Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE C6 (23 de febrero de 2010)

Apellidos *Nombre* *N.º mat.*

Se considera un cono pesado de masa m, radio en la base r y altura $h = r$. El cono tiene el centro O de su base fijo. Se pide:

1. Componentes del tensor de inercia en O para ejes ligados al cuerpo
2. Momento de las fuerzas en O para una posición genérica del cono
3. Ecuaciones de Euler de la dinámica
4. Considerando ahora que no exista peso, y suponiendo una velocidad de rotación inicial ω alrededor del eje del cono y $\omega\sqrt{3}$ normal al mismo, obtener:
   a) Momento cinético en O y energía cinética
   b) Lugar geométrico que desarrolla $\boldsymbol{\Omega}$ en el movimiento
   c) Expresiones de la nutación del eje del cono y de su velocidad de precesión respecto a la dirección invariante

Nota: Los momentos principales de inercia en el vértice V de un cono son

$$A = \frac{3}{20}m(r^2 + 4h^2)\,, \quad C = \frac{3}{10}mr^2\,.$$

⋆

1.— Se trata de un sólido con simetría de revolución. Tanto en V como en el centro de la base O los ejes principales de inercia son el de revolución y cualesquiera dos ejes normales al mismo, la orientación concreta de los mismos dentro del plano es indiferente. Empleando el teorema de Steiner para pasar de V al CDM G y de éste a O se deducen los momentos principales de inercia y las componentes del tensor:

$$A = \frac{1}{20}m(3r^2 + 2h^2) = \frac{1}{4}mr^2\,; \quad C = \frac{3}{10}mr^2\,; \quad \boldsymbol{I}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\,. \tag{1}$$

2.— Denominaremos $\boldsymbol{K}$ a la dirección vertical y $\boldsymbol{k}$ a la dirección del eje de revolución del cono. El ángulo entre ambos se denomina θ (nutación). La única fuerza aplicada que produce momentos en O es el peso ($-mg\,\boldsymbol{K}$). Teniendo en cuenta que el CDM se sitúa a la distancia $h/4 = r/4$ de la base, el momento es

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{h}{4}\boldsymbol{k} \wedge (-mg\,\boldsymbol{K}) = mg\frac{h}{4}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i}\,, \tag{2}$$

siendo $\boldsymbol{i}$ un vector unitario horizontal perpendicular al plano definido por $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{k}$. (Se trataría del vector unitario del triedro intermedio denominado $\boldsymbol{u}$, pág. 8.42 del libro de texto.)

3.— Al tratarse de un sólido de revolución es conveniente plantear las ecuaciones en el triedro intermedio (pág. 8.49 del libro de texto). La expresión vectorial es

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rel}} + (\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\boldsymbol{k}) \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \,, \tag{3}$$

y desarrollando las componentes

$$\begin{aligned} mg\frac{h}{4}\operatorname{sen}\theta &= A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\Omega_z\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta \\ 0 &= A\ddot{\psi}\operatorname{sen}\theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta - C\Omega_z\dot{\theta} \\ 0 &= C\dot{\Omega}_z \end{aligned} \tag{4}$$

De la última de las expresiones anteriores se deduce $\Omega_z = \text{cte.}$, cuyo valor quedará definido por las condiciones iniciales.

4.— Al tratarse de un movimiento por inercia (Poinsot) se conserva el momento cinético en O tanto en módulo como en dirección:

$$\boldsymbol{H}_O = H\,\boldsymbol{K} \,, \tag{5}$$

siendo $\boldsymbol{K}$ aquí la denominada *dirección invariante* (no tiene sentido hablar de vertical ya que no hay peso). Las condiciones iniciales dadas definen $\Omega_z = \omega$ y en dirección normal al eje $\sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2} = \omega\sqrt{3}$. El módulo vale

$$H = \sqrt{A^2(\Omega_x^2 + \Omega_y^2) + C^2\Omega_z^2} = \frac{\sqrt{111}}{20} mr^2\omega \,. \tag{6}$$

Por otra parte, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}(\Omega_x^2 + \Omega_y^2) + \frac{1}{2}C\Omega_z^2 = \frac{21}{40}mr^2\omega^2 \,. \tag{7}$$

El eje de $\boldsymbol{\Omega}$ define respecto al sólido un cono de revolución con eje $O\boldsymbol{k}$ *(cono del cuerpo)*, de semiángulo α. Asimismo, respecto a una referencia espacial fija define otro cono cuyo eje es la dirección invariante $O\boldsymbol{K}$, de semiángulo β *(cono fijo)*. Ambos conos son tangentes en todo instante, y el cono del cuerpo rueda sin deslizar sobre el cono fijo compartiendo la generatriz de contacto $\boldsymbol{\Omega}$.

Sabemos por otra parte que el ángulo de nutación θ que forman $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{k}$ es constante (pág. 9.11 del libro de texto):

$$\cos\theta = \frac{C\Omega_z}{H} = \frac{6}{\sqrt{111}} \quad \Rightarrow \quad \theta = 55{,}285^\circ \,. \tag{8}$$

El semiángulo del cono del cuerpo vale (pág. 9.12 del libro):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C}{A}\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ \,. \tag{9}$$

En consecuencia, el cono fijo tiene por semiángulo

$$\beta = \alpha - \theta = 4{,}715^\circ \,. \tag{10}$$

Por último, la velocidad de precesión se puede calcular mediante la expresión en la pág. 9.11 del libro,

$$\dot{\psi} = \frac{H}{A} = \frac{\sqrt{111}}{5}\omega \,. \tag{11}$$