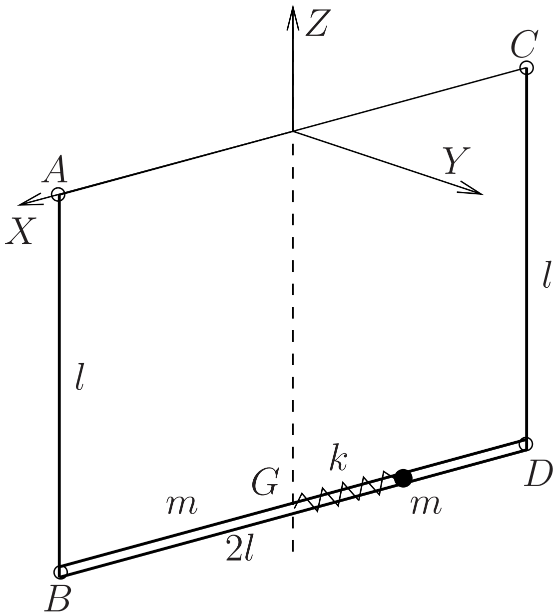
# MECÁNICA

**65.** Un tubo $BD$ de masa $m$, longitud $2l$ y sección despreciable, tiene sus extremos articulados a dos varillas $AB$ y $CD$ de masa despreciable y longitud $l$. Los extremos $A$ y $C$ de las varillas están articulados y fijos en la misma horizontal. El centro $G$ del tubo está obligado a moverse según la vertical.



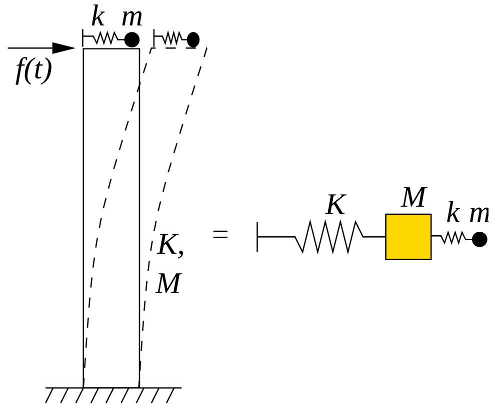

Por el interior del tubo se mueve sin rozamiento una masa puntual $m$ unida a un muelle de constante $k$ y longitud natural nula, que tiene el otro extremo anclado en $G$. Se pide:

1. Expresar la velocidad de $G$ en función del ángulo girado por el tubo alrededor del eje $Z$ vertical.
2. Expresión de la energía cinética del sistema.
3. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
4. Linealizar las ecuaciones obtenidas en el apartado 3 para el caso de pequeñas oscilaciones.
5. Obtener las frecuencias propias del sistema.

*(Examen Final, curso 96/97)*

⋆

**66.** Una torre de gran altura manifiesta cierta flexibilidad frente a las acciones del viento, pudiendo considerarse equivalente a una masa puntual $M$ con un resorte horizontal de rigidez $K$. Para reducir las oscilaciones se instala en el nivel superior de la torre un oscilador armónico horizontal de masa $m = \epsilon M$ y rigidez $k = \epsilon K$. Se pide:

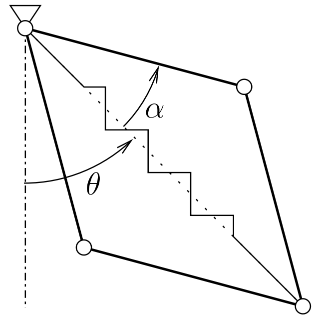



1. Ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema, suponiendo pequeñas oscilaciones, así como las matrices de masa y rigidez.
2. Frecuencias propias del sistema, dejándolas expresadas en función de $\omega_0^2 = K/M = k/m$, tomando el valor $\epsilon = 1/10$.
3. Modos normales de vibración así como la expresión que relaciona las coordenadas normales con las coordenadas geométricas inicialmente consideradas.
4. La acción del viento se puede suponer como una fuerza horizontal armónica $f(t) = b \operatorname{sen} \Omega t$. Obtener la solución para las amplitudes modales (coordenadas normales) en el régimen permanente (suponiendo un pequeño amortiguamiento inevitable). Particularizar para el caso concreto $\Omega = \omega_0$ y discutir la diferencia entre la respuesta de la torre con y sin el oscilador armónico instalado.

*(Examen parcial, curso 2002-03)*

⋆

**67.** El dispositivo de la figura adjunta está formado por cuatro barras pesadas articuladas entre sí, de longitud $a$ y masa $m$ cada una, de forma que están contenidas en un mismo plano vertical. El conjunto se halla sujeto por uno de sus vértices a un punto fijo. Asimismo, en la diagonal entre este vértice de anclaje y el opuesto se sitúa un resorte lineal de longitud natural $l_0 = a/2$ y constante $k$. El valor de $k = 4mg/a$ es tal que el sistema está en equilibrio estable con el eje del resorte vertical y $\alpha = 60°$. Se pide:




1. Desarrollar la expresión de la energía cinética del sistema, demostrando que vale $T = \frac{5}{3}ma^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\alpha}^2) + ma^2(\dot{\theta}^2 - \dot{\alpha}^2)\cos 2\alpha$
2. Obtener las ecuaciones diferenciales de la dinámica.
3. Suponiendo que el movimiento consiste en pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equlibrio estable, linealizar las ecuaciones del movimiento.
4. Calcular los modos normales de vibración y las frecuencias propias.

⋆

**68.** Se monta un cilindro uniforme de radio $a$ y densidad $\rho$ de manera que puede girar libremente alrededor de un eje vertical. Sobre su superficie lateral está fija rígidamente una pista helicoidal de paso $p$ a lo largo de la cual puede deslizar sin rozamiento un punto material de masa $m$. Supongamos que una partícula parte del reposo en la parte superior del cilindro y desliza bajo la influencia de la gravedad. Deducir la Hamiltoniana del sistema y estudiar el movimiento del mismo.

⋆