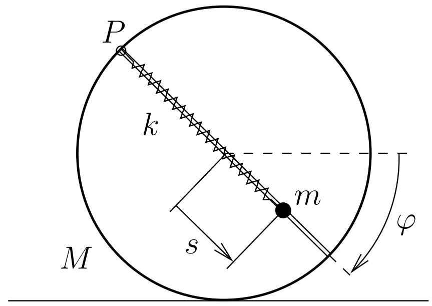
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (9 de enero de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Un disco de radio R y masa M se mueve en todo momento en un plano vertical y rueda sin deslizar sobre una recta horizontal.
En el disco existe una ranura diametral lisa en la que se mueve una partícula pesada de masa m, que está unida a un punto P de la periferia mediante un resorte de constante elástica k y longitud natural R.



Se pide:

1. Razonar si los parámetros (φ, s) que se muestran en la figura forman un conjunto de coordenadas independientes. En cualquier caso definir con precisión otro conjunto de parámetros diferentes de los anteriores que lo sea.

2. Expresar las energías cinética y potencial de la partícula y el disco.

3. Ecuaciones de Lagrange del movimiento.

4. Discutir la existencia de integrales primeras.

---

1. Los parámetros (φ, s) forman efectivamente un conjunto de coordenadas independientes. La configuración del disco queda determinada con un único parámetro, ya que sus movimientos de traslación y giro están relacionados por la condición de rodadura sin deslizamiento. Por otro lado, la posición de la partícula respecto de la ranura queda también determinada por un único parámetro, por ejemplo la distancia s sugerida por el enunciado, que es cinemáticamente independiente del movimiento del disco. Otro conjunto adecuado (aunque no necesariamente más conveniente) de parámetros podría ser (x_1, x_2), que representan las coordenadas horizontales del centro del disco y de la partícula respectivamente.

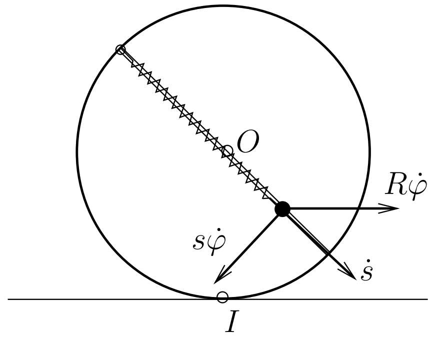


Figura 1: *Velocidad de la partícula*

2. La energía cinética del disco se puede calcular con cualquiera de las dos expresiones siguientes:

$$T_{\text{disco}} = \frac{1}{2} I_I \dot{\varphi}^2 \qquad \text{ó} \qquad T_{\text{disco}} = \frac{1}{2} M v_O^2 + \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2$$

siendo O el centro e I el CIR del movimiento del disco, que se encuentra en el punto de contacto con la recta soporte. Teniendo en cuenta que $I_I = (3/2)MR^2$, resulta:

$$T_{\text{disco}} = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\varphi}^2$$

Para calcular la energía cinética de la partícula pueden derivarse directamente sus coordenadas cartesianas respecto de un sistema de referencia fijo o bien emplear un sistema móvil auxiliar. Eligiendo como sistema auxiliar el Sistema Centro de Masa del disco, la velocidad relativa tiene una componente $\dot{s}$ según la ranura y otra $s\dot{\varphi}$ en dirección perpendicular a aquella, y la velocidad de arrastre es horizontal y de valor $v_O = R\dot{\varphi}$ (ver Figura 1).

Por tanto, la energía cinética de la partícula resulta:

$$\begin{aligned} T_{\text{part}} &= \frac{1}{2}\left[(\dot{s} + R\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (s\dot{\varphi} - R\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + s^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{s}\cos\varphi - 2Rs\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi\right) \end{aligned}$$

La energía potencial gravitatoria del disco es constante y por tanto no interviene en las ecuaciones del movimiento. y la energía potencial de la partícula debida al peso y al muelle se expresa como:

$$V = -mgs\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{2}ks^2$$

donde se ha tomado como nivel de potencial graviatorio nulo la recta horizontal fija que describe el centro O del disco.

3. La Lagrangiana se expresa como:

$$L = T - V = \frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + s^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{s}\cos\varphi - 2Rs\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi\right) + mgs\operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2}ks^2$$

y las ecuaciones de Lagrange correspondientes resultan:

$$m\ddot{s} + mR\ddot{\varphi}\cos\varphi - ms\dot{\varphi}^2 - mg\operatorname{sen}\varphi + ks = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}MR^2 + mR^2 + ms^2 - 2mRs\operatorname{sen}\varphi\right)\ddot{\varphi} + mR\ddot{s}\cos\varphi - mRs\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\ + 2m\dot{s}\dot{\varphi}(s - R\operatorname{sen}\varphi) - mgs\cos\varphi = 0 \end{aligned}$$

4. Ninguna de las coordenadas consideradas (s, φ) es cíclica. La única integral primera es la de la conservación de la energía, ya que todas las fuerzas que trabajan son conservativas. La expresión de la energía total resulta:

$$E = \frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + s^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{s}\cos\varphi - 2Rs\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi\right) - mgs\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{2}ks^2 = cte.$$