}(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\,. \tag{14}$$