MECÁNICA

56. Sea un sólido rígido $\mathcal{B}$ con un punto fijo O y un triedro cartesiano $Oxyz$ fijo. Se producen dos rotaciones consecutivas de $\mathcal{B}$, la primera un ángulo α alrededor del eje Oz, y la segunda un ángulo β alrededor del nuevo eje Ox' (resultado del primer giro sobre el eje Ox). Se pide:

1. Obtener la expresión matricial que relaciona las coordenadas de un punto en la configuración final, $(x, y, z)^T$, con las coordenadas iniciales del mismo punto, $(x^o, y^o, z^o)^T$.

2. Emplear esta expresión para deducir la relación entre las componentes del tensor de inercia en la base $Oxyz$ entre ambas configuraciones.

3. Suponiendo $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$ funciones dadas del tiempo, calcular a partir de la matriz de rotación la velocidad angular del sólido, y expresar sus coordenadas tanto en el triedro del cuerpo como en el fijo para unos valores (α, β) genéricos.

⋆

57. Tomando para el mismo caso del problema anterior las rotaciones $\alpha = \pi/2$ y $\beta = \pi/2$:

1. Calcular el eje ($\boldsymbol{p}$) alrededor del cual se puede considerar que ha girado el sólido desde la configuración inicial a la final y la magnitud angular (ϕ) de dicho giro (vector de rotación del teorema de Euler).

2. Justificar por qué, si la definición de las rotaciones consecutivas se hace de forma relativa (respecto de los nuevos ejes en cada caso) la composición de las matrices de rotación se hace por la derecha
$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}_1] \cdot [\mathbf{R}_2] \cdot \ldots [\mathbf{R}_n],$$
mientras que si la definición de las rotaciones consecutivas se hace respecto de los ejes absolutos (fijos) la composición se hace por la izquierda:
$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}_n] \cdot [\mathbf{R}_{n-1}] \cdot \ldots [\mathbf{R}_1].$$

3. Se define ahora el movimiento del sólido como una primera rotación $\alpha = \pi/2$ alrededor de Oz, seguida de $\beta = \pi/2$ alrededor del eje Oy (es decir, del eje absoluto inicial, no del transformado Oy'). Obtener la matriz de componentes de la rotación conjunta, verificando que es la misma que se obtuvo antes.

⋆

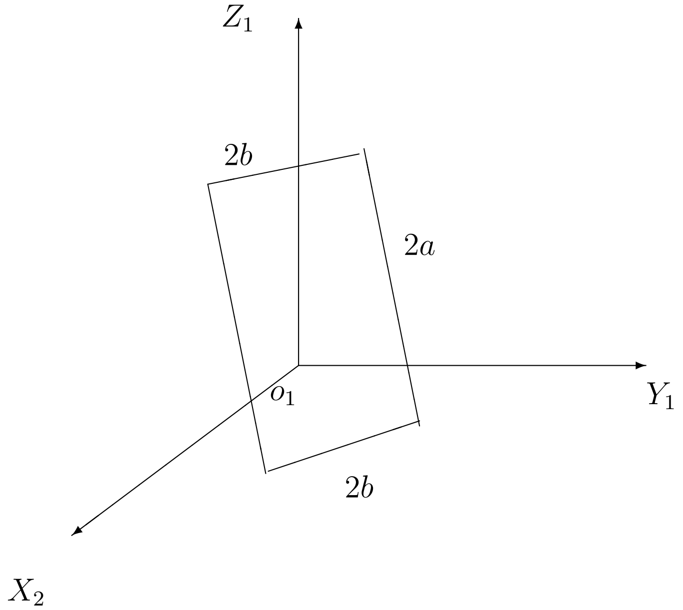
58. Una placa rectangular plana, homogénea y pesada, de masa M, tiene por longitud $2a$ y anchura $2b$ ($a > b$). Dicha placa puede moverse de forma que el punto medio de uno de sus dos lados de longitud $2b$ está obligado a desplazarse sin rozamiento según un eje vertical fijo $O_1\ Z$, mientras el lado opuesto desliza sin rozamiento sobre un plano horizontal también fijo $O_1\ X_1\ Y_1$.

En el instante inicial la placa está inclinada 60° respecto al plano $O_1\ X_1\ Y_1$ y se encuentra sometida a una rotación instantánea con velocidad angular ω_0 dirigida según la vertical ascendente $O_1\ Z_1$.

Se pide:

1. Plantear, según el formulismo lagrangiano, las ecuaciones del movimiento de la placa.

2. Calcular la velocidad del centro de masas de la placa en el instante en que esta llega al plano horizontal. Expresar las componentes de dicha velocidad en un sistema de referencia solidario a la placa.



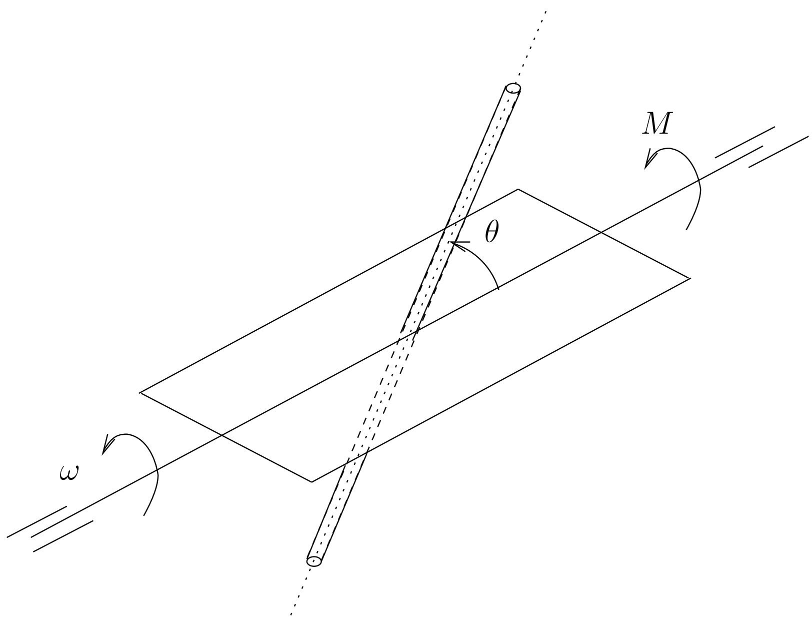
---

59. Una barra de masa m longitud l y sección despreciable está montada sobre una armadura que la permite girar alrededor de una eje perpendicular por su centro, mientras que la armadura gira alrededor de otro eje perpendicular al anterior con velocidad angular constante ω.

Se pide:

1. Obtener la ecuación diferencial que define la variación del ángulo θ entre la barra y el eje de rotación de la armadura.

2. Valor del par M que es necesario aplicar según el eje de giro de la armadura.



(Examen final febrero, Curso 96/97)

---

60. Una varilla de masa m y longitud a se mueve por una esfera fija y lisa de centro O y radio a bajo la acción del campo gravitatorio simplificado, de manera que sus extremos están en todo momento sobre dicha esfera, sin ninguna otra restricción. Se pide:

1. Definir un conjunto de parámetros adecuados para describir la configuración del sistema.

2. Considerando un triedro móvil $Gxyz$ con origen en el centro de masas de la varilla y tal que Gy va dirigido según OG y Gz según la varilla, expresar la velocidad angular en

dichos ejes. En lo sucesivo se denominarán p, q, r las componentes de dicha velocidad angular.

3. Expresión del momento cinético en O, en función de p, q y r.

4. Ecuaciones diferenciales de Euler del movimiento de la varilla.

5. Expresión de las integrales primeras del movimiento en caso de que existan.

(Examen final febrero, Curso 01/02)