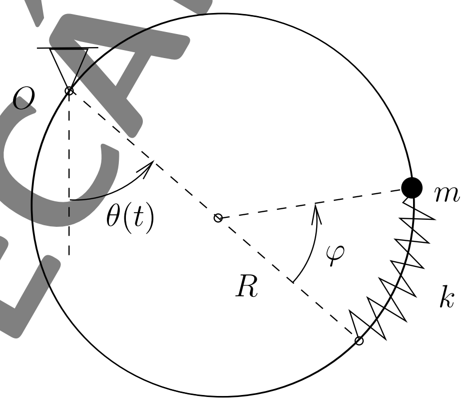
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO C (4 de noviembre de 2005)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Un aro de radio R, sin masa, se mueve en todo momento en un plano horizontal con un punto de su periferia O fijo de acuerdo con un movimiento impuesto $\theta(t) = \theta_0 \operatorname{sen} \Omega t$. Ensartada en el aro se mueve una partícula de masa m. Por otra parte, la partícula está unida a uno de los extremos de un muelle de constante k y longitud natural nula cuyo otro extremo se encuentra unido al punto diametralmente opuesto a O. Admitiendo que el enlace es liso. Se pide:



1. Aceleración de la partícula.
2. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento.
3. Justificar razonadamente la existencia o no de integrales primeras del movimiento.
4. Calcular el momento M, que es necesario aplicar en O, para imponer el citado movimiento en función de φ y sus derivadas.

---

1. La posición de la partícula se puede expresar en coordenadas polares del siguiente modo:

$$\alpha = \theta + \varphi/2; \qquad \rho = 2R\cos(\varphi/2)$$

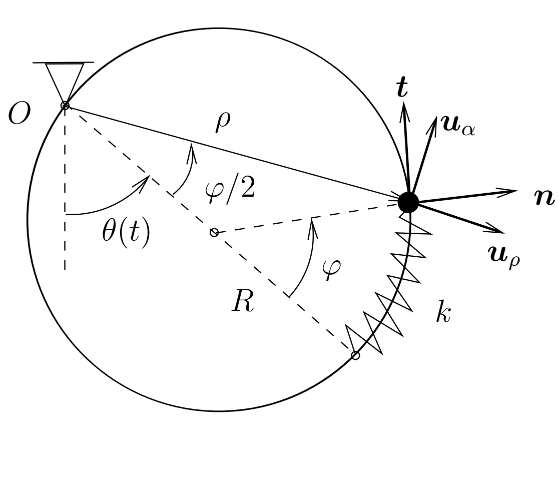
Por lo que la aceleración en dicho sistema de coordenadas resulta:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\alpha}^2 = -R\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} - \frac{R\dot{\varphi}^2}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - 2R\cos\frac{\varphi}{2}\left(\dot{\theta} + \frac{\dot{\varphi}}{2}\right)^2$$
$$a_\alpha = \rho\ddot{\alpha} + 2\dot{\rho}\dot{\alpha} = 2R\cos\frac{\varphi}{2}\left(\ddot{\theta} + \frac{\ddot{\varphi}}{2}\right) - 2R\dot{\varphi}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\left(\dot{\theta} + \frac{\dot{\varphi}}{2}\right)$$

Otra forma de abordarlo es obtener la aceleración a través del sistema móvil que gira con el aro. La aceleración, en este caso, se puede expresar como:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{rel} + \boldsymbol{a}_{arr} + \boldsymbol{a}_{cor}$$

$$\boldsymbol{a}_{rel} = R\ddot{\varphi}\boldsymbol{t} - R\dot{\varphi}^2\boldsymbol{n}$$
$$\boldsymbol{a}_{arr} = \rho\ddot{\theta}\boldsymbol{u}_\alpha - \rho\dot{\theta}^2\boldsymbol{u}_\rho$$
$$\boldsymbol{a}_{cor} = 2\dot{\theta}\boldsymbol{k} \wedge (R\dot{\varphi})\boldsymbol{t} = -2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\boldsymbol{n}$$



$$a_t = R\ddot{\varphi} + 2R\ddot{\theta}\cos^2\frac{\varphi}{2} + R\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\varphi$$
$$a_n = -R\dot{\varphi}^2 + R\ddot{\theta}\operatorname{sen}\varphi - 2R\dot{\theta}^2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

sabiendo que:

$$\begin{aligned}
\theta &= \theta_0 \operatorname{sen} \Omega t \\
\dot{\theta} &= \Omega \theta_0 \cos \Omega t \\
\ddot{\theta} &= -\Omega^2 \theta_0 \operatorname{sen} \Omega t
\end{aligned}$$

2. Planteando la ecuación de la cantidad de movimiento según la tangente al aro:

$$-kR\varphi = ma_t$$

La ecuación diferencial finalmente resulta:

$$\boxed{mR\ddot{\varphi} - 2mR\Omega^2\theta_0 \cos^2\frac{\varphi}{2} \operatorname{sen}\Omega t + mR\Omega^2\theta_0^2 \cos^2\Omega t \operatorname{sen}\varphi + kR\varphi = 0}$$

3. Al imponer un movimiento a la curva, la energía no se conserva. Por otra parte tampoco se conserva el momento cinético ni la cantidad de movimiento. Por tanto no existen integrales primeras del movimiento.

4. El momento $\boldsymbol{M} = M\boldsymbol{k}$ se deduce de la ecuación del momento cinético:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}$$

sabiendo que la velocidad de la partícula se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{rel} + \boldsymbol{v}_{arr} &= R\dot{\varphi}\boldsymbol{t} + \rho\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\alpha \\
&= \dot{\rho}\,\boldsymbol{u}_\rho + \rho\dot{\alpha}\,\boldsymbol{u}_\alpha\,,
\end{aligned}$$

el momento cinético resulta:

$$\boldsymbol{H}_O = (4mR^2\dot{\theta}\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2mR^2\dot{\varphi}\cos^2\frac{\varphi}{2})\boldsymbol{k} = 2mR^2\cos^2\frac{\varphi}{2}(2\Omega\theta_0\cos\Omega t + \dot{\varphi})\boldsymbol{k}$$

El momento que es necesario aplicar para imponer el movimiento deseado es:

$$\boxed{M = \frac{\mathrm{d}H_O}{\mathrm{d}t} = -mR^2\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi(2\Omega\theta_0\cos\Omega t + \dot{\varphi}) + 2mR^2\cos^2\frac{\varphi}{2}(-2\Omega^2\theta_0\operatorname{sen}\Omega t + \ddot{\varphi})}$$