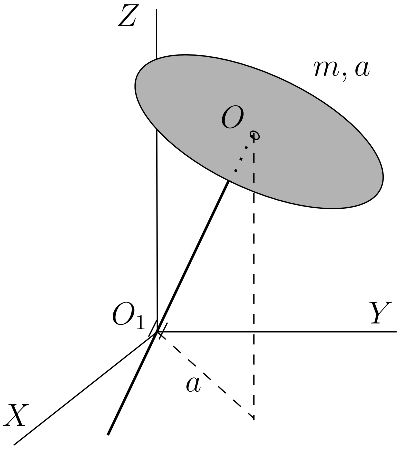
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (8 de marzo de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Un sólido está formado por un disco homogéneo y pesado de masa m y radio a al que se ha soldado en su centro (punto O) y perpendicularmente a su plano una varilla sin masa y de longitud muy grande.
El sólido se mueve de forma que el punto O se encuentra contenido en todo momento en una superficie cilíndrica fija de eje vertical y radio a, y la varilla pasa siempre por un punto fijo O_1 del eje de la superficie cilíndrica. Se supone que no existe rozamiento en ninguna de las partes móviles y que la varilla es lo suficientemente larga como para que nunca deje de pasar por O_1.

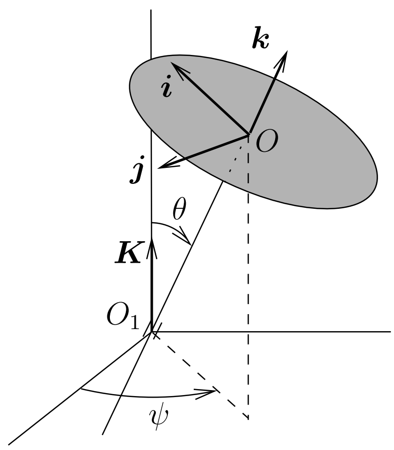


Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema, y elegir razonadamente un conjunto adecuado de parámetros que los representen.
2. Expresión de la velocidad angular del sólido.
3. Expresión del momento cinético en el centro del disco O.
4. Expresión del momento cinético en el punto O_1.
5. Expresión de la energía cinética del sólido.
6. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento y expresar éstas en función de los grados de libertad y sus derivadas.

---

1. El sistema tiene tres grados de libertad, y un conjunto de parámetros adecuado para representarlos es el definido por el giro de precesión de la varilla alrededor del eje vertical fijo (ψ), la inclinación (nutación) de la varilla respecto de la vertical (θ) y el giro propio del disco alrededor de la varilla (φ). Es interesante advertir que la distancia variable $s = OO_1$ queda definida en función de θ mediante la expresión $s = a/\operatorname{sen}\theta$, por lo que no representa un grado de libertad adicional.
Además es conveniente definir un sistema de referencia móvil intermedio $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ de forma que el versor $\boldsymbol{k}$ lleva la dirección de la varilla, $\boldsymbol{i}$ lleva la dirección de máxima pendiente del disco, y $\boldsymbol{j}$ es horizontal y forma un triedro a derechas con los otros dos versores.



2. La velocidad angular ($\boldsymbol{\Omega}$) se expresa como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{K} - \dot{\theta}\boldsymbol{j} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{k}$, la expresión de $\boldsymbol{\Omega}$ en el triedro móvil resulta:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{i} - \dot{\theta}\boldsymbol{j} + \underbrace{(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)}_{r}\boldsymbol{k} \tag{1}$$

3. El momento cinético en O se expresa como $\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$, ya que O es el centro de masa del sólido. Teniendo en cuenta que el tensor de inercia en O se expresa en el triedro móvil como:

$$\boldsymbol{I}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad ; \qquad A = \frac{1}{4}ma^2 \quad , \quad C = \frac{1}{2}ma^2 = 2A, \tag{2}$$

el momento cinético $\boldsymbol{H}_O$ resulta:

$$\boldsymbol{H}_O = \frac{1}{4}ma^2\left[\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{i} - \dot{\theta}\boldsymbol{j} + 2r\boldsymbol{k}\right] \tag{3}$$

4. El punto O_1 es un punto fijo que no pertenece al sólido, y el correspondiente momento cinético $\boldsymbol{H}_{O_1}$ puede obtenerse como:

$$\boldsymbol{H}_{O_1} = \boldsymbol{H}_O + m\boldsymbol{v}_O \wedge \boldsymbol{OO}_1 \tag{4}$$

La velocidad del centro del disco puede obtenerse directamente derivando sus coordenadas cartesianas o haciendo uso de un sistema móvil auxiliar; por ejemplo, uno que acompañe a la varilla en su movimiento de precesión, y expresando que la velocidad absoluta se obtiene sumando la relativa y la de arrastre. Otra forma de obtener $\boldsymbol{v}_O$ es mediante la expresión del campo de velocidades del sólido, teniendo en cuenta que la velocidad del punto material que pasa por O_1 es $\boldsymbol{v}^*_{O_1} = \dot{s}\boldsymbol{k} = -a\dot{\theta}\cot\theta/\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{k}$.

Por cualquiera de los métodos anteriores se obtiene la expresión de $\boldsymbol{v}_O$:

$$\boldsymbol{v}_O = -\frac{a\dot{\theta}}{\operatorname{sen}\theta}(\boldsymbol{i} + \cot\theta\boldsymbol{k}) - a\dot{\psi}\boldsymbol{j} \tag{5}$$

Con (3), (4), (5) y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{OO}_1 = -(a/\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{k}$, se obtiene:

$$\boldsymbol{H}_{O_1} = ma^2\dot{\psi}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{4} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\boldsymbol{i} - ma^2\dot{\theta}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}ma^2r\boldsymbol{k}$$

5. La energía cinética se obtiene mediante el teorema de König como:

$$T = \frac{1}{2}mv_O^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega})$$

y teniendo en cuenta (1), (2) y (5) resulta:

$$T = \frac{1}{2}ma^2\left(\dot{\psi}^2 + \frac{\dot{\theta}^2}{\operatorname{sen}^4\theta}\right) + \frac{1}{8}ma^2\operatorname{sen}^2\theta\dot{\psi}^2 + \frac{1}{8}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}ma^2r^2$$

6. Existen tres integrales primeras. La primera de ellas es la conservación de la componente vertical del momento cinético en el punto fijo O_1, ya que la reacción de la superficie cilíndrica corta al eje vertical fijo, la reacción en O_1 está aplicada en un punto del propio eje, y además el peso es paralelo a aquél, resultando:

$$\boldsymbol{H}_{O_1} \cdot \boldsymbol{K} = ma^2\dot{\psi}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\theta + 1\right) + \frac{1}{2}ma^2 r\cos\theta = cte. \tag{6}$$

Otra integral primera es la conservación de la componente según el eje $\boldsymbol{k}$ móvil del momento cinético respecto del centro del disco O, ya que el eje móvil coincide con el de revolución del sólido y además tanto las reacciones como el peso se aplican sobre el propio eje móvil, por lo que resulta:

$$\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{k} = \frac{1}{2}ma^2 r = cte. \qquad \Rightarrow \qquad r = cte. \tag{7}$$

Por último, la energía total se conserva, ya que todas las fuerzas que trabajan son conservativas, por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} E = T + V = \frac{1}{2}ma^2\left(\dot{\psi}^2 + \frac{\dot{\theta}^2}{\operatorname{sen}^4\theta}\right) + \frac{1}{8}ma^2\operatorname{sen}^2\theta\dot{\psi}^2 + \frac{1}{8}ma^2\dot{\theta}^2 \\ + \frac{1}{4}ma^2r^2 + mg\frac{a}{\operatorname{sen}\theta}\cos\theta = cte. \end{aligned} \tag{8}$$

El sistema formado por (6), (7) y (8) no son sino las ecuaciones del movimiento del sólido, que permiten calcular $\psi(t), \theta(t)$ y $\varphi(t)$ para unas condiciones iniciales dadas.