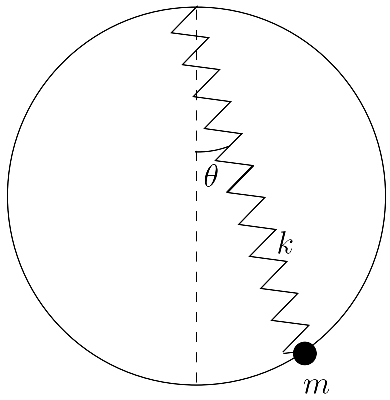
MECÁNICA

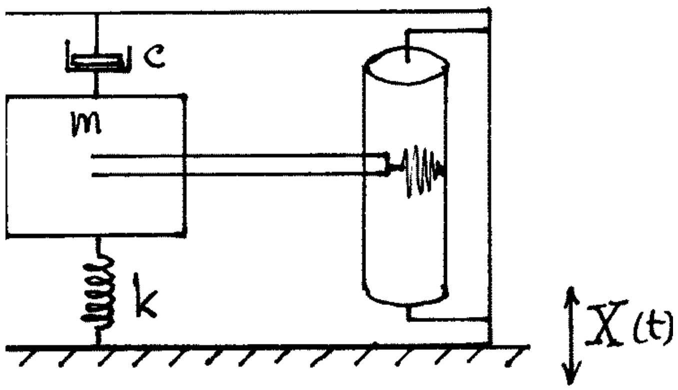
11. Una masa puntual m desliza con enlace bilateral sobre una circunferencia lisa de radio R situada en un plano vertical fijo. La partícula está unida al punto más alto de la circunferencia mediante un resorte de constante k y longitud natural l_0. Se pide:



1. Ecuación diferencial del movimiento.
2. Linealizar la ecuación obtenida en el apartado anterior suponiendo pequeñas oscilaciones en torno a la posición en que la partícula está en el punto más bajo.
3. Discutir la naturaleza del movimiento en función de los valores de de k, m, l_0 y R
4. Ecuación horaria del movimiento para los valores $l_0 = a$, $R = l/2$, $k = mg/b$ y $l = a + b$.

---

12. El aparato cuyo esquema se representa en la figura es un sismógrafo.



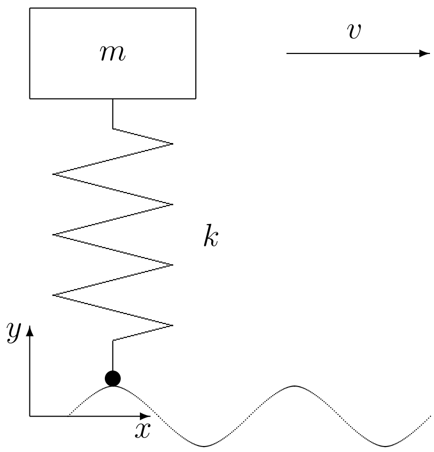
Se pide:

a. Escribir la ecuación diferencial que permite calcular el desplazamiento relativo x, cuando la caja está animada de un movimiento vertical armónico $X(t) = R \operatorname{sen} \Omega t$.

b. Integrar esta ecuación diferencial. Demostrar que las oscilaciones libres se amortiguan rápidamente. Tomando sólo en cuenta las oscilaciones forzadas debidas al movimiento de pulsación Ω, calcular la relación r/R en función de Ω/ω_0. Se denomina r a la amplitud del movimiento relativo $x(t)$, R a la amplitud del movimiento forzado $X(t)$ y ω_0 a la pulsación del movimiento libre no amortiguado.

c. Demostrar que la medida de la amplitud r del movimiento relativo permite determinar: o bien la amplitud R del movimiento forzado, si Ω es muy grande con relación a ω_0; o bien la aceleración máxima $\Omega^2 R$ del movimiento forzado, si Ω es muy pequeño en relación a ω_0.

13. Un vehículo de masa m posee una suspensión que se puede representar mediante un resorte elástico de constante k y amortiguamiento despreciable, interpuesto entre la masa del vehículo y las ruedas (consideradas de masa despreciable), tal como se muestra en la figura adjunta. Se pide:



1. El vehículo viaja con velocidad constante v sobre un pavimento irregular, pudiendo representarse la superficie del mismo como ondulaciones de la superficie según la coordenada x en dirección de la marcha

$$y = a \operatorname{sen} \lambda x$$

   siendo y la coordenada vertical. Calcular la amplitud del movimiento y la aceleración máxima experimentada por el vehículo en el régimen permanente (admitiendo que se alcanza el mismo gracias a un pequeño amortiguamiento inevitable), así como el cociente entre dicha aceleración y la que se produciría en caso de no haber suspensión de ningún tipo.

2. El vehículo viaja con velocidad constante v sobre un pavimento regular y horizontal en el que existe un pequeño escalón transversal de altura h y longitud L. Estudiar el movimiento vertical del vehículo (en el régimen transitorio), calculando el periodo propio y la amplitud de las oscilaciones. Se supondrá que:

   - La rueda pasa instantáneamente del pavimento al escalón y viceversa.
   - No existen efectos relativos a percusiones.
   - Se desprecia el desplazamiento vertical que pueda sufrir la carrocería del vehículo al subir el escalón.

⋆

14. El comportamiento dinámico de una estructura de antena de televisión puede estudiarse en primera aproximación como un sistema de 1 gdl de masa M y rigidez k frente a desplazamientos horizontales x. Se pretende estudiar la respuesta dinámica frente a una explosión. La carga asociada a la misma se caracteriza mediante una función lineal del tiempo de valor P_0 en el instante inicial y valor nulo en el instante t_1.

Se pide:

1. Desplazamiento horizontal de la torre a lo largo del tiempo en función de P_0 y t_1/T, siendo $T = 2\pi/\omega_0$ el período propio de la estructura.

2. Estudiar en qué instante tiene lugar el desplazamiento máximo (x_{max}) de la estructura.

3. Valor máximo del esfuerzo cortante desarrollado por la estructura ($F_{max} = kx_{max}$) para dos casos distintos, $t_1 = 0{,}05\,\text{s}$ y $t_1 = 0{,}005\,\text{s}$, siendo $M = 600\,000\,\text{kg}$, $k = 4 \cdot 10^6$ kN/m y $P_0 = 10^4$ kN.

⋆

15. En un estanque hay una boya que se puede representar como un cilindro de masa m y radio R. Cuando el agua del estanque, cuya densidad es ρ, está en reposo, la boya está en equilibrio estable con el eje de revolución vertical. Se generan olas en el estanque de tal manera que la sobreelevación de la superficie libre respecto de la posición en reposo es:

$$d = d_0 \operatorname{sen} \omega t$$

Se supone que el radio del cilindro es mucho menor que la longitud de la ola. Se pide:

1. Ecuación diferencial del movimiento de la boya.
2. Frecuencia propia y ecuaciones horarias del movimiento de la boya, suponiendo que en el instante inicial está en reposo.
3. Suponiendo que existe un pequeño amortiguamiento inevitable, obtener la amplitud de régimen permanente del movimiento de la boya en el caso particular en que $m = 10\,\text{kg}$, $\rho = 1025\,\text{kg/m}^3$, $R = 0{,}1\,\text{m}$ y $d = 0{,}1 \operatorname{sen} 2t$ (en metros).

(Ejercicio 15, Curso 97/98)