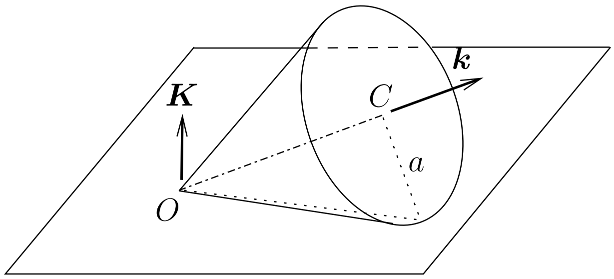
MECÁNICA

61. Se considera un cono de masa m, radio de la base a y semiángulo $\pi/6$ que permanece apoyado sobre un plano horizontal fijo y liso, de forma que puede pivotar y deslizar libremente, manteniéndose en contacto a través de una generatriz. En el instante inicial se impone al cono una rotación alrededor de su eje $(O, \boldsymbol{k})$ con velocidad ω_0. A su vez se imprime una velocidad de rotación al eje del cono alrededor de la vertical $\boldsymbol{K}$ de igual valor ω_0. Se pide:

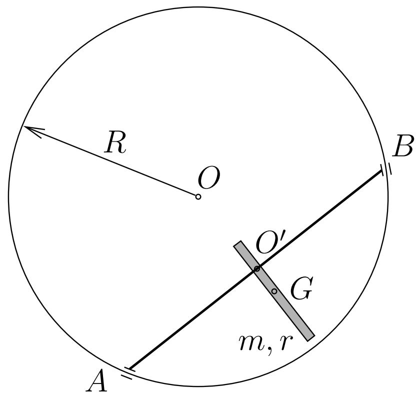


1. Estudiar las integrales primeras que existan obteniendo la expresión de las mismas.
2. Obtener la reacción del plano sobre el cono (se trata de una fuerza distribuida sobre la generatriz, equivalente a su resultante aplicada en un determinado punto de la misma, lo que habrá que calcular).
3. Obtener el valor de ω_0 que ocasionaría que el cono se levantase del plano por uno de los extremos de la generatriz de contacto. Interpretar cualitativamente el fenómeno mediante el efecto giroscópico, deduciendo cuál de los dos extremos se levantaría.

(Examen final, 24/01/2006)

⋆

62. Un disco pesado de masa m y radio r se encuentra unido perpendicularmente a una varilla AB en un punto O' que se encuentra a una distancia $d = |\boldsymbol{O'G}|$ de su centro G. El punto O' es el punto medio de la varilla AB, de longitud $R\sqrt{3}$ y masa despreciable, cuyos extremos pueden deslizar sin rozamiento sobre una circunferencia vertical fija de radio R. El disco puede girar libremente alrededor de la varilla AB, y se supone que en ningún momento la circunferencia fija entorpece el movimiento del disco.
Se pide:

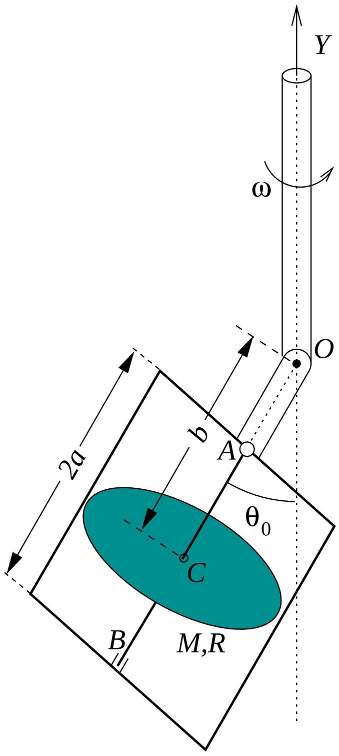


1. Obtener las expresiones de la velocidad de rotación del disco ($\boldsymbol{\Omega}$) y su momento cinético respecto del centro O de la circunferencia fija ($\boldsymbol{H}_O$);
2. Obtención de las expresiones correspondientes a posibles integrales primeras del sistema, realizando una discusión detallada sobre ellas con el formalismo de los principios de Newton-Euler para el caso particular de $r = d = R/2$.

(Examen parcial y final, 31/01/2001)

⋆

63. Un giróscopo está formado por un disco circular de masa M y radio R normal a un eje AB de masa despreciable, montado sobre un bastidor en A y B con articulaciones sin rozamiento que permiten el giro libre. El bastidor se halla articulado en un punto O alineado con AB a un árbol vertical OY. A este árbol vertical se le comunica una velocidad de rotación impuesta de valor constante ω, que transmite al bastidor a través de la articulación cilíndrica. (Es decir, esta articulación cilíndrica obliga al eje OAB a moverse dentro del plano vertical móvil que contiene al eje OY y es normal al bulón que materializa el eje de la articulación, permitiendo tan sólo el giro libre dentro de dicho plano vertical.) Las distancias $\overline{AB}$ y $\overline{CO}$ valen $2a$ y b respectivamente. En el instante inicial el eje AB forma un ángulo θ_0 con la vertical descendente y no posee movimiento vertical, mientras que el giróscopo tiene una componente de la velocidad de rotación alrededor de su eje $\omega_{z,0}$.

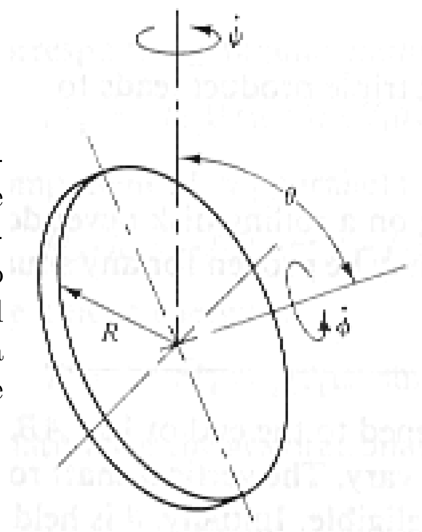


1. Demostrar que la componente de velocidad de rotación del giróscopo alrededor de su eje de revolución es constante.
2. Calcular las reacciones del bastidor sobre el giróscopo en los puntos A y B, expresándolas en función de los grados de libertad. Deberá considerarse que la articulación en B del giróscopo no restringe el movimiento en dirección axial (AB).

(Examen Febrero, 20/01/2004)

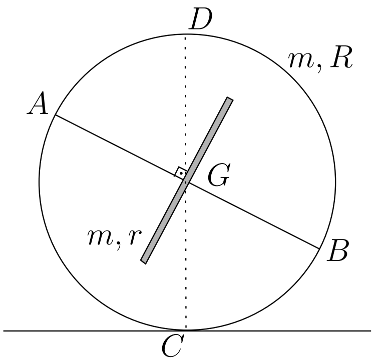
⋆

64. Una moneda de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una mesa horizontal fija. Para describir su movimiento se emplearán como coordenadas generalizadas las tres coordenadas cartesianas del centro del disco (x, y, z), el ángulo ψ girado alrededor de un eje vertical, el ángulo ϕ girado alrededor del eje de revolución, y el ángulo θ de máxima pendiente con la horizontal. Obtener las ecuaciones del movimiento mediante la aplicación de los principios de Newton-Euler.

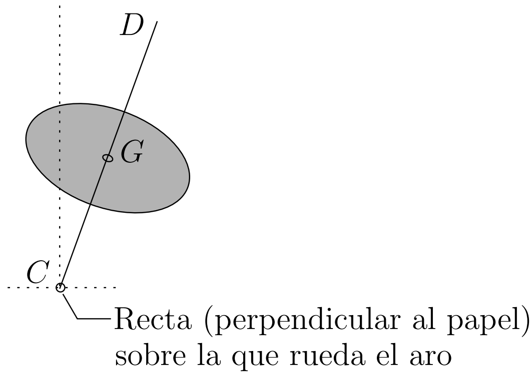


⋆

65. Un aro pesado de masa m y radio R rueda sin deslizar sobre una recta horizontal fija. Este movimiento se produce de forma que, aunque el aro se mantiene coplanario con la recta sobre la que rueda, puede girar libremente alrededor de esta.



Vista del plano del aro (fuera de la vertical en una posición genérica)



Vista lateral, según el canto del aro

El aro tiene una varilla, de masa despreciable, soldada según uno de sus diámetros AB. Esta varilla es el eje alrededor del cual puede girar libremente un disco pesado de masa m y radio $r < R$. Su centro G se encuentra en el punto medio del eje, y su plano siempre es perpendicular a dicho eje.

Se pide

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema completo, y seleccionar razonadamente un conjunto de parámetros que los representen adecuadamente;

2. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento del sistema;

3. Ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema;

4. Calcular el momento M que es necesario aplicar al aro para que su plano contenga en todo momento a la recta sobre la que rueda.

(Examen Parcial y Final, 30/01/1999)