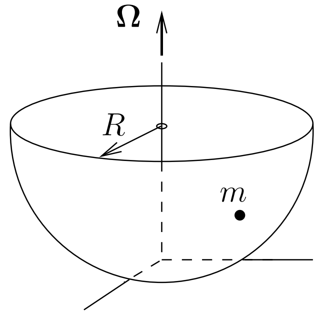
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (16 de noviembre de 2001)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

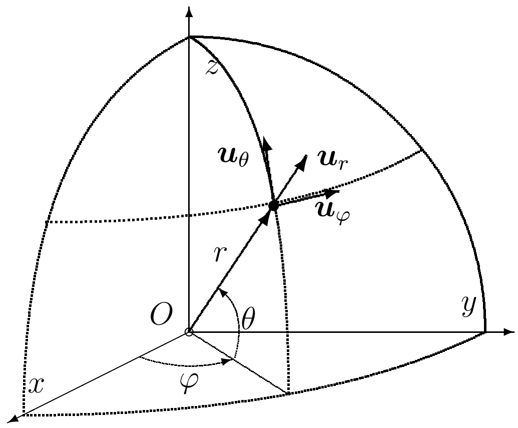
Una partícula pesada de masa m se mueve en el interior de un casquete esférico de radio R que gira alrededor de la vertical con una velocidad angular Ω.
Entre el casquete y la partícula existe una fuerza de rozamiento tipo Coulomb de coeficiente μ, y se admite que la partícula nunca pierde el contacto con la superficie.
Se pide:



1. Ecuaciones diferenciales del movimiento de la partícula.
2. Discutir la existencia de integrales primeras.
3. Expresión de la aceleración de la partícula relativa a un observador ligado al casquete.

Nota: Se recuerda que el rozamiento se moviliza en función del movimiento relativo entre la partícula y la superficie.

1.— Emplearemos coordenadas esféricas (r, φ, θ) en una referencia absoluta para describir el movimiento (es decir, estas coordenadas no se refieren a la esfera móvil sino a direcciones fijas en el espacio). La definición de coordenadas y los sentidos que consideraremos positivos son los usuales (véase la figura adjunta). Obsérvese que, con este criterio, la posición de m en el casquete inferior corresponde a valores negativos de la latitud θ. Las componentes de la velocidad de la partícula son:



$$v_r = 0; \quad v_\varphi = R\cos\theta\,\dot{\varphi}; \quad v_\theta = R\dot{\theta}.$$

Las componentes de la aceleración son:

$$\begin{aligned} a_r &= -R\dot{\varphi}^2\cos^2\theta - R\dot{\theta}^2 \\ a_\varphi &= -2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta + R\ddot{\varphi}\cos\theta \\ a_\theta &= R\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + R\ddot{\theta}. \end{aligned} \tag{1}$$

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso, $\boldsymbol{P} = -mg(\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{u}_r + \cos\theta\,\boldsymbol{u}_\theta)$, la reacción normal, $\boldsymbol{N} = N\,\boldsymbol{u}_r$, y la reacción tangencial debido al rozamiento. Éste actúa en dirección de la velocidad relativa entre partícula y superficie y con sentido opuesto. La expresión de esta velocidad relativa es

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = R\cos\theta(\dot{\varphi} - \Omega)\boldsymbol{u}_\varphi + R\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta,$$

por lo que la fuerza tangencial de rozamiento es

$$\boldsymbol{F}_r = -\mu N \frac{\cos\theta(\dot{\varphi}-\Omega)\boldsymbol{u}_\varphi + \dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta}{\sqrt{\cos^2\theta(\dot{\varphi}-\Omega)^2+\dot{\theta}^2}}$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores de fuerzas y aceleraciones, las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento son:

$$-mR\left(\dot{\varphi}^2\cos^2\theta+\dot{\theta}^2\right) = N - mg\operatorname{sen}\theta \tag{2}$$

$$mR\left(-2\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta+\ddot{\varphi}\cos\theta\right) = -\mu N\frac{\cos\theta(\dot{\varphi}-\Omega)}{\sqrt{\cos^2\theta(\dot{\varphi}-\Omega)^2+\dot{\theta}^2}} \tag{3}$$

$$mR\left(\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\ddot{\theta}\right) = -mg\cos\theta - \mu N\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\cos^2\theta(\dot{\varphi}-\Omega)^2+\dot{\theta}^2}} \tag{4}$$

En la ecuación (2) se puede despejar la reacción normal N,

$$N = mg\operatorname{sen}\theta - mR\left(\dot{\varphi}^2\cos^2\theta+\dot{\theta}^2\right),$$

y eliminarla de las ecuaciones (3) y (4):

$$-2\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta+\ddot{\varphi}\cos\theta = -\mu\frac{\cos\theta(\dot{\varphi}-\Omega)}{\sqrt{\cos^2\theta(\dot{\varphi}-\Omega)^2+\dot{\theta}^2}}\left[\frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta-\left(\dot{\varphi}^2\cos^2\theta+\dot{\theta}^2\right)\right]$$

$$\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\cos\theta-\mu\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\cos^2\theta(\dot{\varphi}-\Omega)^2+\dot{\theta}^2}}\left[\frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta-\left(\dot{\varphi}^2\cos^2\theta+\dot{\theta}^2\right)\right]$$

2.— No se conserva la energía dado que la fuerza de rozamiento es siempre disipativa: en cualquier trayectoria (relativa) cerrada realiza un trabajo negativo, ya que es siempre $\boldsymbol{F}_r\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}<0$. Por otra parte, la imposición de una velocidad dada Ω al casquete precisa de un momento externo sobre el sistema, también de naturaleza no conservativo.

Tampoco se conserva el momento cinético, ni siquiera respecto al eje de revolución del casquete esférico, ya que la fuerza de rozamiento produce un momento respecto a dicho eje. Por lo tanto no existen integrales primeras.

3.— La aceleración relativa se obtiene restando de la absoluta expresada en (1) las de arrastre y coriolis:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\text{arr}} &= -R\Omega^2\cos^2\theta\,\boldsymbol{u}_r + R\Omega^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\boldsymbol{u}_\theta + R\dot{\Omega}\cos\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi;\\
\boldsymbol{a}_{\text{cor}} &= 2(\Omega\,\boldsymbol{k})\wedge\left[R\cos\theta(\dot{\varphi}-\Omega)\boldsymbol{u}_\varphi + R\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta\right]\\
&= -2\Omega R\cos\theta(\dot{\varphi}-\Omega)(\cos\theta\,\boldsymbol{u}_r-\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\theta) - 2R\Omega\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi
\end{aligned}$$

Restando las componentes, se obtiene:

$$\begin{aligned}
(a_{\text{rel}})_r &= -R(\dot{\varphi}-\Omega)^2\cos^2\theta - R\dot{\theta}^2;\\
(a_{\text{rel}})_\varphi &= -2R\dot{\theta}(\dot{\varphi}-\Omega)\operatorname{sen}\theta + R(\ddot{\varphi}-\dot{\Omega})\cos\theta;\\
(a_{\text{rel}})_\theta &= R(\dot{\varphi}-\Omega)^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + R\ddot{\theta}.
\end{aligned}$$

Se puede observar que ésta última ecuación se podría haber deducido sin más que haber adoptado como longitud el ángulo relativo con respecto al casquete esférico: $\varphi_{\text{rel}} = \varphi-\Omega t$.