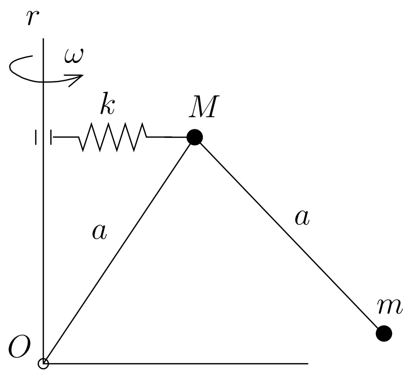
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (17 de enero de 2001)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Un sistema está formado por dos partículas de masas M y m. La partícula M se encuentra unida a un punto fijo O a través de una varilla sin masa de longitud a. Además, esta partícula está sujeta mediante un resorte de constante k y longitud natural nula a una recta vertical fija (r) que pasa por O. La partícula m se encuentra unida a la partícula M mediante otra varilla sin masa de longitud a. Todo el conjunto de partículas, varillas y muelle se mueve en todo momento contenido en un plano vertical que gira con velocidad angular ω constante alrededor de la recta vertical r.



Se pide:

1. Deducir razonadamente el número de grados de libertad del sistema y seleccionar de forma justificada unas coordenadas generalizadas adecuadas.
2. Expresar la función Lagrangiana del sistema en función de las coordenadas del problema.
3. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
4. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento y expresarlas en su caso.
5. Expresión de la reacción ejercida sobre la partícula m.

---

1. Para determinar la posición de la partícula M basta con un parámetro, ya que se mueve siempre en el plano vertical a una distancia cte. de O. La segunda partícula se puede situar con otro parámetro adicional, ya que se mueve en el mismo plano a una distancia cte. de la primera. El sistema tiene por tanto 2 g.d.l., representados en este caso por los ángulos θ y φ de la Figura 1.

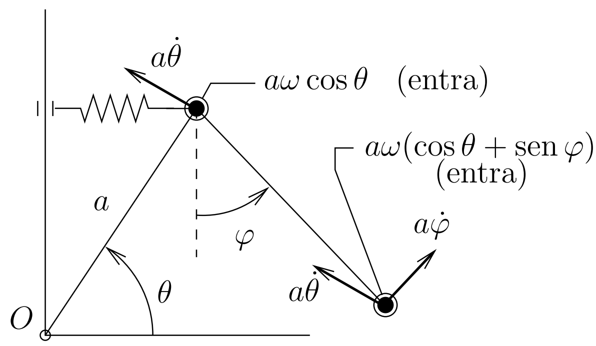


Figura 1: *Configuración en el plano móvil*

2. Para calcular la velocidad de cada partícula puede emplearse un sistema de referencia móvil auxiliar que acompañe al plano vertical giratorio. La velocidad queda descompuesta de esta forma en sus componentes relativa y de arrastre, tal y como se muestra en la Figura 1. La energía cinética de cada partícula resulta por tanto:

$$\begin{aligned} T_M &= \frac{1}{2}M\left[(a\omega\cos\theta)^2 + (a\dot{\theta})^2\right] \\ T_m &= \frac{1}{2}m\left[(a\dot{\varphi}\cos\varphi - a\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta)^2 + (a\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + a\dot{\theta}\cos\theta)^2 + a^2\omega^2(\cos\theta + \operatorname{sen}\varphi)^2\right] \end{aligned}$$

El muelle, al no tener masa y deslizar sin rozamiento sobre la recta r, se mantiene en todo momento horizontal, por lo que $V_k = \frac{1}{2}k(a\cos\theta)^2$. Por ultimo, tomando como origen el plano horizontal que pasa por O, el potencial gravitatorio resulta $V_g = Mga\operatorname{sen}\theta + mg(a\operatorname{sen}\theta - a\cos\varphi)$.

La función Lagrangiana $L = T_M + T_m - V_k - V_g$ resulta, después de operar ligeramente las expresiones correspondientes:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}M\left[a^2\omega^2\cos^2\theta + a^2\dot{\theta}^2\right] + \frac{1}{2}m\left[a^2\dot{\varphi}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}(\varphi-\theta) + a^2\omega^2(\cos\theta + \operatorname{sen}\varphi)^2\right] \\ -\frac{1}{2}k(a\cos\theta)^2 - ga\left[(M+m)\operatorname{sen}\theta - m\cos\varphi\right] \end{aligned}$$

3. Las dos ecuaciones de Lagrange resultan:

$$\begin{aligned} (M+m)a^2\ddot{\theta} + ma^2\ddot{\varphi}\operatorname{sen}(\varphi-\theta) + ma^2\dot{\varphi}^2\cos(\varphi-\theta) \\ + \frac{1}{2}a^2\left[(M+m)\omega^2 - k\right]\operatorname{sen}2\theta + ma^2\omega^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + (M+m)ga\cos\theta = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$ma^2\left[\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}\operatorname{sen}(\varphi-\theta) - \dot{\theta}^2\cos(\varphi-\theta) - \omega^2\cos\varphi(\operatorname{sen}\varphi + \cos\theta)\right] + mga\operatorname{sen}\varphi = 0 \quad (2)$$

4. Ninguna de las dos coordenadas es cíclica. Por otro lado, la energía no se conserva puesto que el par que es necesario ejercer sobre el plano móvil para que gire con ω constante no es conservativo. No obstante, puesto que las fuerzas activas derivan de un potencial y el tiempo no aparece explícitamente en L, existe la integral de Jacobi:

$$h = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\dot{\theta} + \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = C\ ,$$

que en este caso tiene la expresión:

$$\begin{aligned} h = \frac{1}{2}(M+m)a^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 + ma^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}(\varphi-\theta) - \frac{1}{2}M\omega^2a^2\cos^2\theta \\ - \frac{1}{2}ma^2\omega^2(\cos\theta + \operatorname{sen}\varphi)^2 + \frac{1}{2}k(a\cos\theta)^2 + ag\left[(M+m)\operatorname{sen}\theta - m\cos\varphi\right] = C \end{aligned}$$

5. Descomponiendo el movimiento en uno relativo más uno de arrastre de un sistema móvil que gira con ω constante, se puede obtener el campo de aceleraciones. La reacción pedida tiene una componente R_n según la varilla que une ambas partículas (dirigida de m a M) y otra componente R_N según la dirección perpendicular al plano móvil (positiva hacia adentro del papel).

Con la ayuda de la Figura 2 (donde el sentido positivo en la dirección perpendicular al papel es hacia adentro de éste) se pueden obtener ambas componentes, que resultan:

$$R_n = ma\dot{\varphi}^2 + ma\ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi) + ma\omega^2(\cos\theta + \operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}\varphi - ma\dot{\theta}^2\operatorname{sen}(\theta-\varphi) + mg\cos\varphi$$

$$R_N = 2ma\omega(\dot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\theta}\operatorname{sen}\theta)$$

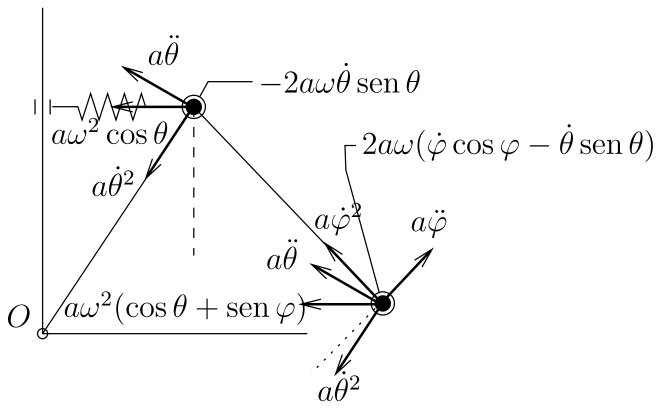


Figura 2: *Campo de aceleraciones*

Como observación final, puede comprobarse que la ecuación dinámica que se puede plantear segun la dirección perpendicular a la varilla que une m y M coincide con la ecuación de Lagrange (2).