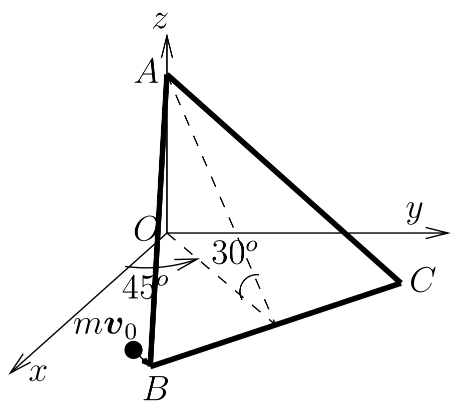
Mecánica

PRÁCTICA PUNTUABLE C7 (22 de marzo de 2010)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Sea una placa triangular equilátera ABC de lado a y masa M, cuyo vértice A puede deslizar sin rozamiento sobre una recta vertical Oz mediante un enlace bilateral. El lado BC está obligado a moverse dentro de un plano liso horizontal Oxy también de forma bilateral. En un instante en que la placa se encuentra en reposo formando un ángulo de 30^o con el plano horizontal y la proyección de la altura máxima pendiente del triángulo forma 45^o con el eje Ox, incide una partícula de masa m con velocidad horizontal $\boldsymbol{v}_0$ en el vértice B y ortogonal a la arista BC.

Sabiendo que tras el impacto la partícula se queda en reposo, se pide:



1. Identificar las percusiones reactivas.

2. Calcular la velocidad angular de la placa y dichas percusiones

---

Para la solución del problema definamos los siguientes triedos que acompañarán al cuerpo en su movimiento:

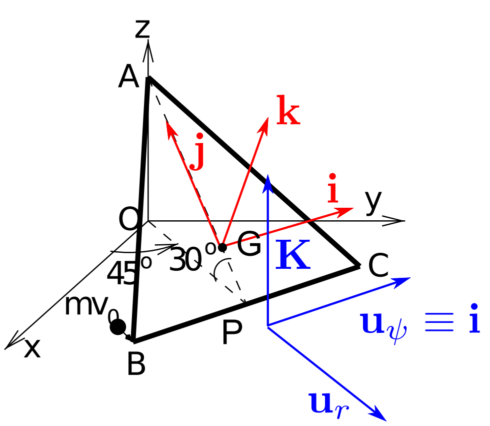
- Triedo $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ definido en G, donde $\mathbf{i}$ es paralelo al lado BC, $\mathbf{j}$ tiene la máxima pendiente dentro del triángulo y $\mathbf{k}=\mathbf{i}\wedge\mathbf{j}$

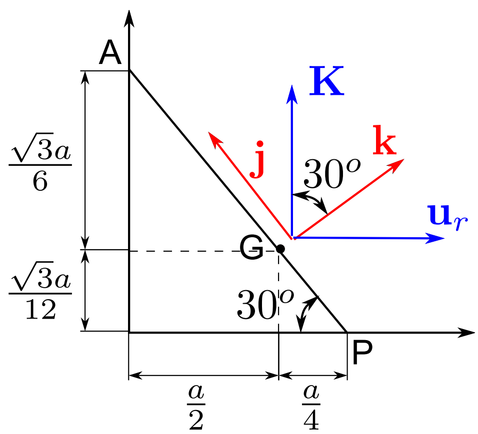
- Triedo $\{\mathbf{u}_r,\mathbf{u}_\psi\equiv\mathbf{i},\mathbf{K}\}$ definido en P, que es la base asociada al sistema de coordenadas cilíndricas en dicho punto.

Entre ambos triedos se cumplen las siguientes relaciones:

$$\left\{\begin{array}{rll}\mathbf{j}= & -\operatorname{sen}(60)\mathbf{u}_r+\cos(60)\mathbf{K} & =-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{u}_r+\frac{1}{2}\mathbf{K}\\ \mathbf{k}= & \operatorname{sen}(30)\mathbf{u}_r+\cos(30)\mathbf{K} & =\frac{1}{2}\mathbf{u}_r+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{K}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rll}\mathbf{u}_r= & -\operatorname{sen}(60)\mathbf{j}+\cos(60)\mathbf{k} & =-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}+\frac{1}{2}\mathbf{k}\\ \mathbf{K}= & \operatorname{sen}(30)\mathbf{j}+\cos(30)\mathbf{k} & =\frac{1}{2}\mathbf{j}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}\end{array}\right.$$





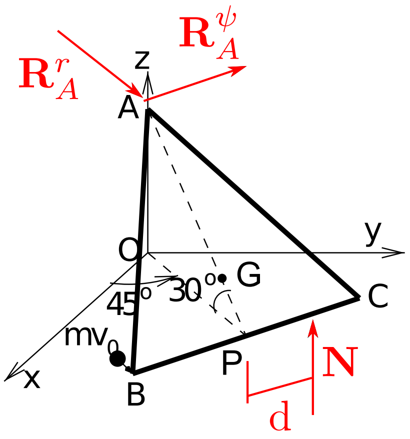
1.- Las percusiones reactivas existentes son dos (ver figura):

- Una percusión reactiva en A horizontal (debido al enlace liso vertical en A) que descompondremos según las direcciones $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\psi \equiv \mathbf{i}$:

$$\mathbf{R}_A = R_A^r \mathbf{u}_r + R_A^\psi \mathbf{u}_\psi$$

- Una percusión reactiva vertical (debido al enlace liso en el plano $0xy$) distribuida a lo largo de la recta BC. La resultante estará situada a una distancia d de P.

$$\mathbf{N} = N\mathbf{K}$$



2.- El movimiento más general de la placa manteniendo B y C en el plano $0xy$ admite los siguientes giros:

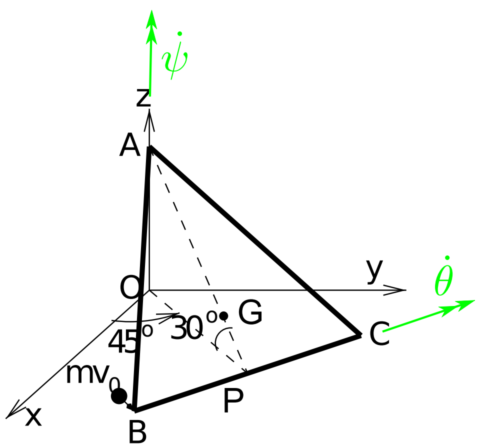
- ψ: giro respecto al eje $\mathbf{K}$.
- θ: giro respecto al eje $\mathbf{i} \equiv \mathbf{u}_\psi$.

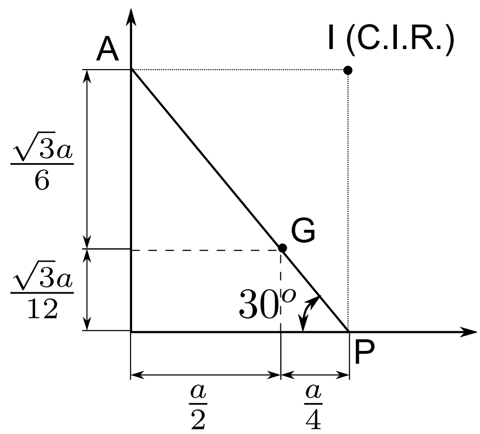
Por lo tanto, la velocidad angular de la placa es:

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\psi}\mathbf{K} + \dot{\theta}\mathbf{u}_\psi = \dot{\theta}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\dot{\psi}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\psi}\mathbf{k} \tag{1}$$

La velocidad del centro de masas de la placa triangular inmediatamente después del impacto puede descomponerse como la suma de una rotación de arrastre alrededor del eje $0z$ con velocidad angular $\dot{\psi}$ y un movimiento relativo que es una rotación instantánea, en el plano vertical que pasa por el origen y por el punto P, con C.I.R. en I y velocidad angular $\dot{\theta}$.

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_{arr}^{\psi} + \mathbf{v}_{rel}^{\theta} = \dot{\psi}\frac{a}{2}\mathbf{u}_\psi + \dot{\theta}\mathbf{u}_\psi \wedge \left(-\frac{a}{4}\mathbf{u}_r - \frac{a\sqrt{3}}{6}\mathbf{K}\right) = -\frac{a\sqrt{3}}{6}\dot{\theta}\mathbf{u}_r + \frac{a}{2}\dot{\psi}\mathbf{u}_\psi + \frac{a}{4}\dot{\theta}\mathbf{K} \tag{2}$$





En el sistema formado por la placa triangular y la partícula imponemos que la suma de las impulsiones externas es igual a la variación de la cantidad de movimiento de dicho sistema:

$$\sum_i \mathbf{I}_i^{ext} = \mathbf{\Phi}^* - \mathbf{\Phi} \tag{3}$$

donde:

- $\sum_i \mathbf{I}_i^{ext}$ es la suma de las impulsiones externas al sistema:

$$\sum_i \mathbf{I}_i^{ext} = \mathbf{R}_A + \mathbf{N} = R_A^r \mathbf{u}_r + R_A^\psi \mathbf{u}_\psi + N\mathbf{K} \tag{4}$$

- $\mathbf{\Phi}^*$ es la cantidad de movimiento después del choque:

$$\mathbf{\Phi}^* = \underbrace{M\mathbf{v}_G^*}_{\text{placa}} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\text{particula}} = -M\frac{a\sqrt{3}}{6}\dot{\theta}\mathbf{u}_r + M\frac{a}{2}\dot{\psi}\mathbf{u}_\psi + M\frac{a}{4}\dot{\theta}\mathbf{K} \tag{5}$$

donde la velocidad del punto G ha sido calculada en (2).

- $\mathbf{\Phi}$ es la cantidad de movimiento antes del choque:

$$\mathbf{\Phi} = \underbrace{\mathbf{0}}_{\text{placa}} + \underbrace{m\mathbf{v}_p}_{\text{particula}} = mv_0\mathbf{u}_r \tag{6}$$

Llevando las ecuaciones (4), (5) y (6) a la ecuación (3) e igualando términos obtenemos:

$$R_A^r = -M\frac{a\sqrt{3}}{6}\dot{\theta} - mv_0 \tag{7a}$$

$$R_A^\psi = M\frac{a}{2}\dot{\psi} \tag{7b}$$

$$N = M\frac{a}{4}\dot{\theta} \tag{7c}$$

En el sistema formado por la placa triangular y la partícula imponemos que la suma de los momentos de las impulsiones externas en G es igual a la variación del momento cinético en G de dicho sistema:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{I}_i^{ext} = \mathbf{H}_G^* - \mathbf{H}_G \tag{8}$$

donde:

- $\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{I}_i^{ext}$ es la suma de los momentos de las impulsiones externas en G:

$$\begin{aligned}\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{I}_i^{ext} &= \left(-\frac{a}{2}\mathbf{u}_r + \frac{a\sqrt{3}}{6}\mathbf{K}\right) \wedge \left(R_A^r\mathbf{u}_r + R_A^\psi\mathbf{u}_\psi\right) + \\ &\left(\frac{a}{4}\mathbf{u}_r + d\,\mathbf{u}_\psi - \frac{a\sqrt{3}}{12}\mathbf{K}\right) \wedge (N\mathbf{K}) \\ &= \left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}R_A^\psi + d\,N\right)\mathbf{u}_r + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}R_A^r - \frac{a}{4}N\right)\mathbf{u}_\psi - \frac{a}{2}R_A^\psi\mathbf{K}\end{aligned} \tag{9}$$

- $\mathbf{H}_G^*$ es el momento cinético después del choque:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_G^* &= \underbrace{\mathbf{I}_G\mathbf{\Omega}}_{\text{placa}} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\text{particula}} = \frac{1}{24}Ma^2\left(\dot{\theta}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\dot{\psi}\mathbf{j} + \sqrt{3}\dot{\psi}\mathbf{k}\right) \\ &= \frac{1}{96}\left(\sqrt{3}Ma^2\dot{\psi}\mathbf{u}_r + 4Ma^2\dot{\theta}\mathbf{u}_\psi + 7Ma^2\dot{\psi}\mathbf{K}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

donde $\mathbf{\Omega}$ es la velocidad angular calculada en (1) y donde el tensor de inercia de la placa triangular definido en G y en los ejes $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es:

$$\mathbf{I}_G = \frac{1}{24}Ma^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \tag{11}$$

- $\mathbf{H}_G$ es el momento cinético antes del choque:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_G &= \underbrace{\mathbf{0}}_{\text{placa}} + \underbrace{\overline{\mathbf{GB}} \wedge \mathbf{v}^p}_{\text{particula}} = \left(\frac{a}{4}\mathbf{u}_r - \frac{a}{2}\mathbf{u}_\psi - \frac{a\sqrt{3}}{12}\mathbf{K}\right) \wedge mv_0\mathbf{u}_r \\
&= -m\frac{a\sqrt{3}}{12}v_0\mathbf{u}_\psi + m\frac{a}{2}v_0\mathbf{K} \qquad (12)
\end{aligned}$$

Llevando las ecuaciones (9), (10) y (12) a la ecuación (8) e igualando términos obtenemos:

$$-\frac{a\sqrt{3}}{6}R_A^\psi + d\,N = \frac{\sqrt{3}}{96}Ma^2\dot{\psi} \qquad (13a)$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{6}R_A^r - \frac{a}{4}N = \frac{4}{96}Ma^2\dot{\theta} + m\frac{a\sqrt{3}}{12}v_0 \qquad (13b)$$

$$-\frac{a}{2}R_A^\psi = \frac{7}{96}Ma^2\dot{\psi} - m\frac{a}{2}v_0 \qquad (13c)$$

Las ecuaciones (7a), (7b), (7c), (13a), (13b) y (13c) forman un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas $\{\dot{\psi}, \dot{\theta}, R_A^r, R_A^\psi, N, d\}$. Resolviéndolo obtenemos:

$$\dot{\psi} = \frac{48}{31}\,\frac{mv_0}{Ma} \qquad (14a)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}\,\frac{mv_0}{Ma} \qquad (14b)$$

$$R_A^r = -\frac{1}{3}\,mv_0 \qquad (14c)$$

$$R_A^\psi = \frac{24}{31}\,mv_0 \qquad (14d)$$

$$N = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,mv_0 \qquad (14e)$$

$$d = -\frac{27}{62}\,a \qquad (14f)$$