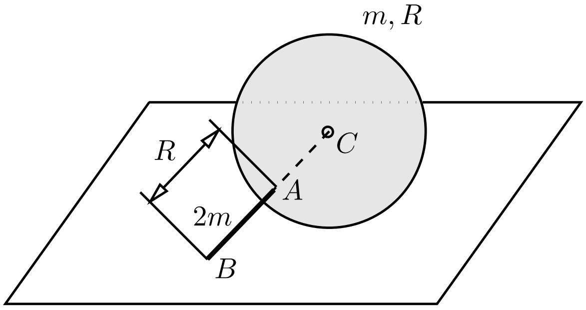
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (13 de marzo de 2001)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Un sólido rígido está formado por una esfera sólida, de centro C, masa m y radio R, y una barra rígida AB de longitud R y masa $2m$. Se pone en movimiento de forma que tanto la esfera como el punto B de la barra se encuentran apoyados en un plano horizontal liso, con velocidad de rotación ω_1 según la vertical y ω_2 según el eje de la barra. Se pide:



1. expresar el tensor central de inercia en ejes principales;
2. razonar si las componentes de la velocidad de rotación sobre el eje de la barra y el eje vertical deben mantenerse o no constantes;
3. expresar el momento cinético respecto del centro de masa del sólido;
4. obtener las ecuaciones de Euler;
5. obtener el mínimo valor de ω_2/ω_1 para que, caso de que se produjera el despegue del solido, éste tuviera lugar en la esfera.

---

1. Con los datos geométricos y másicos del enunciado es sencillo deducir que el centro de masa del sólido se encuentra en el punto A. Para expresar el tensor de inercia $\boldsymbol{I}_G$ se ha seleccionado un sistema móvil $(G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ que no está ligado al sólido pero cuyas direcciones son principales. El eje $\boldsymbol{k}$ lleva la dirección de la barra, el eje $\boldsymbol{i}$ es horizontal (entra en el papel en la Figura 1) y el eje $\boldsymbol{j}$ es perpendicular a los anteriores formando un triedro a derechas.

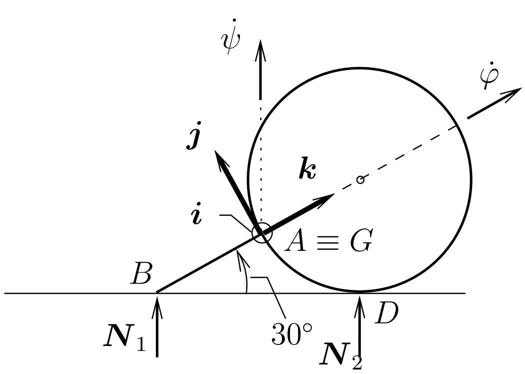


Figura 1: *Definición del sistema de ejes móviles*

Aplicando la expresión del campo tensorial de inercia en la esfera y el sólido para calcular sus respectivas contribuciones en G, se obtiene la expresión del tensor central $\boldsymbol{I}_G$:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \tag{1}$$

$$A = \left[\frac{2}{5}mR^2 + mR^2\right] + \left[\frac{1}{12}2mR^2 + 2m\left(\frac{R}{2}\right)^2\right] = \frac{31}{15}mR^2 \quad , \qquad C = \frac{2}{5}mR^2 \tag{2}$$

2. Haciendo la hipótesis de que el sólido se mantiene en contacto con el suelo, el movimiento de aquél puede considerarse como la composición de dos rotaciones: una rotación $\dot{\psi}$ según la vertical y otra rotación $\dot{\varphi}$ según el eje de la barra:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{K} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$$

No existe rotación en dirección perpendicular a ambas (dirección normal al papel en la Figura 1) ya que ésta conduciría a que se despegara el sólido. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{K} = \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}$ se deduce que las componentes de la velocidad de rotación $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ en el triedro móvil se expresan como:

$$\Omega_x = 0 \quad , \qquad \Omega_y = \dot{\psi}\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \qquad \Omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\frac{1}{2}$$

y el momento cinético en G se expresa como $\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} = (0, A\Omega_y, C\Omega_z)$

Del razonamiento anterior también se deduce que el sistema móvil $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ tiene una velocidad de rotación $\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{K} = \dot{\psi}(\sqrt{3}/2)\boldsymbol{j} + \dot{\psi}(1/2)\boldsymbol{k}$.

Puesto que el plano es liso, todas las fuerzas (reacciones y peso) que actuan sobre el sólido son verticales, y por tanto la componente vertical del momento total en G es nulo. En consecuencia, la correspondiente componente del momento cinético se mantiene constante:

$$\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{K} = A\frac{\sqrt{3}}{2}\Omega_y + C\frac{1}{2}\Omega_z = cte \tag{3}$$

Por otro lado, al ser las reacciones verticales, éstas cortan al eje de la barra, y por tanto la componente según esta dirección del momento en G es nulo. De este razonamiento no se deduce de forma evidente que la correspondiente componente del momento cinético $(\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k} = C\Omega_z)$ sea constante, ya que la dirección $\boldsymbol{k}$ es móvil. Sin embargo, esta afirmación es cierta en este caso como puede comprobarse evaluando su derivada temporal:

$$\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k})}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{M}_G \cdot \boldsymbol{k} = 0} + \boldsymbol{H}_G \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{H}_G \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{k}) = \dot{\psi}\boldsymbol{H}_G \cdot \underbrace{(\boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{k})}_{\parallel \boldsymbol{i}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad C\Omega_z = cte \tag{4}$$

De las expresiones (3) y (4) se deduce que las componentes (Ω_y, Ω_z) de $\boldsymbol{\Omega}$ en el triedro móvil son constantes, y que también lo son las velocidades de rotación, en particular serán iguales a las iniciales ($\dot{\psi} = \omega_1, \dot{\varphi} = \omega_2$). Esto quiere decir que si el sólido se lanza de forma que no se despega inicialmente, sigue sin despegarse en todo el movimiento posterior, conservándose las componentes ω_1 y ω_2.

3. La expresión del momento cinético respecto del centro de masa del solido resulta, teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior:

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{\sqrt{3}}{2}A\omega_1\boldsymbol{j} + C\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right)\boldsymbol{k}$$

4. Llamando $\boldsymbol{N}_1 = N_1\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{N}_2 = N_2\boldsymbol{K}$ a las reacciones en la barra y la esfera respectivamente, el momento total en G se expresa como:

$$\boldsymbol{M}_G = \frac{\sqrt{3}}{2}R(N_1 - N_2)\boldsymbol{i} \tag{5}$$

Por otro lado, la derivada del momento cinético en G se calcula mediante la expresión:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rel}}}_{=\mathbf{0}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{H}_G = \omega_1^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{C-A}{2} + C\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \boldsymbol{i} \tag{6}$$

Igualando las expresiones (5) y (6) se obtiene la ecuación de Euler:

$$N_1 - N_2 = \frac{\omega_1^2}{R} \left(\frac{C-A}{2} + C\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \tag{7}$$

5. El planteamiento del principio de cantidad de movimiento según la vertical conduce a la expresión:

$$N_1 + N_2 = 3mg \tag{8}$$

El sistema de ecuaciones (7) y (8) permite obtener las reacciones:

$$N_1 = \frac{3}{2}mg + \frac{\omega_1^2}{2R} \left(\frac{C-A}{2} + C\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$
$$N_2 = \frac{3}{2}mg - \frac{\omega_1^2}{2R} \left(\frac{C-A}{2} + C\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$

Teniendo en cuenta las expresiones de A y C dadas en (2) se observa que $(C - A) < 0$, por lo que el lugar de despegue depende de la relación (ω_2/ω_1):

- Si $(\omega_2/\omega_1) > \frac{25}{12} \;\rightarrow\; N_1 > 0$ siempre , N_2 puede anularse $\rightarrow$ se despegaría antes la esfera. Este despegue tendría lugar cuando ω_1^2 alcance el valor

$$\omega_1^2 \geq \frac{\frac{3g}{2R}}{\frac{1}{5}\beta - \frac{5}{12}} \quad , \qquad \text{siendo } \beta = \frac{\omega_2}{\omega_1} > \frac{25}{12}$$

- Si $(\omega_2/\omega_1) < \frac{25}{12} \;\rightarrow\; N_2 > 0$ siempre, N_1 puede anularse $\rightarrow$ se despegaría antes la barra. Este despegue tendría lugar cuando ω_1^2 alcance el valor

$$\omega_1^2 \geq \frac{\frac{3g}{2R}}{\frac{5}{12} - \frac{1}{5}\beta} \quad , \qquad \text{siendo } \beta = \frac{\omega_2}{\omega_1} < \frac{25}{12}$$