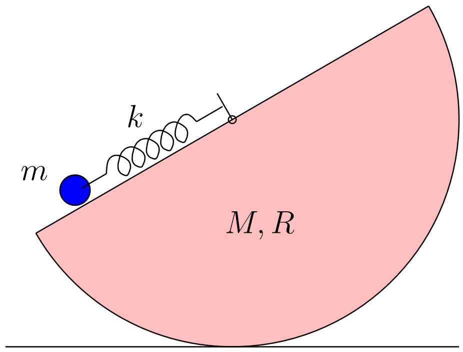
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (18 de enero de 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Un semidisco de radio R y masa M se mantiene en un plano vertical de forma que rueda sin deslizar sobre una recta horizontal. Sobre el borde plano del semidisco hay una partícula de masa m que desliza sobre el mismo, sujeta al centro por un resorte lineal de constante k y longitud natural nula. Se considera que la partícula no llega a salir del borde.



Se pide:

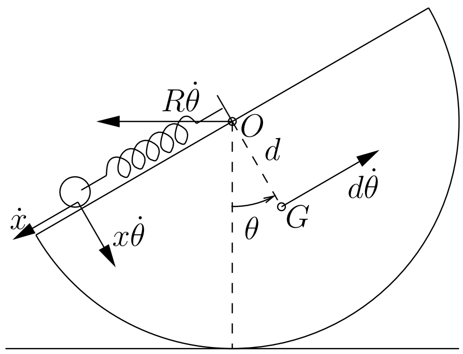
1. Elegir unas coordenadas generalizadas adecuadas y expresar mediante las mismas la función Lagrangiana.

2. Ecuaciones de la dinámica (de Lagrange).

3. Integrales primeras caso de haberlas.

4. Suponiendo que el semidisco desliza libremente sobre la recta horizontal, obtener de nuevo la Lagrangiana y discutir las integrales primeras.

1.— Elegimos como coordenadas libres la elongación del resorte x y el giro del semidisco θ. Tenemos en cuenta que el centro de masa G del semidisco se halla a una distancia $d = 4R/(3\pi)$ del centro geométrico O.



En primer lugar obtenemos los distintos términos de la Lagrangiana $L = T - V$. La energía cinética de m es

$$T_m = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(R\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}\right)^2 + \left(R\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta - x\dot{\theta}\right)^2\right]. \tag{1}$$

La energía cinética del semidisco es

$$T_M = \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Mv_G^2\,; \tag{2}$$

teniendo en cuenta

$$I_G = I_O - Md^2 = MR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right); \quad v_G^2 = R^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2\dot{\theta}^2 - 2R\frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}^2\cos\theta \tag{3}$$

resulta

$$T_M = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right). \tag{4}$$

Añadiendo el potencial gravitatorio y del resorte se obtiene finalmente

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(R^2 + x^2 - 2Rx\operatorname{sen}\theta\right) + mR\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right) + Mg\frac{4R}{3\pi}\cos\theta + mgx\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}kx^2\,. \tag{5}$$

2.— Las ecuaciones de Lagrange se obtienen derivando (5):

$$mR\ddot{\theta}\cos\theta + m\ddot{x} - mx\dot{\theta}^2 + kx - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = 0\,; \tag{6}$$

$$\left[m\left(R^2 + x^2 - 2Rx\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + MR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right)\right]\ddot{\theta} + mR\ddot{x}\cos\theta + m(2x - 2R\,\mathrm{sen}\,\theta)\dot{x}\dot{\theta}$$
$$- mRx\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\frac{8}{3\pi}\,\mathrm{sen}\,\theta + Mg\frac{4R}{3\pi}\,\mathrm{sen}\,\theta - mgx\cos\theta = 0\,; \tag{7}$$

3.— Ninguna de las coordenadas es cíclica, ya que ambas intervienen en la expresión de la Lagrangiana (5). Se conserva la energía, ya que todas las fuerzas son conservativas o provienen de enlaces lisos en los que no se desarrolla trabajo:

$$E = T + V\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(R^2 + x^2 - 2Rx\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + mR\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta\right)$$
$$- Mg\frac{4R}{3\pi}\cos\theta - mgx\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}kx^2 = \text{cte.}\,. \tag{8}$$

4.— En este caso no aplica la condición de rodadura, por lo que el sistema tendrá 3 g.d.l.: (x, θ, y), siendo y el desplazamiento horizontal del centro del disco. Las expresiones (1) y (4) resultan:

$$T_m = \frac{1}{2}m\left[(\dot{y}\cos\theta + \dot{x})^2 + \left(\dot{y}\,\mathrm{sen}\,\theta - x\dot{\theta}\right)^2\right]\,. \tag{9}$$

$$T_M = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 - \frac{4}{3}\frac{M}{\pi}\dot{y}R\dot{\theta}\cos\theta\,. \tag{10}$$

La Lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{y}\dot{x}\cos\theta + x\dot{\theta}^2 - 2x\dot{y}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 - \frac{4}{3}\frac{M}{\pi}\dot{y}R\dot{\theta}\cos\theta$$
$$+ Mg\frac{4R}{3\pi}\cos\theta + mgx\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{1}{2}kx^2\,. \tag{11}$$

El grado de libertad y es una coordenada cíclica, ya que L no depende explícitamente del mismo. Físicamente corresponde a la conservación de la cantidad de movimiento horizontal por la ausencia de fuerzas externas según dicha dirección:

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{x}\cos\theta - mx\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + m\dot{y} + M\dot{y} - M\frac{4R}{3\pi}\dot{\theta}\cos\theta \quad \text{(cte.)} \tag{12}$$

Las otras dos ecuaciones de Lagrange resultan:

$$m\ddot{y}\cos\theta + m\ddot{x} - mx\dot{\theta}^2 + kx - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \tag{13}$$

$$mx^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} - M\frac{4R}{3\pi}R\ddot{y}\cos\theta - mx\ddot{y}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2mx\dot{\theta}\dot{x} + Mg\frac{4R}{3\pi}\,\mathrm{sen}\,\theta - mgx\cos\theta = 0 \tag{14}$$