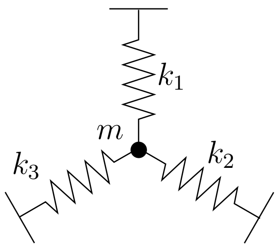
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (26 de abril de 2002)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Se considera un sistema formado por una única partícula de masa m que se encuentra unida mediante tres resortes a sendos puntos fijos situados en un plano horizontal liso. La longitud natural de cada resorte es tal que se observa que en la posición de equilibrio el ángulo entre dos cualquiera de ellos es 120°, tal y como muestra la figura adjunta. Se supone que $k_1 = k_2 = k$ y $k_3 = 2k$.



Se pide:

1. Suponiendo que se producen pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio, obtener las ecuaciones diferenciales de aquellas en función de los grados de libertad y sus derivadas.
2. Calcular los modos normales de vibración y las frecuencias propias.

---

1. El sistema tiene dos grados de libertad, que representaremos mediante las coordenadas (x, y) de la partícula. Suponiendo que se producen pequeños desplazamientos alrededor de la posición de equilibrio, la energía elástica de cada resorte se calcula exclusivamente a partir de su elongación en la dirección del propio resorte. Por tanto, la energía potencial total se expresa como:

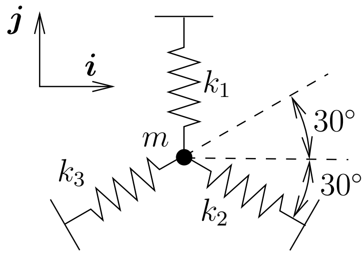


Figura 1: *Definición de los grados de libertad*

$$V = \frac{1}{2}k_1y^2 + \frac{1}{2}k_2\left(-x\frac{\sqrt{3}}{2} + y\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k_3\left(x\frac{\sqrt{3}}{2} + y\frac{1}{2}\right)^2$$

y la energía cinética como $T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$. La Lagrangiana se obtiene como $L = T - V$, y las ecuaciones de Lagrange correspondientes tienen la expresión:

$$m\ddot{x} + \frac{3}{4}(k_2 + k_3)x + \frac{\sqrt{3}}{4}(k_3 - k_2)y = 0 \tag{1}$$

$$m\ddot{y} + \frac{\sqrt{3}}{4}(k_3 - k_2)x + \left[k_1 + \frac{1}{4}(k_2 + k_3)\right]y = 0 \tag{2}$$

Las ecuaciones del movimiento podrían haberse obtenido con otros procedimientos alternativos. Uno de ellos es plantear directamente las ecuaciones de cantidad de movimiento según las direcciones x e y. Otra forma de obtenerlas es aprovechar el hecho de que el enunciado especifica que los muelles 1 y 2 son iguales y considerar los desplazamientos según la dirección del muelle 3 y su perpendicular. De esta última forma se obtienen dos ecuaciones más simples ya que están desacopladas (véase solución alternativa al final).

2. De las ecuaciones (2) se deduce que en el caso general las matrices de masa y rigidez tienen la expresión:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad ; \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}(k_2+k_3) & \frac{\sqrt{3}}{4}(k_3-k_2) \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(k_3-k_2) & k_1+\frac{1}{4}(k_2+k_3) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Particularizando la matriz de rigidez dada en (3) para $k_1 = k_2 = k$ y $k_3 = 2k$, se obtiene:

$$\mathbf{K} = k \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \tag{4}$$

La ecuación característica del problema de autovalores generalizado resulta:

$$\left(\frac{9}{4}k - \omega^2 m\right)\left(\frac{7}{4}k - \omega^2 m\right) - \frac{3}{16}k^2 = 0 \quad , \tag{5}$$

y las frecuencias propias resultan de resolver (5), obteniéndose:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{2m}} \quad ; \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{5k}{2m}}$$

Por último, los modos propios asociados a cada una de las frecuencias resultan:

$$\mathbf{a}_1 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\sqrt{3} \end{array} \right\} \quad ; \qquad \mathbf{a}_2 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right\}$$

El procedimiento alternativo de solución sugerido antes sería tomar los grados de libertad (u, v) según la dirección del resorte $k_3 = 2k$ y perpendicular a esta respectivamente. Haciendo las operaciones, la Lagrangiana resultaría

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \frac{5}{4}ku^2 + \frac{3}{4}ky^2,$$

y las ecuaciones de la dinámica

$$m\ddot{u} + \frac{5}{2}ku = 0;$$
$$m\ddot{v} + \frac{3}{2}kv = 0.$$

Se comprueba inmediatamente que estas resultan desacopladas y las frecuencias propias correspondientes serían $\sqrt{5/2}\sqrt{k/m}$ y $\sqrt{3/2}\sqrt{k/m}$, iguales a los obtenidos arriba. Los vectores propios en coordenadas (u, v) serían $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Mediante la transformación de coordenadas

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}u - \dfrac{1}{2}v, \\ y = \dfrac{1}{2}u + \dfrac{\sqrt{3}}{2}v, \end{cases}$$

se comprueba que estos vectores propios son equivalentes a los obtenidos antes en coordenadas (x, y).