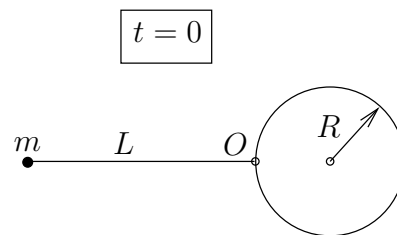


6. Una partícula pesada de masa  $m$  se encuentra unida al punto  $O$  de una circunferencia fija de radio  $R$  mediante un hilo flexible e inextensible de longitud  $L > \pi R$  y masa despreciable. La circunferencia se encuentra contenida en un plano vertical fijo, y el punto  $O$  se encuentra sobre un diámetro horizontal de la misma. En el instante inicial la partícula parte del reposo, con el hilo horizontal y tenso, en el mismo plano de la circunferencia. Al caer la partícula, en una primera fase el hilo evoluciona libremente hasta alcanzar la vertical. A partir de este momento continúa su movimiento enrollándose sobre la circunferencia. Se pide:



1. Expresión de los vectores posición, velocidad y aceleración de la partícula en una posición genérica, en función del o de los grados de libertad y de sus derivadas;
2. Ecuación o ecuaciones diferenciales del movimiento en cada una de sus fases;
3. Expresión de la tensión del hilo en cada instante;
4. Demostrar que el hilo se destensará necesariamente en algún instante después de haberse enrollado un cuarto de la circunferencia.

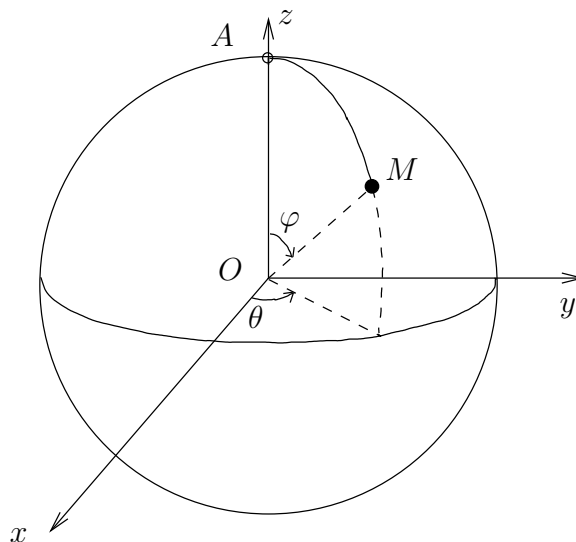
(Ejercicio similar a ej. 5, Examen 10/09/2001)

★

7. Un punto material  $M$  de masa  $m$ , pesado, se mueve sin rozamiento sobre una esfera de centro  $O$  y radio  $R$  con ligadura bilateral. El punto  $M$  está unido mediante una goma elástica de longitud natural cero y constante de rigidez  $k$  al punto  $A$  de la esfera ( $OA$  es la vertical ascendente). La goma se apoya en todo momento sobre la cara exterior de la esfera.

Se pide:

1. Determinar la función potencial de la que derivan las fuerzas directamente aplicadas al punto.
2. Determinar las integrales primeras de donde se deduce el movimiento del punto para unas condiciones iniciales arbitrarias.
3. Determinar qué condición debe verificar  $k$  y qué condiciones iniciales se necesitan para que el punto describa el paralelo correspondiente a  $\varphi = 60^\circ$ .
4. En el caso particular en el que  $k = mg/R$  y las condiciones iniciales sean  $\varphi = 60^\circ$  y el punto se lance con una velocidad inicial  $v_0$  tangente al paralelo correspondiente, se pide:



- a) Justificar razonadamente si el punto inmediatamente después del instante inicial subirá o bajará.
- b) Calcular la reacción normal de la esfera en el instante inicial.

(Problema Puntuable, Curso 99/00)

★

8. Se considera en un plano vertical  $OXY$  ( $OX$  horizontal y  $OY$  vertical ascendente) la curva representada en la figura, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned}x &= a \cos^3 u \\ y &= a \operatorname{sen}^3 u\end{aligned}$$

donde  $a$  es una constante positiva conocida y  $u$  es el parámetro que puede tomar cualquier valor del intervalo  $0 < u < 180^\circ$ .

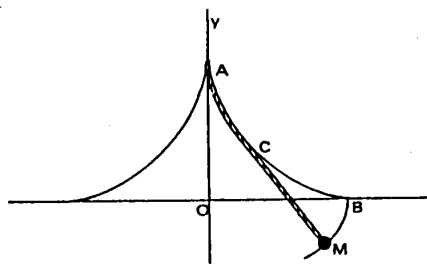
Del punto  $A$  cuelga un hilo  $AM$  de masa despreciable y longitud  $3a/2$  en cuyo extremo  $M$  se sitúa una partícula material pesada de masa  $m$ .

En el instante inicial la partícula  $M$  se sitúa en  $B$ , de forma que el hilo  $AM$  se encuentra enrollado sobre la rama  $AB$  de la curva, y se abandona el conjunto sin comunicarle velocidad inicial.

Como consecuencia de la fuerza de gravedad, el hilo se irá desenrollando de manera que en un instante arbitrario estará en la posición  $ACM$  representada en la figura. La posición de la partícula  $M$  quedará determinada por el valor del parámetro  $u$  correspondiente al punto  $C$ .

Se pide:

- Plantear la ecuación diferencial del movimiento correspondiente al punto  $M$  en función del parámetro  $u$ .
- Calcular, en función de  $u$ , la tensión del hilo.



★

9. Una partícula pesada de masa  $m$  se mueve con ligadura bilateral sobre el cono:

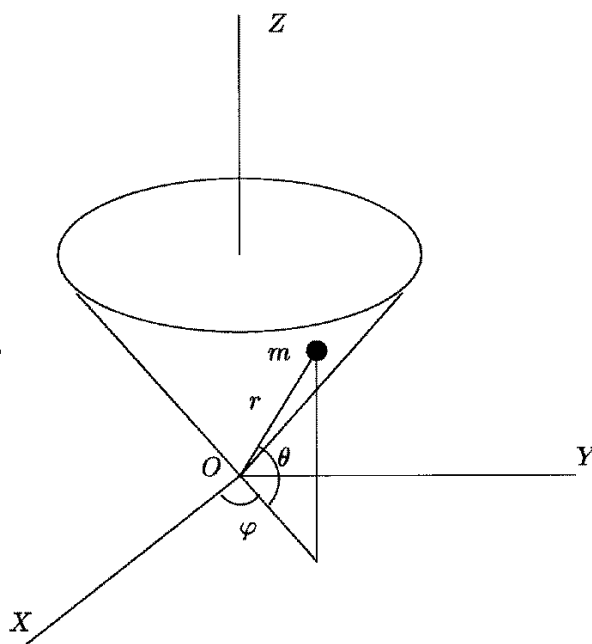
$$x^2 + y^2 = z^2$$

siendo  $z > 0$ . En el instante inicial la partícula se encuentra en  $z = z_0$  con velocidad horizontal  $v_0 = \omega_0 z_0$ .

Empleando coordenadas esféricas, se pide:

- Calcular el momento respecto de  $O$  de las fuerzas aplicadas sobre la partícula en un instante genérico, y su proyección sobre el eje  $OZ$ .
- Calcular el momento cinético de la partícula respecto de  $O$  en un instante genérico, y su proyección sobre el eje  $OZ$ .

3. Expresión de la energía total de la partícula, en un instante genérico.
4. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
5. Determinar entre que valores de  $z$  se desarrolla el movimiento.
6. Calcular el valor necesario de  $\omega_0$  para que la trayectoria de la partícula sea una circunferencia.



(Problema puntuable, curso 97/98)

---

★

10. Una partícula pesada de masa  $m$  se mueve con enlace bilateral liso por la superficie

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

referida a un sistema ortogonal  $Oxyz$  en el que  $Oz$  es la vertical ascendente.

Además del peso, el punto es atraído por el origen de coordenadas con una fuerza proporcional a la distancia, cuya expresión es

$$\mathbf{F} = -K^2 m \mathbf{r}$$

Inicialmente, el punto se encuentra en el origen de coordenadas  $O$  y su velocidad es  $\mathbf{v} = 2Ka \mathbf{i}$

Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Ecuaciones horarias del movimiento de la partícula.
3. Reacción de la superficie en un instante genérico.

---

★