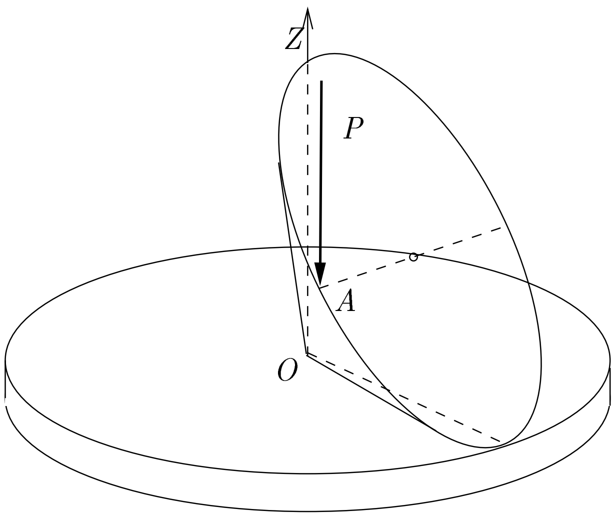
MECÁNICA



71. Se considera un cono de revolución sólido de semiángulo cónico α, masa m y radio de la base a, apoyado mediante una generatriz sobre una plataforma circular de masa M y radio R sobre la que puede rodar sin deslizar, estando el vértice del cono en el centro O de la plataforma. La plataforma se mantiene horizontal pudiendo girar libremente alrededor de su eje vertical OZ. En un instante determinado el cono y la plataforma se encuentran en reposo y se aplica una percusión vertical P en el punto A situado en el extremo de un diámetro horizontal de la base del cono. Se pide:

1. Obtener las ecuaciones que definen el campo de velocidades de ambos sólidos inmediatamente después de la percusión. Particularizar las ecuaciones obtenidas para $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $m = M$, y $R = a\sqrt{2}$.

1. Obtener el campo de velocidades de los dos sólidos después de la percusión para este caso.

2. Obtener las reacciones impulsivas que se producen en el punto O de la plataforma (fuerzas y momentos).

NOTA: Los momentos principales de inercia de un cono de altura h y radio a de la base respecto de su vértice son $A = \dfrac{3}{20}m(a^2 + 4h^2)$ y $C = \dfrac{3}{10}ma^2$
(Examen final, 16/09/1997)

⋆

72. Un disco circular homogéneo de masa m, radio R y espesor despreciable se puede mover libremente articulado en su centro O a un punto fijo del espacio mediante una rótula esférica en la que se supondrá que no existe rozamiento.

No actúa sobre él ninguna fuerza aplicada, excepto su propio peso. Se sabe que en el instante inicial del movimiento, la dirección del momento cinético respecto de O es la vertical y el sentido ascendente y también que la energía cinética vale

$$T_0 = \frac{7}{52} m R^2 \omega_0^2$$

siendo ω_0 el módulo de la rotación instantánea inicial del disco. En un instante cualquiera del movimiento se aplica, sobre el punto más alto del disco, una persución vertical descendente de magnitud

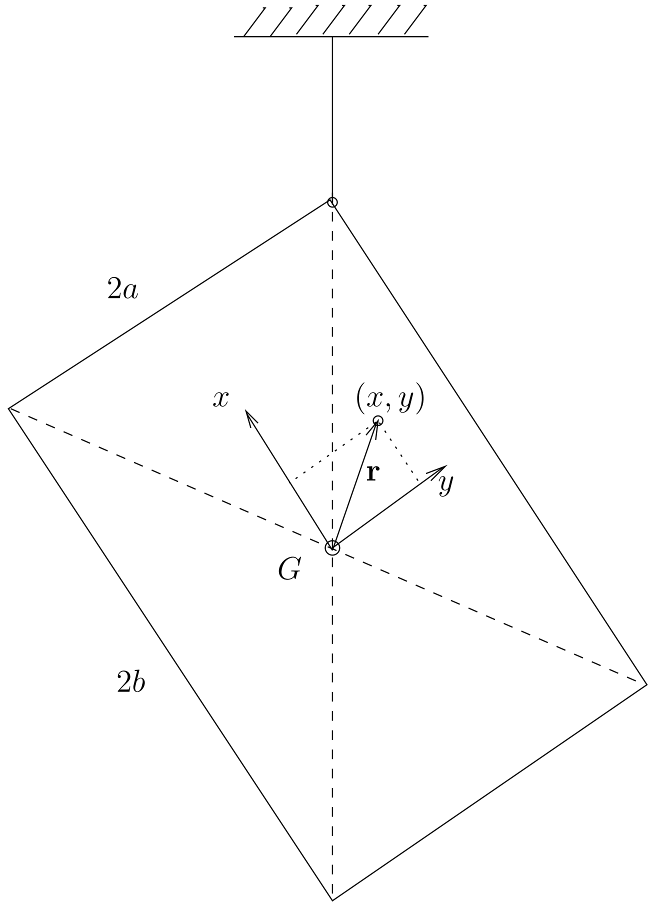
$$P = \frac{2mR\omega_0}{\sqrt{13}}$$

Determinar:

1. Incremento instantáneo producido en la energía cinética.

2. Módulo del vector rotación instantánea inmediatamente después de la aplicación de la percusión.

3. Ángulo formado por los momentos cinéticos, respecto de O, de antes y de después de la percusión.



73. Una placa rectangular, de masa M y lados $2a$ y $2b$ está en reposo suspendida por una esquina mediante un hilo de masa despreciable. Recibe en un punto de su superficie el impacto de una masa puntual m, con velocidad v normal a la placa, siendo $m < M$. El coeficiente de restitución es igual a e. Se pide:

- Determinar el valor de la percusión P sobre la placa, así como el movimiento de la placa y de la partícula m después del choque, cuando el impacto se produce en una posición genérica (x, y) (ver figura).

  SUGERENCIAS: considerar que el vector $\boldsymbol{\Omega}$, velocidad angular de la placa después del choque, debe estar contenido en el plano de la misma; para evitar expresiones demasiado largas emplear como variable auxiliar $u = \frac{1}{M} + \frac{x^2}{B} + \frac{y^2}{A}$, siendo A y B los momentos principales de inercia;

- Calcular la energía cinética de la placa (T_M) y de la partícula (T_m) después del choque. Obtener la fracción de energía del conjunto (placa más partícula) perdida en relación con la energía inicial.

  SUGERENCIAS: Calcular la diferencia de energía cinética directamente y comprobar este resultado con la fórmula general $\Delta T = \frac{1}{2}\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{w}(1 - e)$.

- Hallar el lugar geométrico de los puntos de impacto en los que la energía cinética adquirida por la placa (T_M) es máxima. Demostrar que para un impacto en el centro de la placa T_M es un mínimo.

  SUGERENCIAS: empleando la variable auxiliar u antes definida, derivar ($dT_M/du = 0$) para obtener el máximo. En el centro de la placa también se produce un extremo, pero éste no puede ser estudiado mediante el cambio de variable a u, que no es regular en este punto, debiendo estudiarse mediante el Jacobiano y Hessiano directamente.

---

74. Una placa rectangular homogénea de masa M y lados $2a$ y $4a$ cae con velocidad v y sin rotación, impactando con uno de sus vértices sobre un plano horizontal liso. En el instante del choque la orientación de la placa es tal que una de sus diagonales está horizontal y la otra forma un ángulo de 45° con el plano horizontal. El coeficiente de restitución vale e.

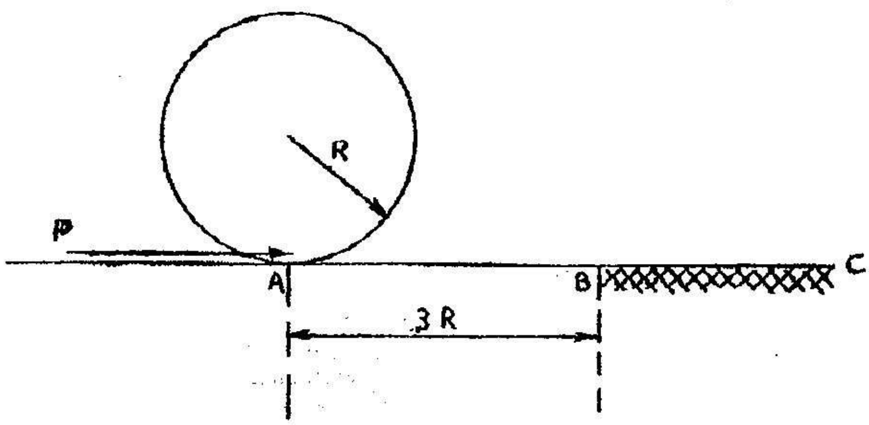
Se pide definir el movimiento de la placa después del choque, y expresar la energía perdida en el impacto.

⋆

75. Un disco circular homogéneo, de masa m y radio R, se mueve en un plano vertical manteniéndose en contacto con una recta horizontal cuyo tramo AB es perfectamente liso, mientras que el tramo BC es perfectamente rugoso. En el instante inicial, en el que el disco se encuentra en reposo y el pundo de contacto coincide con A, se aplica al punto más bajo del disco una percusión horizontal P.

Se pide:

1. Determinar el movimiento del disco un instante después de aplicar la percusión.
2. Determinar el tiempo que tarda el disco en entrar en contacto con la zona rugosa.
3. Determinar el movimiento del disco un instante después de entrar en contacto con la zona rugosa.
4. Calcular percusión que se ejerce sobre el disco en el momento de entrar en contacto con la zona rugosa.



⋆