

# MECÁNICA

## Práctica nº 13

curso 2001-2002

**61.** Sea un sólido rígido  $\mathcal{B}$  con un punto fijo  $O$  y un triedro cartesiano  $Oxyz$  fijo. Se producen dos rotaciones consecutivas de  $\mathcal{B}$ , la primera un ángulo  $\alpha$  alrededor del eje  $Oz$ , y la segunda un ángulo  $\beta$  alrededor del nuevo eje  $Ox'$  (resultado del primer giro sobre el eje  $Ox$ ). Se pide:

1. Obtener la expresión matricial que relaciona las coordenadas de un punto en la configuración final,  $(x, y, z)^T$ , con las coordenadas iniciales del mismo punto,  $(x^o, y^o, z^o)^T$ .
2. Emplear esta expresión para deducir la relación entre las componentes del tensor de inercia en la base  $Oxyz$  entre ambas configuraciones.
3. Suponiendo  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $\beta = \beta(t)$  funciones dadas del tiempo, calcular a partir de la matriz de rotación la velocidad angular del sólido, y expresar sus coordenadas tanto en el triedro del cuerpo como en el fijo para unos valores  $(\alpha, \beta)$  genéricos.

**62.** Tomando para el mismo caso del problema anterior las rotaciones  $\alpha = \pi/2$  y  $\beta = \pi/2$ :

1. Calcular el eje ( $\mathbf{p}$ ) alrededor del cual se puede considerar que ha girado el sólido desde la configuración inicial a la final y la magnitud angular ( $\phi$ ) de dicho giro (vector de rotación del teorema de Euler).
2. Justificar por qué, si la definición de las rotaciones consecutivas se hace de forma relativa (respecto de los nuevos ejes en cada caso) la composición de las matrices de rotación se hace por la derecha

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}_1] \cdot [\mathbf{R}_2] \cdot \dots \cdot [\mathbf{R}_n],$$

mientras que si la definición de las rotaciones consecutivas se hace respecto de los ejes absolutos (fijos) la composición se hace por la izquierda:

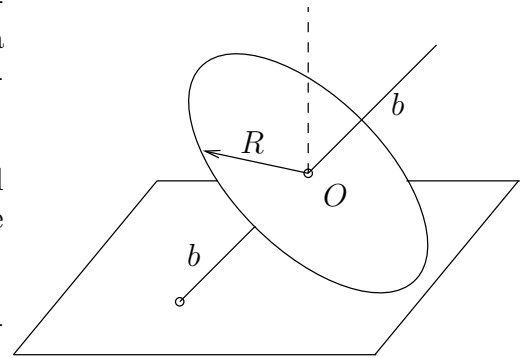
$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}_n] \cdot [\mathbf{R}_{n-1}] \cdot \dots \cdot [\mathbf{R}_1].$$

3. Se define ahora el movimiento del sólido como una primera rotación  $\alpha = \pi/2$  alrededor de  $Oz$ , seguida de  $\beta = \pi/2$  alrededor del eje  $Oy$  (es decir, del eje absoluto inicial, no del transformado  $Oy'$ ). Obtener la matriz de componentes de la rotación conjunta, verificando que es la misma que se obtuvo antes.

**63.** Un sólido está formado por un disco homogéneo de espesor despreciable, masa  $M$  y radio  $R$ , soldado a una varilla rígida sin mas de longitud  $2b$  unida ortogonalmente al disco por el centro  $O$  de ambos sólidos. la varilla se apoya por un extremo sobre un suelo liso horizontal, sobre el que puede deslizar libremente. Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento general del sólido, supuesto que no llegue a tocar el borde del disco con el suelo.
2. Integrales primeras del movimiento y su interpretación física.
3. obtener la expresión del valor de la reacción del suelo, en función exclusivamente de  $\theta$  y su derivada  $\dot{\theta}$ .

(Examen Parcial, Curso 00/01)



**64.** Un sistema está compuesto por un disco de masa  $m$  y radio  $R$  y un mecanismo de suspensión de masa despreciable que lo soporta de la forma que se expone a continuación.

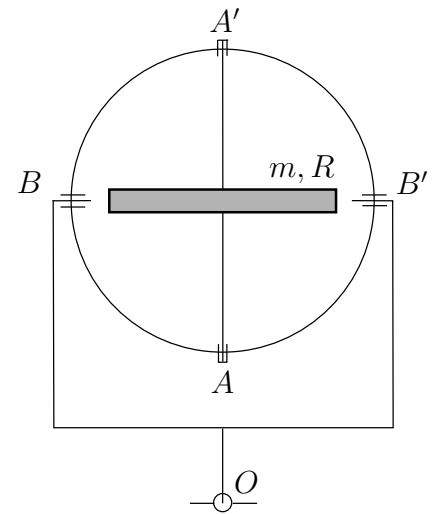
El eje  $AA'$  perpendicular al disco por su centro es el diámetro de un aro que tiene radio suficiente para alojar a dicho disco. Este aro se articula a un bastidor en forma de  $U$  en los puntos  $BB'$ , de forma que las direcciones definidas por  $AA'$  y  $BB'$  son perpendiculares. Por último, el bastidor está articulado en su base a un punto fijo  $O$ , que se encuentra a una distancia  $L$  del centro del disco. El aro incorpora un pequeño motor que impone al disco una velocidad de giro relativa al aro constante de valor  $\omega_0$ . A su vez, el aro puede girar libremente alrededor del eje  $BB'$ , y el bastidor en  $U$  sólo puede moverse girando alrededor de  $O$  contenido en todo momento en un plano vertical fijo.

Inicialmente la configuración del mecanismo es la de la Figura adjunta, con el disco girando con velocidad  $\omega_0$  alrededor del eje  $AA'$  vertical y el aro en reposo totalmente contenido en el mismo plano vertical que el bastidor en  $U$ .

En un cierto instante se produce una perturbación de magnitud arbitraria de forma que el eje  $AA'$  se aparta de la vertical y el mecanismo adquiere un movimiento general.

Se pide:

1. Expresión de la velocidad angular del disco en función de los grados de



libertad y sus derivadas;

2. Ecuaciones diferenciales de segundo orden del movimiento del disco;
3. Calcular el par que debe ejercer el motor para imponer la velocidad de giro del disco relativa al aro  $\omega_0$  constante, en una posición genérica.

(Examen final junio, Curso 00/01)

**65.** Un bloque rectangular de aristas  $a$ ,  $\frac{3}{2}a$  y  $3a$  y masa  $m$  está soldado por la diagonal de una de sus caras de lados  $(3a, \frac{3}{2}a)$  a un eje que gira sobre unos cojinetes lisos  $A$  y  $B$  con velocidad constante  $\omega$ . Se pide:

1. Determinar el tensor de inercia del bloque en el centro del eje ( $O$ ) respecto de los ejes  $xyz$ , llevando  $Ox$  la dirección del eje y siendo  $Oz$  perpendicular a la cara del bloque.
2. Obtener el momento cinético, la energía cinética, y la derivada temporal del momento cinético (respecto de  $O$ ).
3. Calcular las reacciones en los cojinetes, suponiendo que éstos se hallan situados a una distancia  $4a$  del centro  $O$  de la cara hacia cada lado.

---

★