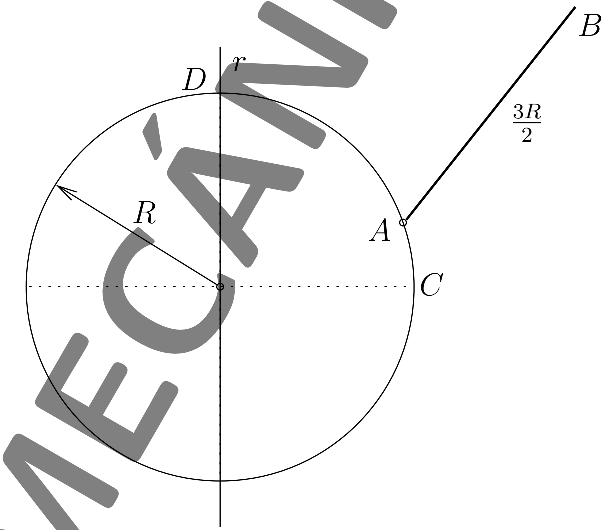
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (10 de Mayo de 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Una varilla AB de masa m y longitud $3R/2$ se mueve contenida en todo momento en un plano horizontal fijo, de forma que su extremo A puede deslizar sobre una circunferencia fija de radio R en el mismo plano con ligadura bilateral lisa. Sobre la varilla una fuerza repulsiva distribuida proporcional a la masa y a la distancia que separa cada punto de la recta fija r. Llamando x a dicha distancia, para cada elemento de masa esta fuerza vale $\mathrm{d}f = kx\mathrm{d}m$, siendo la constante $k = \frac{2g}{3R}$.

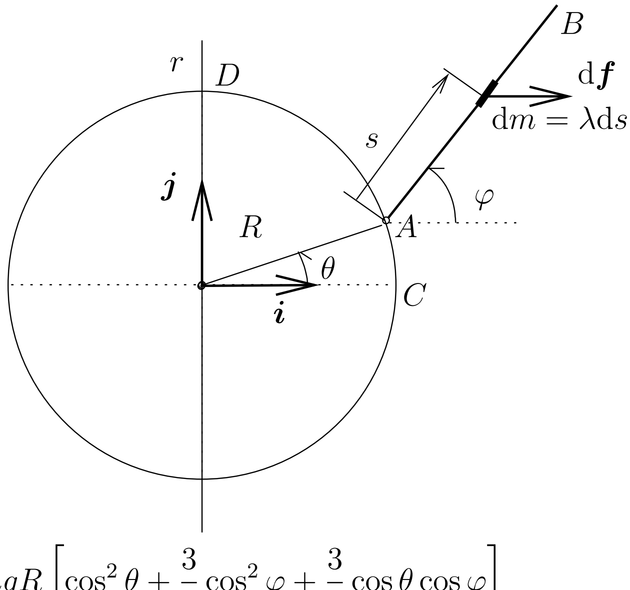


Se pide

1. Obtener todas las posiciones de equilibrio de la varilla ;
2. Discutir la estabilidad de las posiciones de equilibrio en las que A se encuentra en algún punto intermedio del cuadrante CD de la circunferencia (sin incluir estas posiciones extremas);

---

1. El sistema posee dos grados de libertad definidos por los ángulos θ y φ, tal y como se muestra en la figura. Sólo trabaja la fuerza repulsiva, que deriva de un potencial. Este potencial es en este caso:



$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = kx\,\mathrm{d}m\boldsymbol{i} \Longrightarrow \mathrm{d}V = -k\frac{x^2}{2}\mathrm{d}m$$

sabiendo que $x = R\cos\theta + s\cos\varphi$ y que $\mathrm{d}m = \lambda\mathrm{d}s$, el potencial de la varilla resulta:

$$V = \int_0^{3R/2} -\frac{k}{2}[R\cos\theta + s\cos\varphi]^2\lambda\mathrm{d}s = -\frac{1}{3}mgR\left[\cos^2\theta + \frac{3}{4}\cos^2\varphi + \frac{3}{2}\cos\theta\cos\varphi\right]$$

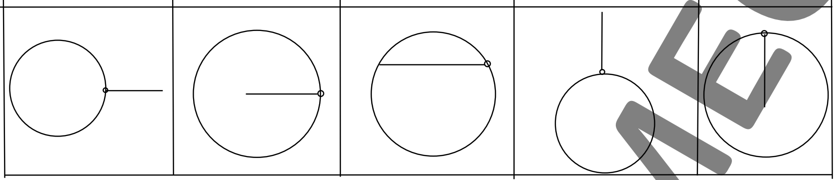
Las condiciones de equilibrio se deducen imponiendo la anulación de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}\theta \left[2\cos\theta + \frac{3}{2}\cos\varphi \right] = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}\varphi \left[\cos\varphi + \cos\theta \right] = 0 \tag{2}$$

Las posiciones de equilibrio se pueden resumir en la figura siguiente en la que por simplicidad no se han indicado las posiciones simétricas respecto de los ejes horizontal y vertical que pasan por el centro de la circunferencia.

θ	0		$\arccos(3/4)$	$\frac{\pi}{2}$	
φ	0	π	π	$\frac{\pi}{2}$	-$\frac{\pi}{2}$



Se puede comprobar que la resultante de la fuerza repulsiva es horizontal $\boldsymbol{f} = \int kx\mathrm{d}m\boldsymbol{i} = kx_G m\boldsymbol{i}$. En ese sentido, las únicas posiciones de equilibrio posibles son donde la reacción de la circunferencia es horizontal o nula.

2. La única posición de equilibrio que existe en el cuadrante superior derecho corresponde a las coordenadas $[\theta_3 = \arccos(3/4)\,, \varphi_3 = \pi]$ Para discutir la estabilidad calculamos las derivadas segundas del potencial:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -\frac{mgR}{3}\left(2\operatorname{sen}^2\theta - 2\cos^2\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\varphi\right)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} = -\frac{mgR}{2}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -\frac{mgR}{2}\left(\operatorname{sen}^2\varphi - \cos^2\varphi - \cos\theta\cos\varphi\right)$$

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right]_{(\theta_3,\varphi_3)} = mg\begin{pmatrix} -\frac{7}{24} & \\ & \frac{1}{8} \end{pmatrix} < 0 \ (\textit{inestable})$$