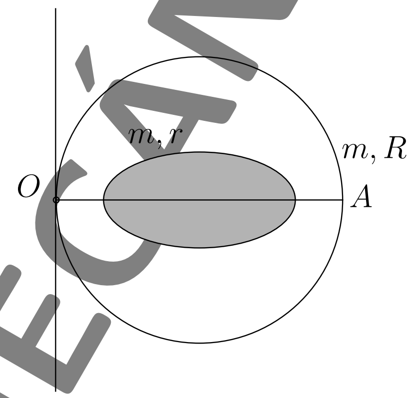
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (16 de Marzo de 2006)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Un sistema mecánico está compuesto de un aro de masa m y radio R y un disco de masa m y radio $r < R$.
El aro tiene un punto fijo O y puede girar libremente alrededor de una recta vertical fija que pasa por O, manteniéndose siempre vertical.
El disco está unido a lo largo de uno de sus diámetros en el centro del diámetro horizontal OA del aro, de forma que puede girar libremente alrededor de este. La figura adjunta proporciona una vista del sistema en el plano del aro que muestra al disco en perspectiva en una posición genérica.
Se pide



1. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento, obteniendo las expresiones correspondientes caso de que existan.

2. Calcular el momento M que habría que ejercer sobre el aro para conseguir que su velocidad de rotación alrededor del eje vertical fuera constante.

---

1. El sistema tiene dos grados de libertad; uno de ellos es el giro ψ del conjunto alrededor de la recta vertical fija, y otro el giro φ del disco alrededor del diámetro OA. Obsérvese que tanto el aro como el disco experimentan rotaciones puras, ya que el punto fijo O pertenece a ambos.

Existen dos integrales primeras. La primera de ellas es la conservación de la componente vertical del momento cinético del conjunto en O, puesto que el peso es vertical y por tanto no da momento según esa dirección, y la articulación en O deja libre el giro alrededor de la vertical, introduciendo únicamente un momento horizontal. La otra integral primera es la conservación de la energía del conjunto, puesto que no trabaja ninguna de las fuerzas que actúan sobre éste.

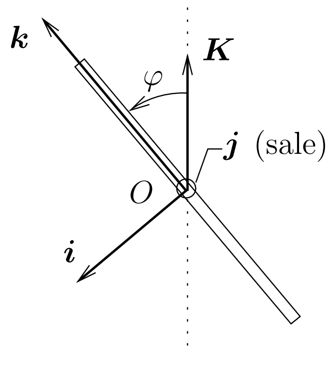


Figura 1: *Vista según OA, mostrando el canto del disco*

Obsérvese que en este caso, a pesar de que el giro del disco alrededor de OA es libre, no se conserva la correspondiente componente del momento cinético en su centro, ya que se trata de una dirección móvil que no coincide con el eje de revolución del disco.

Por conveniencia se adopta un sistema móvil auxiliar $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ ligado al disco, de forma que el versor $\boldsymbol{i}$ es perpendicular al plano del disco, el $\boldsymbol{j}$ es horizontal según OA y $\boldsymbol{k}$ es perpendicular a los otros dos formando un triedro orientado a derechas. En este sistema el tensor de inercia en O del disco toma la forma:

$$\boldsymbol{I}_{O_{disco}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad ; \qquad A = \frac{1}{2}mr^2 + mR^2 \ , \ B = \frac{1}{4}mr^2 \ , \ C = \frac{1}{4}mr^2 + mR^2$$

Denotando por $\boldsymbol{K}$ al versor vertical fijo, las velocidades de rotación del aro y del disco resultan:

$$\boldsymbol{\Omega}_{aro} = \dot{\psi}\boldsymbol{K} \quad , \qquad \boldsymbol{\Omega}_{disco} = \dot{\psi}\boldsymbol{K} + \dot{\varphi}\boldsymbol{j} = -\dot{\psi}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\boldsymbol{j} + \dot{\psi}\cos\varphi\boldsymbol{k}$$

Por tanto, el momento cinético en O del disco resulta:

$$\boldsymbol{H}_{O_{disco}} = \boldsymbol{I}_{O_{disco}} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{disco} = -A\dot{\psi}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} + B\dot{\varphi}\boldsymbol{j} + C\dot{\psi}\cos\varphi\boldsymbol{k}$$

y el momento cinético total según la vertical tiene la expresión:

$$\begin{aligned} H = \boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = (\boldsymbol{H}_{O_{aro}} + \boldsymbol{H}_{O_{disco}}) \cdot \boldsymbol{K} &= \frac{3}{2}mR^2\dot{\psi} + A\dot{\psi}\operatorname{sen}^2\varphi + C\dot{\psi}\cos^2\varphi \\ &= \frac{5}{2}mR^2\dot{\psi} + \frac{1}{4}mr^2\dot{\psi}\left(1 + \operatorname{sen}^2\varphi\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Finalmente, la expresión de la energía total, que coincide con la cinética si el nivel nulo de potencial gravitatorio se sitúa en O, tiene la expresión:

$$\begin{aligned} E = T_{aro} + T_{disco} &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_{disco} \cdot \boldsymbol{H}_{O_{disco}} \\ &= \frac{5}{4}mR^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{8}mr^2\left[\dot{\psi}^2(1 + \operatorname{sen}^2\varphi) + \dot{\varphi}^2\right] \end{aligned}$$

2. En este caso la componente vertical del momento cinético total en O (1) deja de ser constante. El momento pedido puede obtenerse planteando el principio del momento cinético en O al conjunto según la vertical fija:

$$M = \frac{\boldsymbol{H}_O}{dt} \cdot \boldsymbol{K} = \frac{d\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K}}{dt} = \frac{dH}{dt}$$

Derivando la expresión general de H dada en (1) y particularizando en la expresión obtenida $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0, \ddot{\psi} = 0$, se obtiene:

$$M = \frac{1}{4}mr^2\dot{\psi}_0\dot{\varphi}\operatorname{sen}2\varphi$$