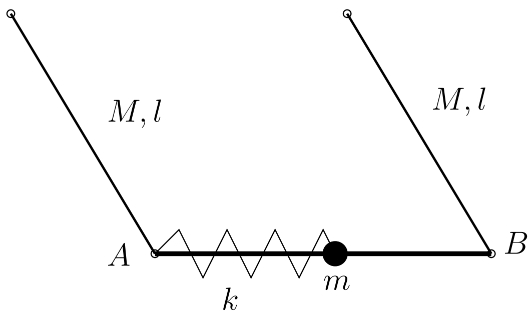
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO C (23 de enero de 2007)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

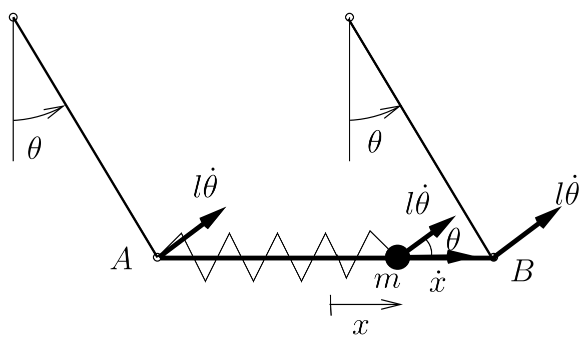
Una varilla rígida sin masa de longitud l se encuentra articulada en sus extremos A y B a sendas barras de masa M y longitud l, cuyos extremos están fijos. Una partícula de masa m está ensartada en dicha varilla y está unida a un muelle de constante k, anclado en A, con longitud natural $l/2$. Admitiendo que el movimiento sólo tiene lugar en el plano vertical. Se pide:



1. Definir e identificar el número de grados de libertad del sistema.
2. Discutir la existencia de integrales primeras y, en caso de existir, calcularlas.
3. En el caso en que en el extremo B estuviese aplicada una fuerza F horizontal, indicar las ecuaciones diferenciales del movimiento en este caso.
4. En el caso que las barras de longitud l estuviesen sujetas a un movimiento impuesto de velocidad angular constante ω, calcular la ecuación diferencial del movimiento y discutir la existencia de integrales primeras.

---

1. El sistema tiene dos grados de libertad que identificaremos con la coordenada x que define la posición de la partícula dentro de la varilla y el ángulo θ que define la orientación de las barras con respecto a la vertical.



2. Para plantear las ecuaciones diferenciales del movimiento definimos la función lagrangiana del sistema que en este caso se define como:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta) + \frac{1}{3}Ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + (m+M)gl\cos\theta$$

Se puede comprobar que ninguna de las dos coordenadas es cíclica. Dado que todas las fuerzas que trabajan derivan de potencial, la energía se conserva. Otra manera de deducir esta ecuación es verificando que la función lagrangiana no depende explícitamente del tiempo. Existe, por tanto, la integral de Jacobi que coincide en este caso con la energía dado que las coordenadas no dependen explícitamente del tiempo al ser la energía cinética una función homogénea de segundo grado. La ecuación de la energía se puede expresar como:

$$\boxed{E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta) + \frac{1}{3}Ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - (m+M)gl\cos\theta}$$

Las ecuaciones de Lagrange del movimiento resultan:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta + kx = 0$$
$$\left(\frac{2}{3}M + m\right) l^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta + (m+M)gl\operatorname{sen}\theta = 0$$

3. Para evaluar la modificación de las ecuaciones se evaluará a qué fuerzas generalizadas da lugar la aplicación de la fuerza $\boldsymbol{F}$:

$$\delta W = \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r} = Fl\cos\theta\delta\theta = Q^\theta\delta\theta \Longrightarrow Q^\theta = Fl\cos\theta$$

La única ecuación que se ve modificada es la correspondiente al grado de libertad θ, resultando:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q^\theta$$
$$\left(\frac{2}{3}M + m\right) l^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta + (m+M)gl\operatorname{sen}\theta = Fl\cos\theta$$

4. En este caso el sistema tiene un único grado de libertad, por lo que la función lagrangiana resulta:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\omega^2 + 2l\omega\dot{x}\cos\omega t) + \frac{1}{3}Ml^2\omega^2 - \frac{1}{2}kx^2 + (m+M)gl\cos\omega t$$

La ecuación diferencial del movimiento resulta:

$$\boxed{m\ddot{x} - ml\omega^2\operatorname{sen}\omega t + kx = 0}$$

En este caso no existen integrales primeras del movimiento dado que x no es una coordenada cíclica y la función lagrangiana depende explícitamente del tiempo.