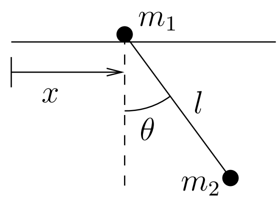
MECÁNICA

Práctica nº 8 curso 2002-2003

Ejercicio 36.— El sistema plano de la figura adjunta está formado por una masa m_1 que desliza libremente sobre una recta horizontal, y unida a ella mediante un hilo tenso de longitud l otra masa m_2. Se pide:



1. En función de las coordenadas cartesianas de cada partícula (x_1, y_1, x_2, y_2) expresar las ligaduras existentes y el número de grados de libertad del sistema.
2. Parametrizando las coordenadas mediante las magnitudes (x, θ), expresar las ecuaciones de la dinámica que resultan del principio de D'Alembert.
3. Obtener mediante los teoremas generales de Newton-Euler las ecuaciones de la dinámica y comprobar que equivalen a las obtenidas en el apartado anterior.
4. Misma cuestión mediante las ecuaciones de Lagrange.

---

1. El sistema (plano) podría definirse mediante las coordenadas cartesianas de sus masas (x_1, y_1, x_2, y_2), y las dos ecuaciones de ligadura que expresan el apoyo sobre la recta horizontal de m_1 y la longitud del péndulo:

$$y_1 = 0; \quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2.$$

Por tanto el sistema tiene dos grados de libertad. Para definir estos pueden emplearse los parámetros (libres) x, θ de la figura.

2. La expresión del principio de D'Alembert es

$$\boldsymbol{f}_1 \cdot \delta\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{f}_2 \cdot \delta\boldsymbol{r}_2 - m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 \cdot \delta\boldsymbol{r}_1 - m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 \cdot \delta\boldsymbol{r}_2 = 0 \quad \forall\{\delta\boldsymbol{r}_1, \delta\boldsymbol{r}_2\} \text{ comp.} \tag{1}$$

Con los grados de libertad indicados, y empleando los vectores unitarios $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{u}_r$, los desplazamientos virtuales son:

$$\delta\boldsymbol{r}_1 = \delta x\, \boldsymbol{i}; \quad \delta\boldsymbol{r}_2 = \delta x\, \boldsymbol{i} + l\delta\theta\, \boldsymbol{u}_\theta,$$

y las aceleraciones

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \ddot{x}\, \boldsymbol{i}; \quad \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \ddot{x}\, \boldsymbol{i} + l\ddot{\theta}\, \boldsymbol{u}_\theta - l\dot{\theta}^2 \boldsymbol{u}_r.$$

La única fuerza aplicada externa que desarrolla trabajo virtual es $\boldsymbol{f}_2 = -m_2 g\, \boldsymbol{j}$. Desarrollando la expresión del principio de D'Alembert (1) y agrupando términos,

$$\delta x \left[-m_1\ddot{x} - m_2(\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta)\right] \\ + \delta\theta \left[-m_2 g l \operatorname{sen}\theta - m_2(l\ddot{x}\cos\theta + l^2\ddot{\theta}\right] = 0 \quad \forall\{\delta x, \delta\theta\}.$$

Las coordenadas (x, θ) son libres, por lo que en la expresión anterior las variaciones $\{\delta x, \delta\theta\}$ son arbitrarias, y por tanto cada uno de sus coeficientes deberá ser nulo:

$$-m_1\ddot{x} - m_2(\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta) = 0, \tag{2}$$

$$-m_2 gl \operatorname{sen}\theta - m_2(l\ddot{x}\cos\theta + l^2\ddot{\theta}) = 0. \tag{3}$$

Estas son las ecuaciones que definen la dinámica del sistema.

3. En primer lugar podemos expresar la ecuación dinámica (balance de cantidad de movimiento) para el conjunto de las dos masas en dirección x, en la cual no hay fuerzas experiores aplicadas:

$$m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta) = 0.$$

Comprobamos que esta ecuación coincide con (2).

Por otra parte, podemos obtener otra ecuación de la dinámica de la masa m_2 (balance de la cantidad de movimiento) en la dirección del giro θ:

$$m_2(\ddot{x}\cos\theta + l\ddot{\theta}) = -m_2 g \operatorname{sen}\theta,$$

ecuación que (multiplicada por l) a su vez corresponde a (3).

De forma equivalente, podríamos haber aplicado el balance del momento cinético en un punto fijo sobre la recta, situado en $x = x_0$:

$$\begin{aligned} H_A &= m_2 l\left((x - x_0)\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{x}\cos\theta + l\dot{\theta}\right); \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_A &= m_2 l\left((x - x_0)(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) + \ddot{x}\cos\theta + l\ddot{\theta}\right); \\ M_A &= -m_2 g(x - x_0) - m_2 gl \operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, por conveniencia, el punto (fijo) donde se toman momentos puede ser precisamente el que en este instante (genérico) coincide con la masa m_1, es decir $x = x_0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_A = M_A \quad \Rightarrow \quad m_2 l\left(\ddot{x}\cos\theta + l\ddot{\theta}\right) = -m_2 gl \operatorname{sen}\theta,$$

que vuelve a ser la misma ecuación (3).

4. La lagrangiana del sistema vale

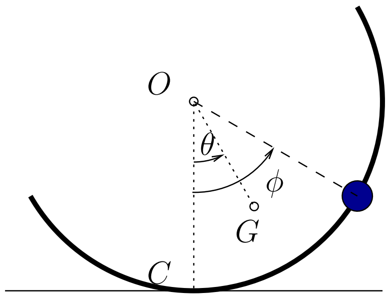
$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta\right) + m_2 gl\cos\theta.$$

Derivando se hallan las dos ecuaciones de Lagrange que vuelven a coincidir con las obtenidas antes (2) y (3).

Ejercicio 37.— Solución: ejercicio 5.º examen final junio 1997

Ejercicio 38.— Solución: ver ejemplo 6.8 (pág. 6.33) en libro *curso de mecánica*

Ejercicio 39.— Un semiaro de masa m y radio R rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose vertical en todo instante. Sobre él se mueve sin rozamiento una partícula de masa m con ligadura bilateral que no estorba la rodadura. Se emplearán como parámetros los ángulos θ y ϕ de giro del semiaro, y de la partícula relativa al semiaro, ambos medidos desde la posición de equilibrio y en sentido antihorario.



Obtener las ecuaciones del movimiento, así como las reacciones en un instante ge nérico, mediante aplicación de los teoremas generales de Newton-Euler. Discutir la existencia de integrales primeras.

La distancia del centro del semiaro al centro de masas del mismo vale $d = 2R/\pi$, y el momento de inercia en dicho centro de masas $I_G = MR^2(1 - 4/\pi^2)$.

El sistema tiene 2 g.d.l., pero al plantear las ecuaciones de Newton-Euler (ecuaciones cardinales de la dinámica) intervienen también las reacciones H, V y N sobre el aro (respectivamente según x e y en el punto de rodadura y en dirección radial debida a la partícula m), por lo que será necesario obtener ecuaciones adicionales para estas nuevas incógnitas. Planteamos pues las 5 ecuaciones siguientes:

1. Balance de cantidad de movimiento en dirección x del conjunto:

$$H = M\left(-R\ddot{\theta} + \frac{2R}{\pi}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{2R}{\pi}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta\right) + m\left(-R\ddot{\theta} + R\ddot{\phi}\cos\phi - R\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\phi\right); \quad (1)$$

2. Balance de cantidad de movimiento en dirección y del conjunto:

$$V - (M+m)g = M\left(\frac{2R}{\pi}\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \frac{2R}{\pi}\dot{\theta}^2\cos\theta\right) + m\left(R\ddot{\phi}\operatorname{sen}\phi + R\dot{\phi}^2\cos\phi\right); \quad (2)$$

3. Balance de cantidad de movimiento en dirección r de la partícula:

$$-N + mg\cos\phi = m\left(-R\ddot{\theta}\operatorname{sen}\phi - R\dot{\phi}^2\right); \quad (3)$$

4. Balance de cantidad de movimiento en dirección ϕ de la partícula:

$$-mg\operatorname{sen}\phi = m\left(-R\ddot{\theta}\cos\phi + R\ddot{\phi}\right); \quad (4)$$

5. Balance de momento cinético del semiaro:

$$H\left(R - \frac{2R}{\pi}\cos\theta\right) - V\left(\frac{2R}{\pi}\operatorname{sen}\theta\right) - N\left(\frac{2R}{\pi}\operatorname{sen}(\phi-\theta)\right) = MR^2\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)\ddot{\theta}. \quad (5)$$

La ecuación (4) es directamente una de las dos ecuaciones de la dinámica que buscamos. Para obtener la otra despejamos de las ecuaciones (1), (2), (3) las reacciones H, V y N y sustituimos en (5), obteniendo finalmente:

$$\begin{aligned}\left[2MR^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta\right) + mR^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta + \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}(\phi-\theta)\right)\right]\ddot{\theta} \\ + mR^2\left[-\cos\phi + \frac{2}{\pi}\cos(\phi-\theta)\right]\ddot{\phi} + M\frac{2R^2}{\pi}\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}^2 + mR^2\operatorname{sen}\phi\,\dot{\phi}^2 \\ + Mg\frac{2R}{\pi}\operatorname{sen}\theta + mg\frac{2R}{\pi}(\operatorname{sen}\theta + \cos\phi\operatorname{sen}(\phi-\theta)) = 0 \quad (6)\end{aligned}$$

Puede comprobarse que las ecuaciones (4) y (6) son equivalentes a las dos ecuaciones de Lagrange que se obtendrían (ver solución ejercicio 5.º, examen de 1994). La ecuación de Lagrange en ϕ es la misma que (4), y puede comprobarse desarrollando el álgebra que la (6) es igual a la de Lagrange en θ más la (4) multiplicada por $-\dfrac{2R}{\pi}\cos(\phi-\theta)$.

Ejercicio 40.— SOLUCIÓN: Ejercicio 4.º, examen final septiembre 2002.