ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

Mecánica

EXAMEN FINAL (20 de Junio de 1994)

Ejercicio 5.º (final y 1er. parcial) Tiempo: 50 min.

Un semiaro de masa M o y radio R rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose dentro de un plano vertical. Sobre el semiaro desliza una partícula de masa m con ligadura bilateral lisa. Se pide:

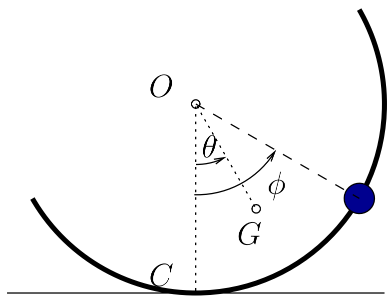
a. Ecuaciones del movimiento;

b. Integrales primeras, caso de haberlas.

Se toman como parámetros θ (giro del semiaro) y ϕ (ángulo con la vertical que define la posición de m relativa al aro).

La distancia OG se obtiene por el th. de Guldin:

$$2\pi\, OG \cdot \pi R = 4\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad OG = 2R/\pi.$$



La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} I_C \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m v^2,$$

siendo I_C el momento de inercia respecto del centro de rotación instantáneo, C, y v la velocidad absoluta de la masa m. Otenemos I_C aplicando el th. de Steiner:

$$I_G = I_O - M(OG)^2 = MR^2 - M\frac{4R^2}{\pi^2}$$

$$I_C = I_G + M(GC)^2 = I_G + MR^2\left(1 + \frac{4}{\pi^2} - \frac{4}{\pi}\cos\theta\right) = 2MR^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta\right).$$

Por otra parte, la velocidad v se obtiene sumando (vectorialmente) el arrastre del semiaro y el movimiento relativo,

$$v^2 = R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\phi}^2 - 2R^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi$$

La lagrangiana $L = T - V$ es por tanto

$$L = MR^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 - 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi) + Mg\frac{2R}{\pi}\cos\theta + mgR\cos\phi.$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \left[2MR^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta\right) + mR^2\right]\ddot{\theta} - mR^2\ddot{\phi}\cos\phi + mR^2\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\phi \\ & + \frac{2}{\pi}MR^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + Mg\frac{2R}{\pi}\operatorname{sen}\theta \\ 0 = {} & -mR^2\ddot{\theta}\cos\phi + mR^2\ddot{\phi} + mgR\operatorname{sen}\phi \end{aligned}$$

Al ser todas las fuerzas conservativas, la energía total $E = T + V$ se conserva, existiendo pues esta integral primera:

$$E = MR^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 - 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi) - Mg\frac{2R}{\pi}\cos\theta - mgR\cos\phi.$$