Práctica nº 12 curso 2011-2012

MECÁNICA

45. Un sólido con un punto fijo O tiene un tensor de inercia conocido. Se conocen los valores iniciales de la energía cinética y del módulo del momento cinético. Se le aplica un momento M_o, que se mantiene constantemente ortogonal a la velocidad angular y al momento cinético. Demostrar:

1. Que se mantiene constante la energía cinética.
2. Que se mantiene constante el modulo del momento cinético.
3. Que cualquiera que sea el momento, se cumple siempre que $H^2\Omega^2 > 4T^2$

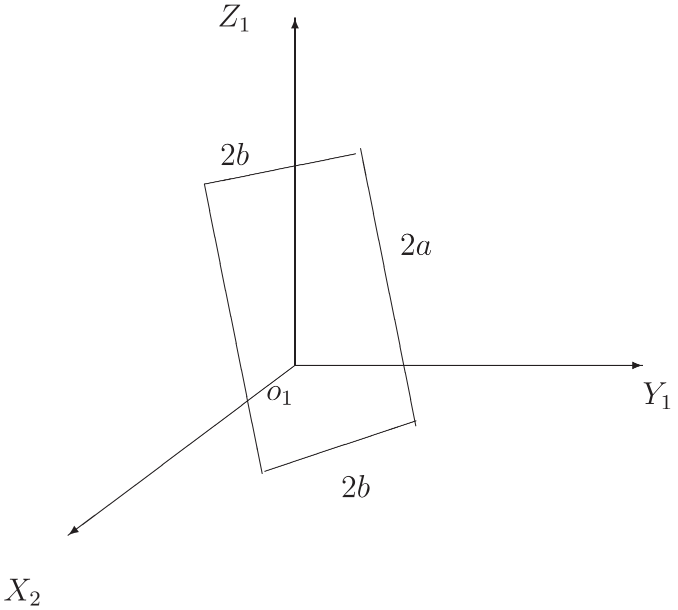
⋆

46. Una placa rectangular plana, homogénea y pesada, de masa M, tiene por longitud $2a$ y anchura $2b$ ($a > b$). Dicha placa puede moverse de forma que el punto medio de uno de sus dos lados de longitud $2b$ está obligado a desplazarse sin rozamiento según un eje vertical fijo $O_1\ Z$, mientras el lado opuesto desliza sin rozamiento sobre un plano horizontal también fijo $O_1\ X_1\ Y_1$.

En el instante inicial la placa está inclinada 60° respecto al plano $O_1\ X_1\ Y_1$ y se encuentra sometida a una rotación instantánea con velocidad angular ω_0 dirigida según la vertical ascendente $O_1\ Z_1$.

Se pide:

1. Plantear, según el formulismo lagrangiano, las ecuaciones del movimiento de la placa.
2. Calcular la velocidad del centro de masas de la placa en el instante en que esta llega al plano horizontal. Expresar las componentes de dicha velocidad en un sistema de referencia solidario a la placa.



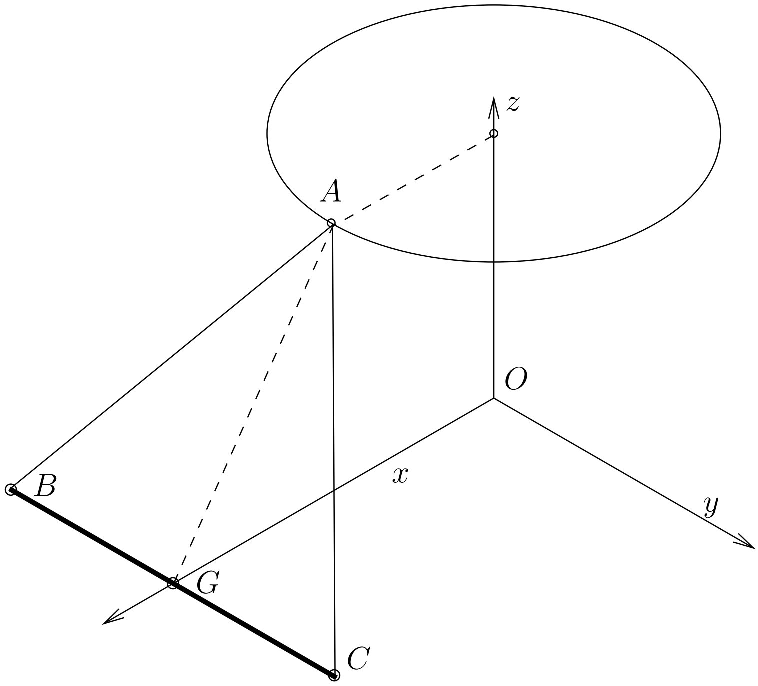
⋆

47. Una placa triangular ABC, homogénea de lado $2a$ y masa m, se mueve de forma que A describe una circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$z = \sqrt{2}a$$

El lado BC está siempre apoyado sobre el plano horizontal Oxy y todos los vinculos son lisos. En el movimiento más general posible, se pide:



(posición inicial)

1. Describir el movimiento eligiendo unos parámetros adecuados para caracterizarlo y obtener las ecuaciones diferenciales de la dinámica, aplicando los teoremas generales (Newton-Euler) o las ecuaciones de Lagrange. Las condiciones iniciales son $\boldsymbol{v}_A = v_0\,\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{0}$, y la altura del triángulo contenida en el plano Oxz.

2. Calcular la reacción de la circunferencia sobre el vértice A del triángulo, en función de los parámetros y sus derivadas.

---

48. Sea un sólido rígido $\mathcal{B}$ con un punto fijo O y un triedro cartesiano $Oxyz$ fijo. Se producen dos rotaciones consecutivas de $\mathcal{B}$, la primera un ángulo α alrededor del eje Oz, y la segunda un ángulo β alrededor del nuevo eje Ox' (resultado del primer giro sobre el eje Ox). Se pide:

1. Siendo $\alpha = \pi/2$ y $\beta = \pi/2$ calcular el eje ($\boldsymbol{p}$) alrededor del cual se puede considerar que ha girado el sólido desde la configuración inicial a la final y la magnitud angular (ϕ) de dicho giro (vector de rotación del teorema de Euler).

2. Justificar por qué, si la definición de las rotaciones consecutivas se hace de forma relativa (respecto de los nuevos ejes en cada caso) la composición de las matrices de rotación se hace por la derecha
$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}_1] \cdot [\mathbf{R}_2] \cdot \ldots [\mathbf{R}_n],$$
mientras que si la definición de las rotaciones consecutivas se hace respecto de los ejes absolutos (fijos) la composición se hace por la izquierda:
$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}_n] \cdot [\mathbf{R}_{n-1}] \cdot \ldots [\mathbf{R}_1].$$

3. Se define ahora el movimiento del sólido como una primera rotación $\alpha = \pi/2$ alrededor de Oz, seguida de $\beta = \pi/2$ alrededor del eje Oy (es decir, del eje absoluto inicial, no del transformado Oy'). Obtener la matriz de componentes de la rotación conjunta, verificando que es la misma que se obtuvo antes.
