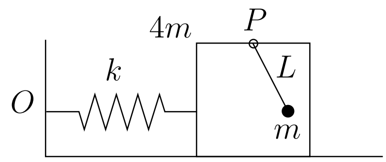
# MECÁNICA

**76.** Un péndulo simple, constituido por una masa $m$ que cuelga de un hilo sin masa de longitud $L$, está suspendido de un punto $P$ de una caja hueca de masa $4m$. La caja, a su vez, está unida a un punto fijo $O$ a través de un resorte de constante $k$, y se mueve en todo momento sobre una recta horizontal fija y lisa.




Se pide:

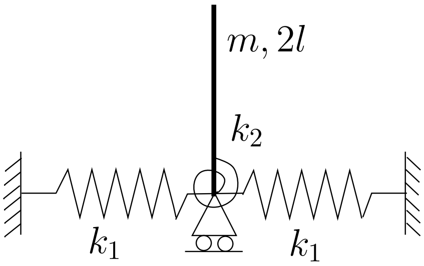
1. Obtener las matrices de masa y rigidez, correspondientes a los pequeños movimientos alrededor de la posición de equilibrio estable, directamente a partir de las expresiones de la energía cinética $T$ y el potencial de las fuerzas activas $V$ en una posición genérica;
2. Obtener las mismas matrices linealizando las correspondientes ecuaciones de Lagrange para pequeñas oscilaciones;
3. Obtener las frecuencias propias de oscilación y las coordenadas normales para el caso $k/m = 6g/L$.

*(Problema puntuable, 30/04/2003)*

---

**77.** Una barra homogénea de masa $m$ y longitud $2l$ se mueve en todo momento en un plano vertical de forma que su extremo inferior articulado se mueve según una recta horizontal, y se encuentra sujeto a dos puntos fijos mediante dos resortes iguales de constante elástica $k_1 = \frac{3mg}{5l}$ cada uno. Además, existe un muelle de torsión de constante $k_2 = \frac{3mgl}{2}$ tal que ejerce momento nulo sobre la barra cuando ésta se encuentra en posición vertical (posición de equilibrio estable), tal y como muestra la figura adjunta. Se pide:

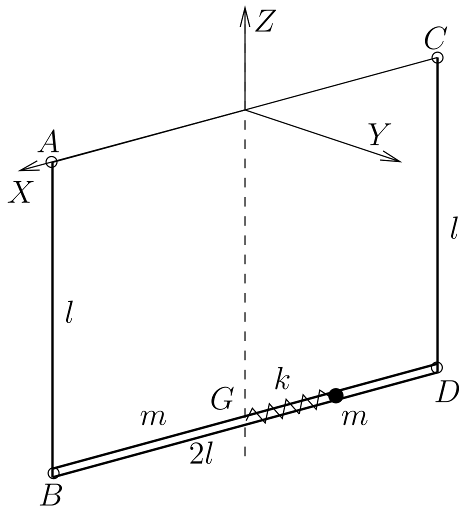
1. Expresión de la lagrangiana;
2. Ecuaciones diferenciales del movimiento;
3. Ecuaciones diferenciales linealizadas para pequeños desplazamientos alrededor de la posición de equilibrio estable;
4. Frecuencias propias;
5. Modos propios de vibración;
6. Coordenadas normales en función de las coordenadas geométricas;
7. Resolución de las ecuaciones linealizadas suponiendo que el sistema parte del reposo con una inclinación de la barra de 30° respecto de la vertical, y el extremo inferior en la posición de equilibrio determinada por los muelles horizontales;




*(Problema puntuable, 28/04/1998)*

---

**78.** Un tubo $BD$ de masa $m$, longitud $2l$ y sección despreciable, tiene sus extremos articulados a dos varillas $AB$ y $CD$ de masa despreciable y longitud $l$. Los extremos $A$ y $C$ de las varillas están articulados y fijos en la misma horizontal. El centro $G$ del tubo está obligado a moverse según la vertical.
Por el interior del tubo se mueve sin rozamiento una masa puntual $m$ unida a un muelle de constante $k$ y longitud natural nula, que tiene el otro extremo anclado en $G$. Se pide:




1. Expresar la velocidad de $G$ en función del ángulo girado por el tubo alrededor del eje $Z$ vertical.

2. Expresión de la energía cinética del sistema.

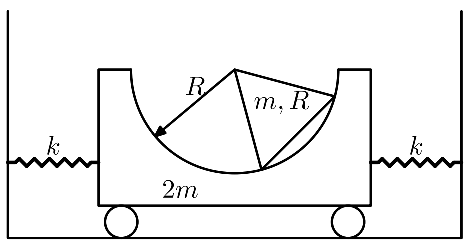
3. Ecuaciones diferenciales del movimiento.

4. Linealizar las ecuaciones obtenidas en el apartado 3 para el caso de pequeñas oscilaciones.

5. Obtener las frecuencias propias del sistema.

⋆

**79.** Un carretón de masa $2m$ se desplaza sobre una recta horizontal lisa, estando unido por dos muelles de constante $k$ a sendos puntos fijos. El carretón tiene un alojamiento semicircular de radio $R$ sobre el que se apoya con ligadura bilateral lisa, una placa triangular equilátera de lado $R$ y masa $m$. Suponiendo que en todo momento un lado del triángulo se apoya en el alojamiento del carretón, se pide:




1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.

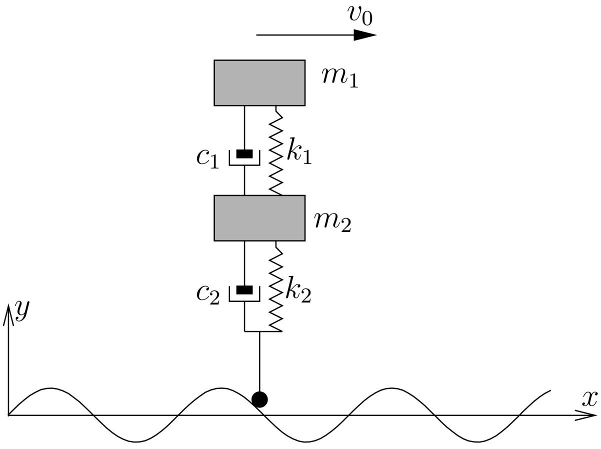
2. Linealización de dichas ecuaciones para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.

3. Particularizando para $R = 1$ y $k = mg/R$, obtener las frecuencias propias y los modos de oscilación.

*(Examen Parcial, Curso 99/00)*

⋆

**80.** Para analizar el comportamiento dinámico de un vehículo se hace un modelo como el de la figura formado por dos masas suspendidas $m_1$ y $m_2$ que pueden oscilar únicamente en dirección vertical. Las suspensiones primaria y secundaria del vehículo se representan mediante amortiguadores y muelles lineales de constantes $c_2, k_2$ y $c_1, k_1$, respectivamente (ver figura). El vehículo recorre con velocidad horizontal constante $v_0$ una carretera representada por la senoide $y = A\,\mathrm{sen}(x/\lambda)$. Se pide:




1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.

2. Para los valores numéricos $m_1 = 8000$ kg, $m_2 = 2000$ kg, $k_1 = 2 \cdot 10^6$ N/m, $k_2 = 5 \cdot 10^6$ N/m, obtener:

   *a*) Frecuencias propias y modos de oscilación del vehículo.

   *b*) Suponiendo que las constantes de amortiguación son pequeñas ($c_1 = c_2 \approx 0$) pero suficientes para que se alcance un movimiento de régimen permanente al cabo del tiempo, obtener dicho movimiento cuando $v_0/\lambda$ es el 90 % de la menor frecuencia propia del vehículo.

*(Examen Parcial y Final, 30/01/1999)*