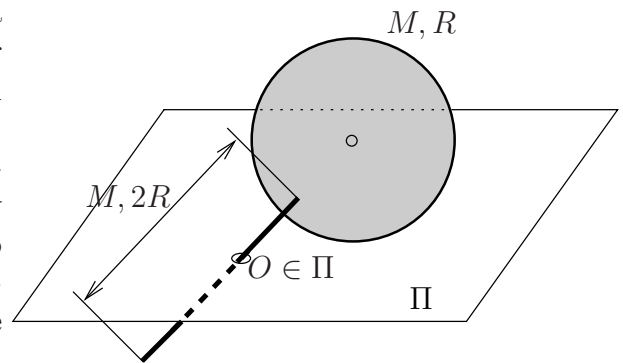


## MECÁNICA

### Práctica nº 12

curso 2003-2004

**56.** Un sólido rígido está formado por una esfera sólida de masa  $M$  y radio  $R$  y una barra de masa  $M$  y longitud  $2R$ , soldada por un extremo a la esfera en un punto de su superficie en dirección normal a la misma. La esfera se mueve apoyada en todo momento sobre un plano horizontal liso fijo  $\Pi$ , y la barra atraviesa el plano por un pequeño agujero también liso, de forma que puede entrar y salir libremente a través del mismo. Se supondrá que la barra no llega a lo largo del movimiento a salir totalmente del agujero. Se pide:



1. Expresar el tensor central de inercia  $I_G$  en ejes principales;
2. Definir claramente los grados de libertad del sistema;
3. Expresión del momento cinético del sólido en el centro de masa;
4. Expresión del momento cinético del sólido en el punto  $O$ , situado en el agujero;
5. Ecuaciones diferenciales del movimiento del sólido.

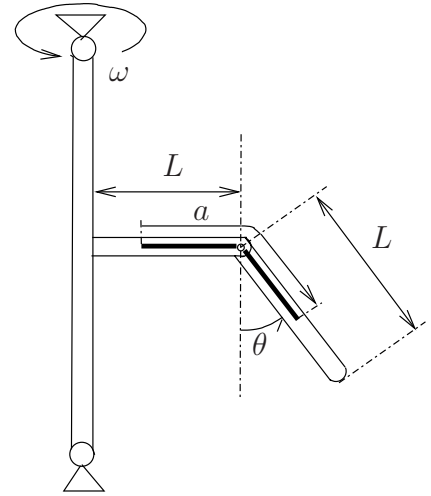
(Examen final, septiembre 2001)

**57.** Una barra hueca de sección despreciable de longitud  $L$  y masa  $M$  se encuentra unida a un eje vertical mediante otra barra horizontal de la misma longitud mediante una articulación que sólo permite el movimiento dentro del plano vertical definido por ambas barras. El conjunto gira en torno al eje vertical con una velocidad angular constante  $\omega$ .

Una cuerda muy flexible de longitud  $a > L$  y de densidad lineal  $\lambda$  puede deslizar sin fricción por el interior del brazo, como se muestra en la figura.

Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema.
2. Calcular las ecuaciones diferenciales del movimiento.
3. Discutir la existencia de integrales primeras y en el caso de existir calcularlas.



**58.** Sea un cono de revolución de masa  $M$ , radio  $R$  y semiángulo cónico  $\alpha = 30^\circ$  que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. En el perímetro exterior de la base dispone de una masa puntual  $m = 3M/10$  rígidamente unida al mismo, sin que estorbe su rodadura.

Se define un sistema de referencia  $Oxyz$  unido rígidamente al cono, siendo  $O$  el vértice, de forma que  $Ox$  es el eje de revolución y  $Oy$  es paralelo en todo instante al radio que une el centro de la base con la masa puntual. En el instante inicial este radio está horizontal y el cono en reposo.

Se pide:

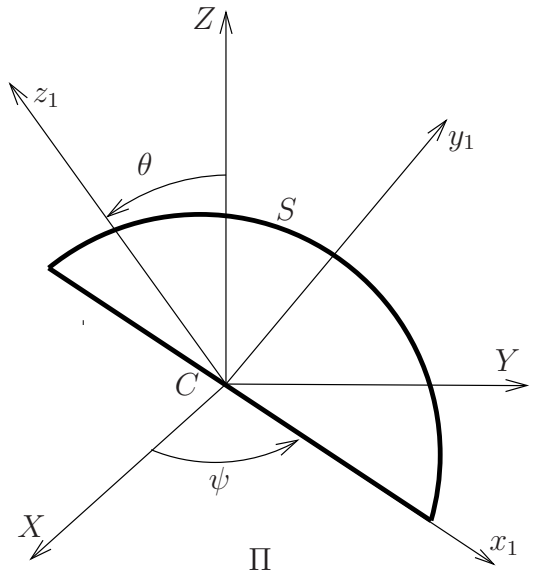
1. Definir de forma completa el movimiento del sólido mediante coordenadas generalizadas libres.
2. Expresar la velocidad angular en los ejes  $Oxyz$  para un instante genérico, en función de dichas coordenadas y sus derivadas.
3. Expresar la energía cinética del sistema en un instante genérico.
4. Obtener las ecuaciones que definen el movimiento.
5. Calcular la velocidad angular cuando la masa puntual esté en contacto con el plano.

(Examen Parcial, Junio 1997)

**59.** Un sólido  $S$  está formado por una semicircunferencia de centro  $C$ , radio  $a$  y una barra de longitud  $2a$  coincidente con el diámetro. La densidad se considera uniforme, siendo  $m$  la masa del sólido  $S$ .

Se considera un sistema de referencia  $Cx_1y_1z_1$  ligado al sólido  $S$  de forma que  $Cx_1$  coincide con el diámetro y  $Cz_1$  es ortogonal al plano definido por  $S$ . Además se considera un sistema de referencia fijo  $CXYZ$  de manera que  $CX$  es una recta fija del plano horizontal fijo  $\Pi$  y  $CZ$  es ortogonal al mismo.

El movimiento del sólido  $S$  es tal que el diámetro desliza sin rozamiento sobre el plano  $\Pi$ , siendo el centro  $C$  un punto fijo de dicho plano. En estas condiciones el movimiento del sólido queda completamente definido por dos parámetros  $\psi$  y  $\theta$ .  $\psi$  es el ángulo formado por las rectas  $Cx_1$  y  $CX$  y  $\theta$  el ángulo formado por las rectas  $Cz_1$  y  $CZ$ .



Se pide:

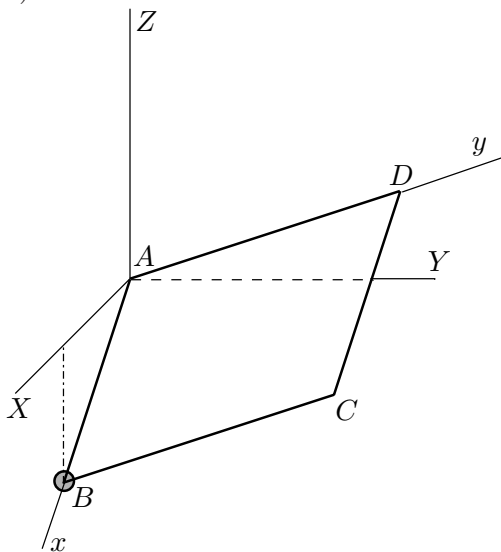
1. Expresar el tensor de inercia del sólido  $S$  en el punto  $C$  referido al sistema de referencia  $Cx_1y_1z_1$ .
2. Expresar la velocidad angular del sólido  $S$  en función de  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$ .
3. Calcular  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$  en función de  $\theta$  sabiendo que en el instante inicial el plano de  $S$  es vertical,  $\dot{\theta}_o = \omega_1$  y  $\dot{\psi}_o = \omega_0$ .
4. Calcular el módulo de la velocidad  $\dot{\theta}_f$  cuando el plano del sólido  $S$  coincide con  $\Pi$ .

(Examen Extraordinario, Septiembre 1997)

**60.** Una placa cuadrada homogénea de lado  $a$  y masa  $m$  cae bajo la acción de la gravedad de forma que el vértice  $A$  permanece fijo y el vértice  $B$  siempre permanece en el plano vertical  $OXZ$ .

Se consideran dos sistemas de referencia: uno fijo  $(XYZ)$  y uno móvil solidario a la placa  $(xyz)$  de manera que en todo momento  $x$  coincide con la arista  $AB$  y el eje  $z$  es perpendicular al plano de la placa por  $A$ .

Se pide:



1. Calcular el tensor de inercia  $I_A$  expresando sus componentes en el triedro del cuerpo  $(xyz)$

2. Expresión de la velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}$  de la placa en una posición genérica, referida a los ejes  $xyz$
3. Expresión del momento cinético  $\mathbf{H}_A$  y de su derivada absoluta respecto del tiempo en una posición genérica, referidos a los ejes  $xyz$
4. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
5. Razonar sobre la existencia de integrales primeras del movimiento, escribiéndolas en el caso de que existan

(Promuebla puntuable, curso 02-03)

---

★