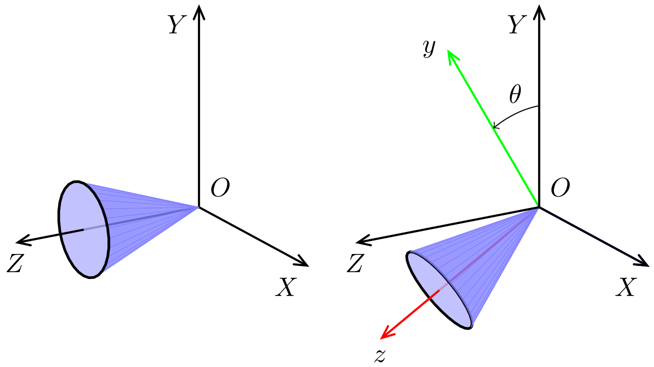
Mecánica

EJERCICIO DE CLASE (1 de febrero de 2010)

Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

Se considera un sólido cónico, de altura h, radio de la base r y masa m, con vértice O.

Se considera un triedro cartesiano de referencia $OXYZ$ fijo, de forma que OZ coincida en el instante inicial con el eje de revolución del cono. Se aplica al cono una rotación $\mathbf{R}$ de ángulo $\theta = 30°$ alrededor de OX. Obtener las componentes del tensor de inercia en el triedro citado.



⋆

Los momentos principales de inercia del cono respecto a su vértice son

$$A = B = \frac{3}{20}m(r^2 + 4h^2)\,, \quad C = \frac{3}{10}mr^2\,, \tag{1}$$

con lo cual el tensor de inercia en los ejes ligados al sólido tiene las componentes

$$[\mathbf{I}_O^{\mathcal{B}}] = \frac{3}{20}M \begin{pmatrix} r^2+4h^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2+4h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2r^2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Denominamos $\{\mathbf{x}^{\mathcal{B}}\}^{\mathrm{T}} = (x, y, z)$ a las coordenadas de un punto dado del sólido en el triedro del cuerpo, que son lógicamente constantes. La rotación indicada (θ alrededor de OX) origina las siguientes coordenadas (X, Y, Z) en el triedro fijo:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{X}\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{x}^{\mathcal{B}}\}\,. \tag{3}$$

La matriz de cambio de ejes $[\mathbf{A}]$ opera para el cambio de coordenadas mediante $\{\mathbf{x}'\} = [\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}\{\mathbf{x}\}$, por lo que es $[\mathbf{A}] = [\mathbf{R}]^{\mathrm{T}}$. De esta forma, las nuevas coordenadas del tensor en XYZ serán

$$[\mathbf{I}_O] = [\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{I}_O^{\mathcal{B}}][\mathbf{A}] = [\mathbf{R}][\mathbf{I}_O^{\mathcal{B}}][\mathbf{R}]^{\mathrm{T}}\,. \tag{4}$$

Operando y sustituyendo $\theta = 30°$,

$$\begin{aligned}
[\mathbf{I}_O] &= \frac{3}{20}M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2+4h^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2+4h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \frac{3}{20}M \begin{pmatrix} r^2+4h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4}r^2+3h^2 & \frac{\sqrt{3}}{4}(4h^2-r^2) \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4}(4h^2-r^2) & \frac{7}{4}r^2+h^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5}$$