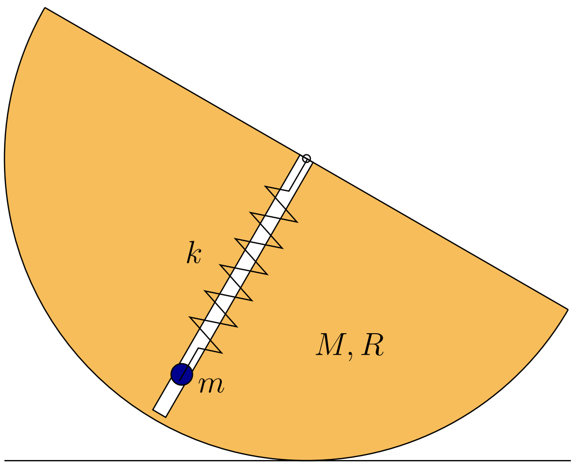
# Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE C5 (2 de febrero de 2010)

*Apellidos* *Nombre* *N.º mat.*

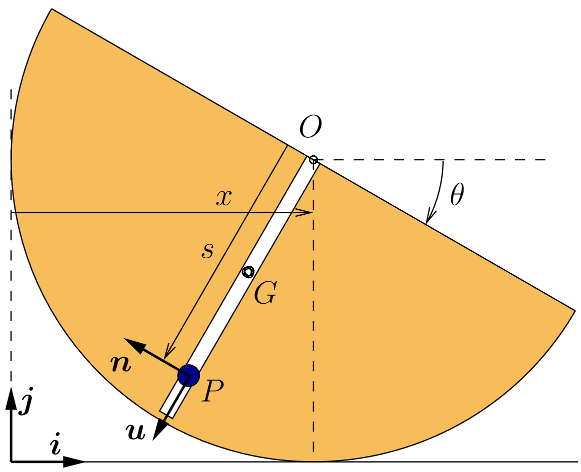
Se considera un semidisco de masa $M$ y radio $R$ que está apoyado sobre una recta horizontal lisa, estando en todo momento en un plano vertical fijo (el semidisco puede rodar y deslizar libremente). En el semidisco hay una ranura lisa siguiendo el radio en la mitad del mismo, que contiene una partícula de masa $m$ unida por un resorte lineal al centro del semidisco, siendo la constante $k$ y la longitud natural $R/2$. Este resorte tiene además un amortiguamiento viscoso lineal de constante $c$. Se pide:




1. Definir unas coordenadas generalizadas libres para el sistema. Obtener las fuerzas generalizadas asociadas.
2. Obtener las expresiones de la energía cinética, potencial de las fuerzas conservativas y función Lagrangiana.
3. Discutir la existencia de integrales primeras y en su caso obtenerlas.
4. Obtener las ecuaciones de Lagrange para las coordenadas no cíclicas.

⋆

**1.—** El sistema tiene tres grados de libertad, que podemos caracterizar mediante las coordenadas generalizadas libres $(x, \theta, s)$: $x$ es la traslación horizontal del centro $O$ del semidisco, $\theta$ el giro del mismo medido en sentido horario y $s$ la distancia de la partícula al centro del semidisco.




La distancia desde el centro del semidisco al centro de masas $G$ del mismo es $\overline{OG} = 4R/(3\pi)$.

Las fuerzas actuantes son los pesos del semidisco $-Mg\,\boldsymbol{j}$ y de la partícula $-mg\,\boldsymbol{j}$, así como la acción del resorte $-[k(s-s_0)+c\dot{s}]$ que es una fuerza interna y actuará en un sentido sobre la partícula $P$ y en el contrario sobre el centro $O$ del semidisco. El desplazamiento virtual de los puntos de aplicación de estas fuerzas es, empleando los ejes indicados en la figura $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ y $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u})$,

$$\delta\boldsymbol{r}_G = \delta x\,\boldsymbol{i} + \frac{4R}{3\pi}\delta\theta\,\boldsymbol{n}\,; \quad \delta\boldsymbol{r}_P = \delta x\,\boldsymbol{i} + s\delta\theta\,\boldsymbol{n} + \delta s\,\boldsymbol{u}\,; \quad \delta\boldsymbol{r}_O = \delta x\,\boldsymbol{i}\,. \tag{1}$$

El trabajo virtual se calcula entonces como

$$\begin{aligned}\delta W &= -Mg\,\boldsymbol{j}\cdot\delta\boldsymbol{r}_G - mg\,\boldsymbol{j}\cdot\delta\boldsymbol{r}_P - [k(s-s_0)+c\dot{s}]\boldsymbol{u}\cdot(\delta\boldsymbol{r}_P - \delta\boldsymbol{r}_O)\\ &= -Mg\frac{4R}{3\pi}\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta - mgs\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta + mg\cos\theta\,\delta s - [k(s-s_0)+c\dot{s}]\delta s\end{aligned} \tag{2}$$

e identificando coeficientes se obtienen las fuerzas generalizadas:

$$Q_x = 0\,; \quad Q_s = mg\cos\theta - k(s-s_0) - c\dot{s}\,; \quad Q_\theta = -Mg\frac{4R}{3\pi}\operatorname{sen}\theta - mgs\operatorname{sen}\theta\,. \tag{3}$$

**2.—** La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv_P^2\,, \tag{4}$$

siendo la velocidad de $G$

$$\boldsymbol{v}_G = \dot{x}\,\boldsymbol{i} + \frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}\,\boldsymbol{n} \quad \Rightarrow \quad v_G^2 = \dot{x}^2 + \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2\dot{\theta}^2 - 2\frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\,. \tag{5}$$

Por su parte, la velocidad de la partícula es

$$\boldsymbol{v}_P = \dot{x}\,\boldsymbol{i} + s\dot{\theta}\,\boldsymbol{n} + \dot{s}\,\boldsymbol{u} \quad \Rightarrow \quad v_P^2 = \dot{x}^2 + s^2\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2 - 2s\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta - 2\dot{x}\dot{s}\operatorname{sen}\theta\,. \tag{6}$$

Considerando el momento de inercia del semidisco en $G$ que vale $I_G = MR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)$, la expresión de la energía cinética es

$$T = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - M\frac{4R}{3\pi}\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{x} + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2) - ms\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta - m\dot{x}\dot{s}\operatorname{sen}\theta \tag{7}$$

El potencial de las fuerzas conservativas vale

$$V = -Mg\frac{4R}{3\pi}\cos\theta - mgs\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(s - \frac{R}{2}\right)^2\,. \tag{8}$$

La expresión de la Lagrangiana (parcial) $L = T - V$ resulta

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - M\frac{4R}{3\pi}\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{x} + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2) - ms\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta - m\dot{x}\dot{s}\operatorname{sen}\theta \\ + Mg\frac{4R}{3\pi}\cos\theta + mgs\cos\theta - \frac{1}{2}k\left(s - \frac{R}{2}\right)^2\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Además de los términos que resulten de esta Lagrangiana deberá considerarse explícitamente la fuerza no conservativa

$$Q_s^{\text{nc}} = -c\dot{s}\,. \tag{10}$$

**3.—** Comprobamos que la Lagrangiana (9) no depende de $x$, y además no hay otras fuerzas en esta dirección, por lo que esta coordenada es cíclica:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0,\ Q_x^{\text{nc}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} - M\frac{4R}{3\pi}\cos\theta\,\dot{\theta} - ms\dot{\theta}\cos\theta - m\dot{s}\operatorname{sen}\theta = \text{cte.} \tag{11}$$

En relación con la energía, existe una fuerza no conservativa del amortiguamiento viscoso por lo que no se conserva. Tampoco puede obtenerse la integral de Jacobi como constante debido a esta fuerza no conservativa.

**4.—** La ecuación del movimiento para la coordenada cíclica $x$ es (11). Para las otras dos coordenadas podemos obtener las ecuaciones de Lagrange correspondientes derivando la Lagrangiana (9). En primer lugar, para $\theta$:

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} - M\frac{4R}{3\pi}\cos\theta\ddot{x} + ms^2\ddot{\theta} + 2ms\dot{s}\dot{\theta} - ms\ddot{x}\cos\theta + Mg\frac{4R}{3\pi}\operatorname{sen}\theta + mgs\operatorname{sen}\theta = 0\,. \tag{12}$$

Finalmente, la ecuación correspondiente a $s$ es

$$m\ddot{s} - m\ddot{x}\operatorname{sen}\theta - ms\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k\left(s - \frac{R}{2}\right) = -c\dot{s}\,. \tag{13}$$